Ising模型の動的臨界指数に対する厳密な下限

J Stat Phys 192, 76 (2025)

<u>政岡凜太郎</u>[1], 副島智大[2], 渡辺悠樹[1]
[1]東大工, [2]Harvard大

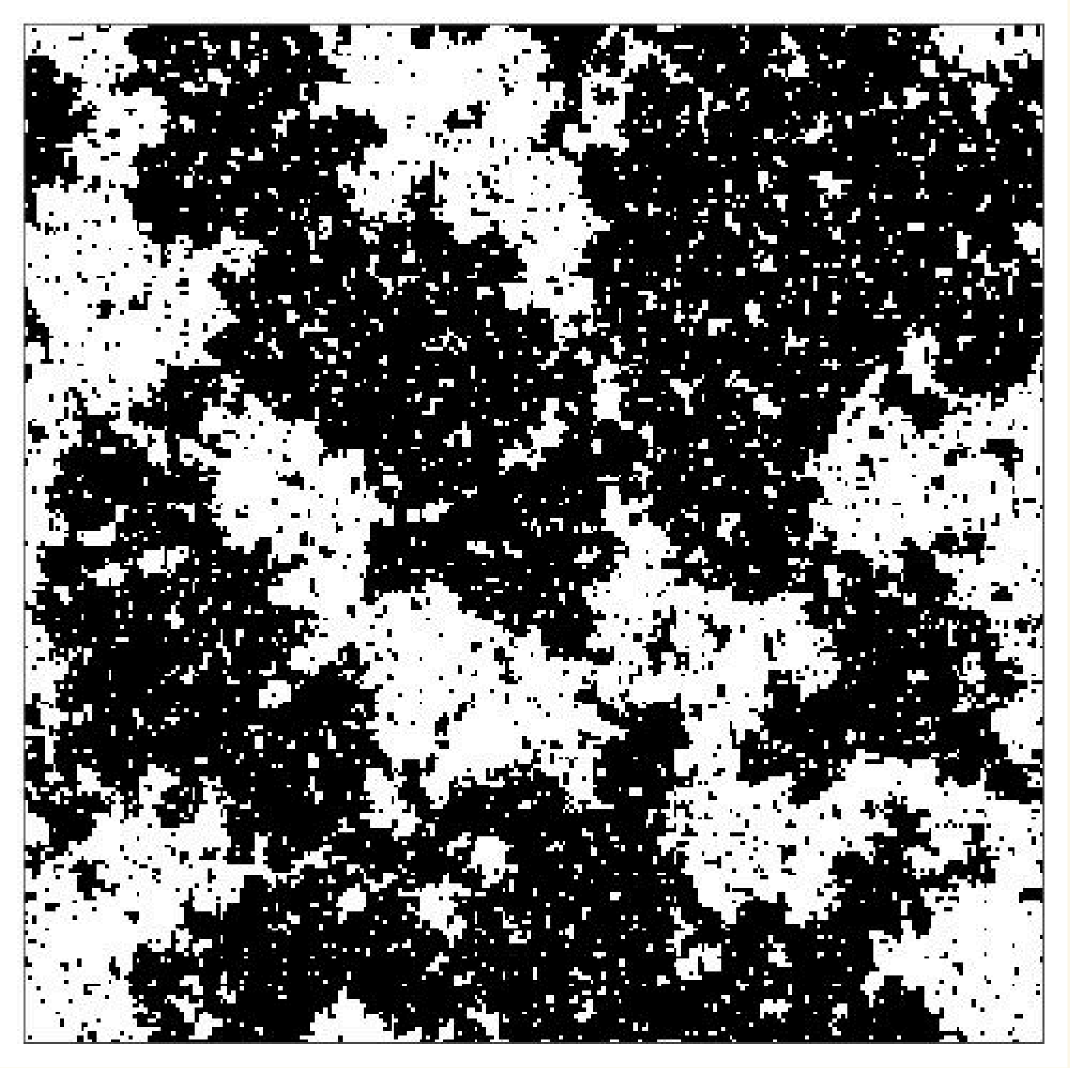
Ising模型が考案されて約100年が経ったが、平衡統計力学における華々しい結果と比べると、臨界現象の動的側面について理論的に分かっていることはまだまだ少ない。

本研究では$d \geq 2$次元Ising模型の臨界点における動的臨界指数 z についての下限$z \geq 2$を(数理物理の基準で)証明した。

この結果は我々が提唱しているより一般的な枠組み(Masaoka, Soejima, & Watanabe, 2024)の一部である。証明の細部を変えれば色々な模型について成り立つ。

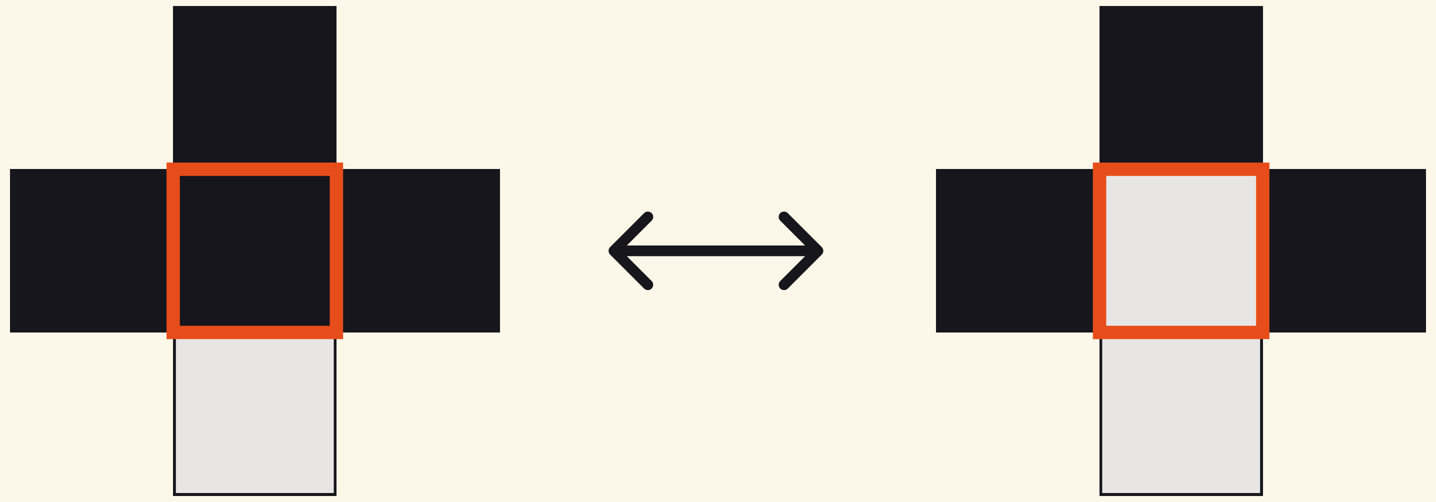
Ising模型: $$p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{Z} e^{-\beta_c E(\boldsymbol{\sigma})}, \; E(\boldsymbol{\sigma}) = -\sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j$$

温度は転移点に固定する



ダイナミクスの構成:

- マルコフ過程 $$\frac{dp(\boldsymbol{\sigma})}{dt} = \sum_{\boldsymbol{\sigma}'} W_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'} p(\boldsymbol{\sigma}')$$
- 詳細釣り合い $$W_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'} p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma}') = W_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}} p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma})$$
- 局所性（簡単のため、単一スピンフリップを仮定）



動的臨界指数 z は臨界点における緩和現象を特徴づける最も基本的な量である。

Ising模型(スピン非保存)の場合、

d	z
2	2.17
3	2.02
≥ 4	2

d = 2,3 については数値的な結果。
d ≥ 4 については有効理論による考察から導かれる。

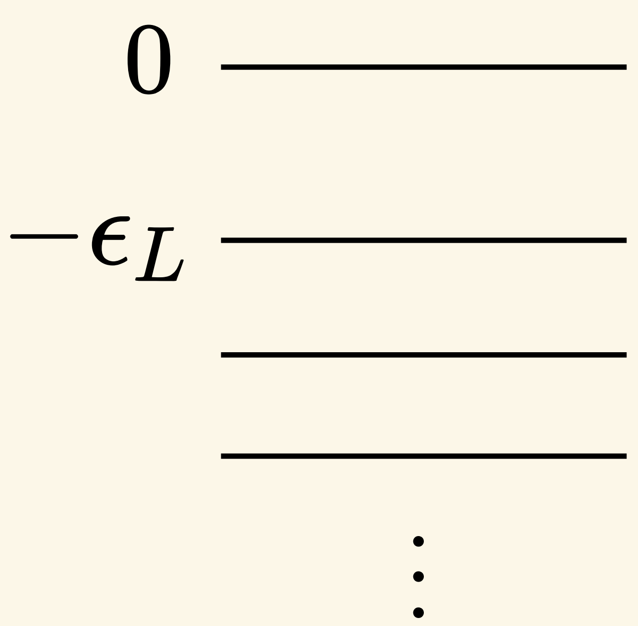
先行研究ではd=2のときz ≥ 7/4が知られていたが、統一的な結果はなかった。

定義1

$$\epsilon_L \sim L^{-z} \;(\epsilon_\xi \sim \xi^{-z})$$

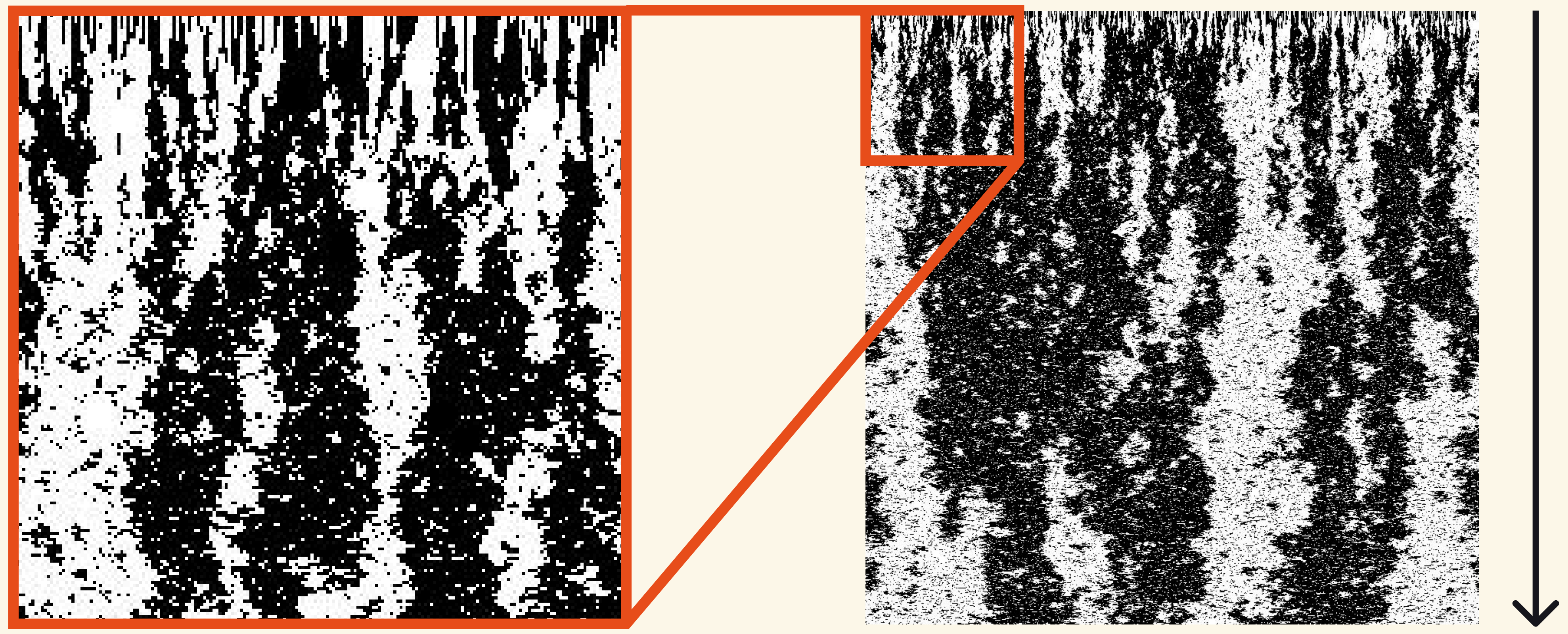
ϵ_L : スペクトルギャップ
L : 系の幅
ξ : 相関長

Spectrum of W



(定義2)

異方的スケール不変性 $x \to \lambda x,\; t \to \lambda^z t$



$t^{1/z}$

証明のアイディアは我々らの先行研究 (Masaoka, Soejima, & Watanabe 2024) に基づく。

戦略としては、相関関数を上下から評価する。

STEP1: 下からの評価

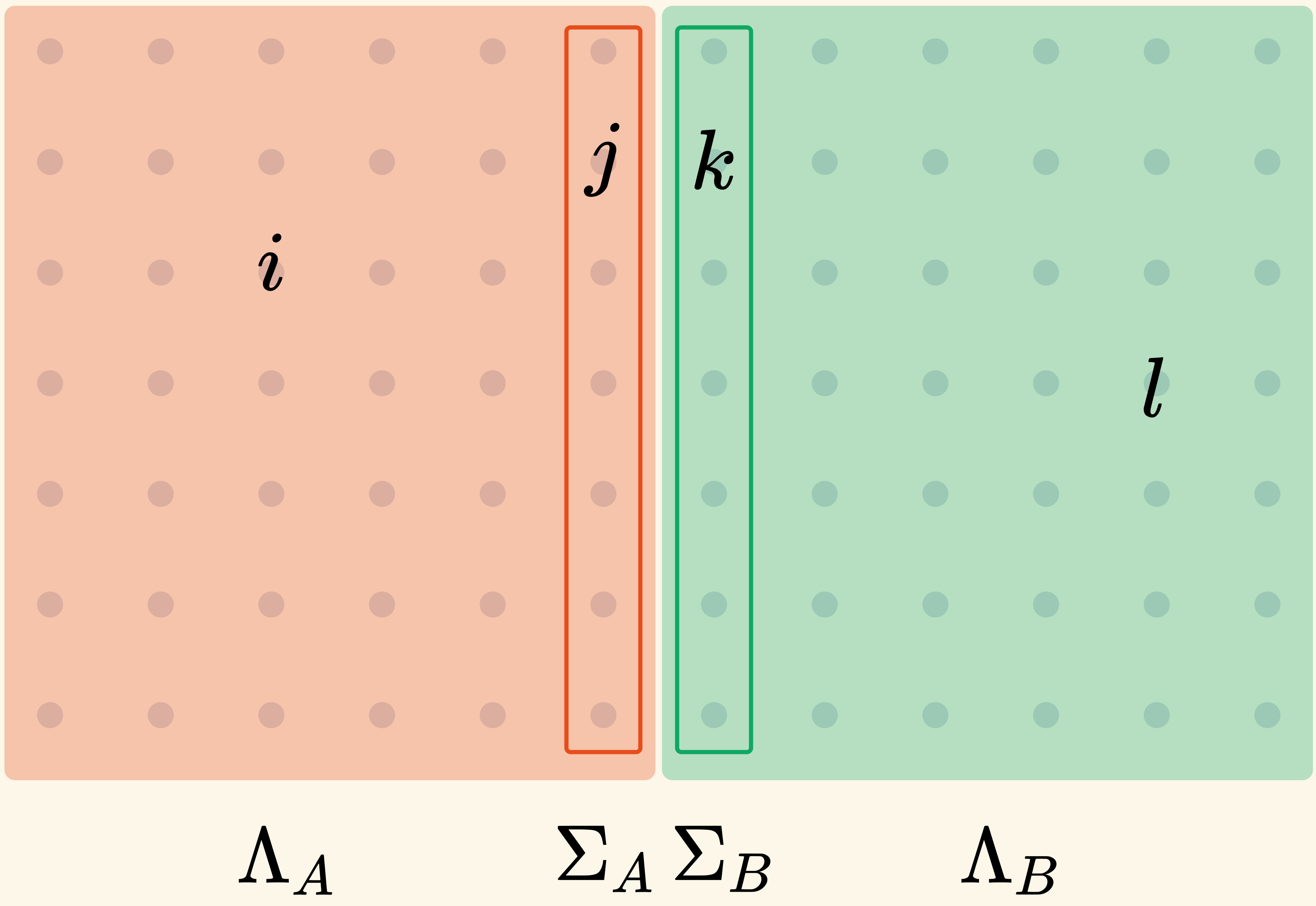
Simon-Liebの不等式を用いる

STEP2: 上からの評価

Markov過程をフラストレーションフリーな量子系にマップして、Gosset-Huangの不等式を用いる

Simon-Liebの不等式(Simon 1980, Lieb 1980):

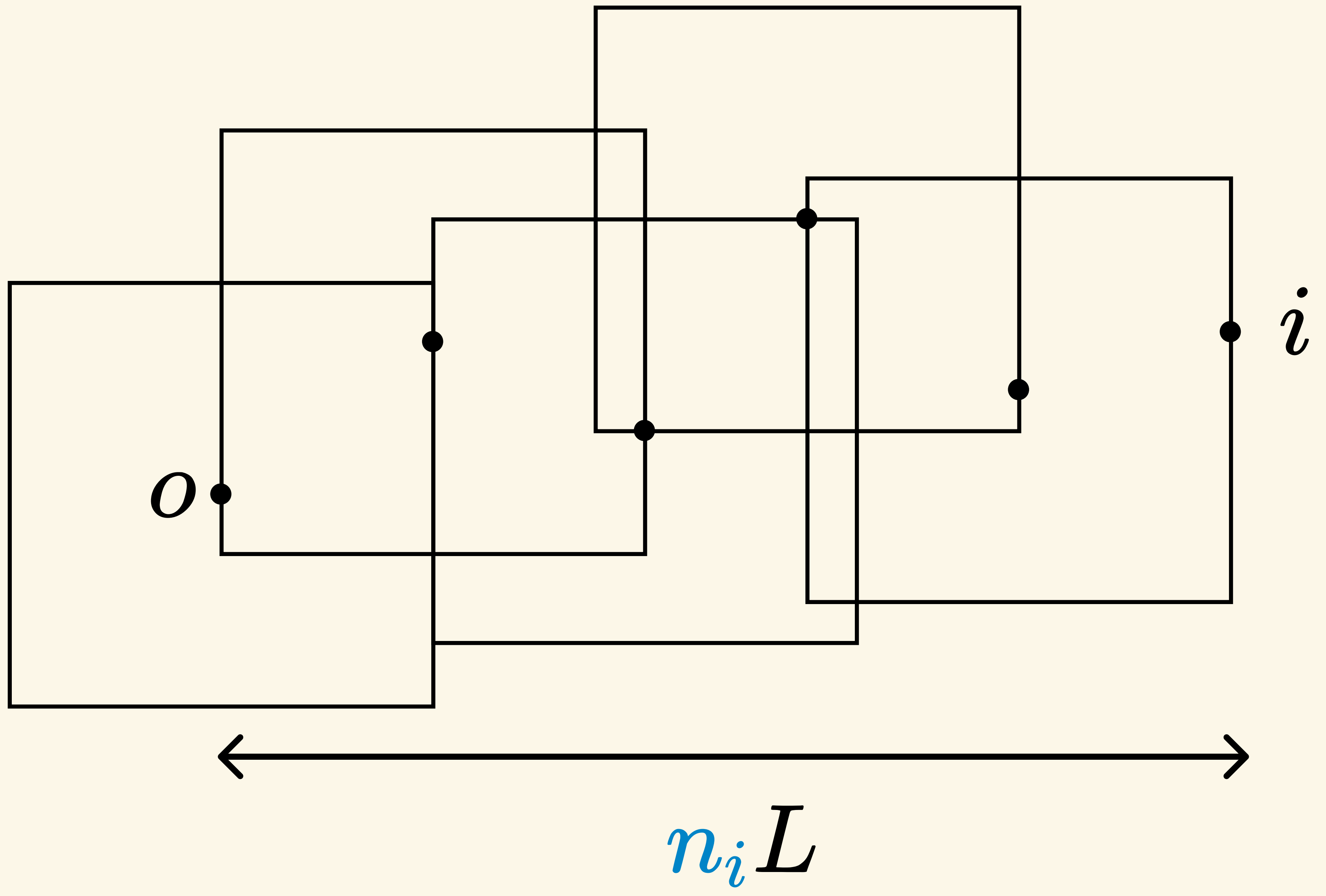
$$\langle \sigma_i \sigma_l \rangle \le \sum_{\substack{(j,k) \\ j\in\Sigma_A, k\in\Sigma_B}} \langle \sigma_i \sigma_j \rangle \langle \sigma_k \sigma_l \rangle$$



これを繰り返し用いると、

$$\langle \sigma_o \sigma_i \rangle \le c(L)^{n_i}$$

$$c(L) = 2d \sum_{\|j\|_\infty = (L-1)/2} \langle \sigma_o \sigma_j \rangle_L$$



を得る。模型が転移点にあるとき、
相関関数の指数減衰が禁止される。
$c(L) < 1$ なら指数減衰。 $\Rightarrow$ $c(L) \ge 1$

詳細釣り合い条件:

$$W_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'} p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma}') = W_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}} p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma})$$

これをちょっと書き換えてみる。

$$\frac{1}{\sqrt{p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma})}} W_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'} \sqrt{p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma}')} = \frac{1}{\sqrt{p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma}')}} W_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}} \sqrt{p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma})}$$

ここで

$$H_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'} := \frac{1}{\sqrt{p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma})}} W_{\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}'} \sqrt{p_{\mathrm{eq}}(\boldsymbol{\sigma}')}$$

とすると、これは実対称行列であり、ハミルトニアンとみなせる！

このようにして得られたハミルトニアンは、一般のハミルトニアンよりも狭いクラスに属する。

我々は遷移レートに対して局所性の仮定を置いているため、以下が成り立つ

$$W = \sum_i W_i, \quad \sum_{\boldsymbol{\sigma}} (W_i)_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}} = 1, \quad (W_i)_{\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\sigma}} \geq 0 \; (\boldsymbol{\sigma} \neq \boldsymbol{\sigma}')$$

（確率保存）　（確率の非負性）

これに対応して、ハミルトニアンについて以下のような分解が存在する

$$H = \sum_i H_i, \quad H_i |\mathrm{GS}\rangle = 0, \quad H_i \geq 0.$$

このようなハミルトニアンはフラストレーションフリーであると言われる。

フラストレーションフリーな量子系は量子情報・量子物性の分野でよく研究されており、
相関関数に対する以下のGosset-Huang不等式(Gosset & Huang, 2016)が知られている。

$$\frac{\langle OO'\rangle}{\sqrt{\langle O^2\rangle\langle O'^2\rangle}} \leq 2e^2 \exp\left(-\frac{\mathrm{dist}(O,O')-1}{\mathrm{const.}}\frac{\sqrt{\epsilon_L}}{\sqrt{\mathrm{const.}+\epsilon_L}}\right)$$

cf. 一般の量子系

$$\langle OO'\rangle \leq \mathrm{const.}\times e^{-\mathrm{const.}\times\mathrm{dist}\times\epsilon_L}$$

定数は模型の詳細によって決まる。この不等式を $c(L) = 2d \sum_{\|j\|_\infty=(L-1)/2} \langle\sigma_o\sigma_j\rangle_L$ に用いると

$$1 \leq c(L) \leq 2d\cdot 2dL^{d-1}\cdot 2e^2\exp\left(-\frac{L-3}{2}\sqrt{\frac{\epsilon_L}{(2d)^2+\epsilon_L}}\right)$$

ここから以下が導かれる。

$$0 \leq \epsilon_L \leq (2d)^4\left(\frac{\log L}{L}\right)^2 \quad \text{for} \quad L \geq 10e^2d^2 \quad \longrightarrow$$

z ≥ 2 が示された！

Ising模型の動的臨界指数に対する新たな不等式 $z \geq 2$ を数学的に厳密に導いた。

証明の細部を変えれば、同じ議論が色々な系に適用できるため、$z \geq 2$ は普遍的な結果である。
本質的なのは状態更新の局所性と詳細釣り合いのみ。

- 熱浴法/Metropolis-Hastings法
- スピン非保存/スピン保存
- Ising, Potts, ...
- ただし、クラスターアルゴリズムなど非局所な時間発展や、詳細釣り合いを破る非可逆な時間発展に対しては成り立たない。

Equilibrium states	dynamical exponent z
classical Ising (2D)	2.1667(5) [14]
classical Ising (3D)	2.0245(15) [15]
classical Heisenberg (3D)	2.033(5) [16]
Three-state Potts (2D)	2.193(5) [17]
Four-state Potts (2D)	2.296(5) [18]

Model	Detailed balance	Locality	z
ASEP	×	✓	3/2 [50, 51]
Wolff algorithm	✓	×	0.3 [11]

ご清聴ありがとうございました