臨界的なフラストレーションフリー系における動的臨界指数の厳密な下限

arXiv:2406.06415　東大工 物理工学 修士1年 政岡凜太郎　共同研究者: 副島智大、渡辺悠樹

概要

フラストレーションフリー(FF)系とは？

可解模型の一種。全系の基底状態が局所的なハミルトニアンを最小化する模型のこと。

例: Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki模型、トーリックコード、Rokhsar-Kivelson量子ダイマー模型、強磁性Heisenberg模型

FF系はどのような量子相を記述できるか？

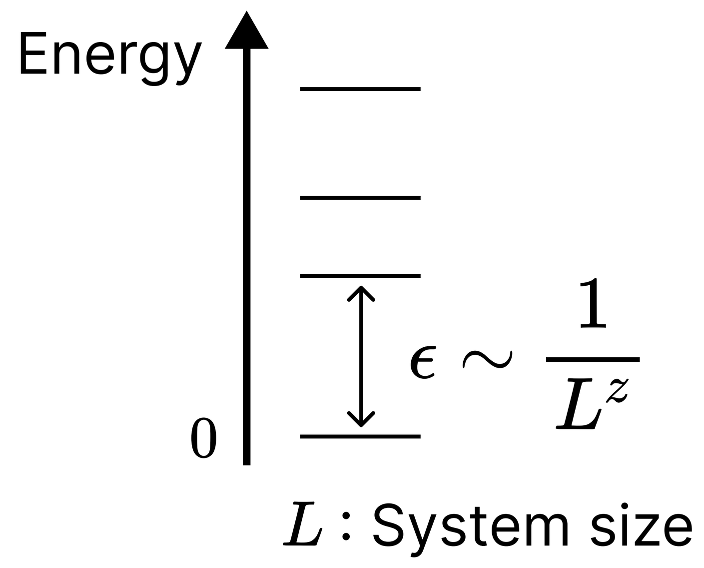
・ギャップトな量子系の基底状態はFF系の基底状態で近似できることが知られており[1]、具体例も数多く構成されている。

・一方で、**ギャップレスなFF系は典型的なギャップレス系とは異なる振る舞いを示す**ことが示唆されてきた。

動的臨界指数 z について、

・典型的なギャップレス系:　$z=1$
Lorentz対称性からの帰結

・ギャップレスなFF系:　$z \geq 2$
完全な証明はまだない。



我々は臨界的（⊂ギャップレス）なFF系について、動的臨界指数が2以上になることを**厳密に証明した**[2]。**次元、格子構造、並進対称性、境界条件**は問わない。

証明

系の大きさに対して冪的に減衰する相関関数が存在するとき、系は臨界的であると言うことにする。

$$\frac{|\langle\Psi|\hat{\mathcal{O}}(\hat{\mathbb{I}}-\hat{G})\hat{\mathcal{O}}'|\Psi\rangle|}{\|\hat{\mathcal{O}}|\Psi\rangle\|\|\hat{\mathcal{O}}'|\Psi\rangle\|} = \Omega(L^{-\Delta})$$

$|\Psi\rangle$: 基底状態、$\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{O}}'$: 局所演算子、 $\hat{G}$: 基底状態への射影

以下の不等式(Gosset-Huang, [3])を用いる

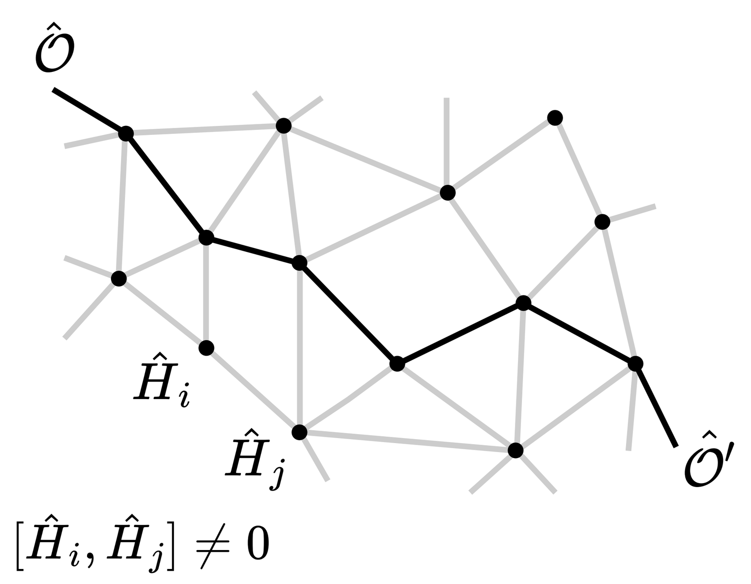
$$\frac{|\langle\Psi|\hat{\mathcal{O}}(\hat{\mathbb{I}}-\hat{G})\hat{\mathcal{O}}'|\Psi\rangle|}{\|\hat{\mathcal{O}}|\Psi\rangle\|\|\hat{\mathcal{O}}'|\Psi\rangle\|} \leq 2\exp\left(-\frac{2(\tilde{d}(\hat{\mathcal{O}},\hat{\mathcal{O}}')-2)}{2c-1}\sqrt{\frac{\epsilon}{g^2+\epsilon}}\right)$$

非可換な局所ハミルトニアンを辺で結ぶことによって相互作用グラフを定める。

$\tilde{d}(\hat{\mathcal{O}},\hat{\mathcal{O}}')$: 演算子間の距離

c : 相互作用グラフの彩色数

g : 相互作用グラフの最大次数

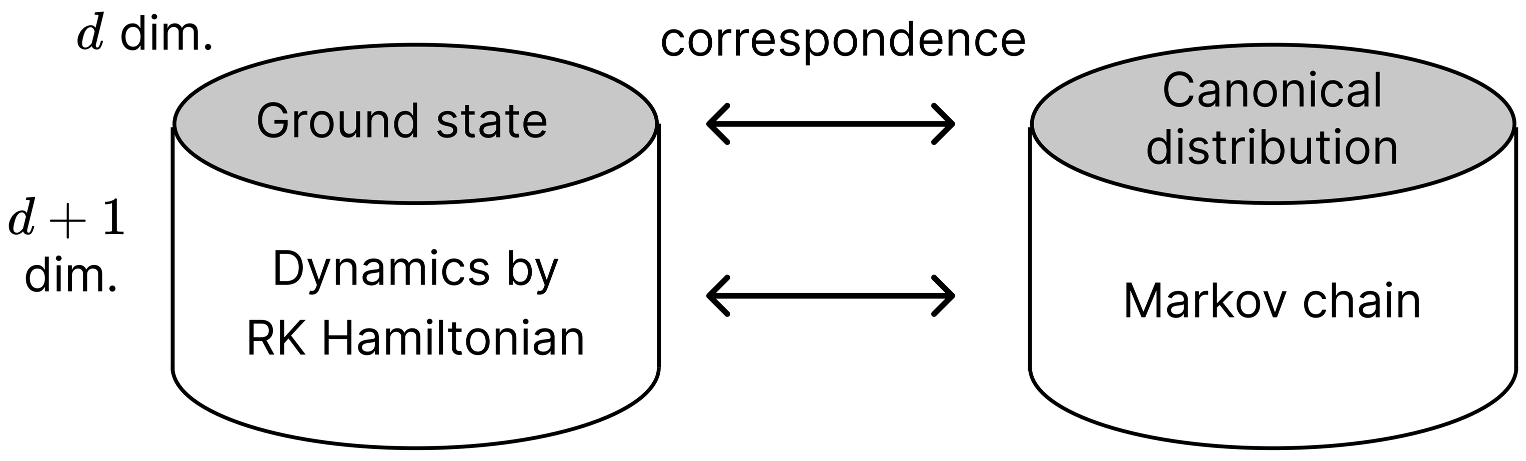


エネルギーギャップが $\epsilon = O(1/L^2)$ でなければ、十分大きな L でGosset-Huangの不等式が破綻。よって $z \geq 2$ となる。

具体例

・Rokhsar-Kivelson(RK)ハミルトニアン

古典的な統計力学系に対応する基底状態をもつFF系をRKハミルトニアンと呼ぶ。RKハミルトニアンは**詳細釣り合いを満たす局所的なMarkov連鎖**（Metropolis-Hastingsアルゴリズムや Gibbsサンプリングなど）と等価であることが知られている。



臨界点に対応するRKハミルトニアンに対し、冪的な相関関数が必ず存在するので、我々の結果から $z \geq 2$ が言える！

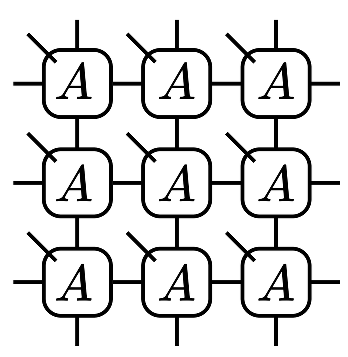
→Markov連鎖モンテカルロ法の分野での経験的な事実と一致

Model	z
Ising (2D)	2.1667(5)[4]
Ising (3D)	2.0245(15)[5]
Heisenberg (3D)	2.033(5)[6]
three-state Potts (2D)	2.193(5)[7]
four-state Potts (2D)	2.296(5)[8]

詳細釣り合いを満たす局所的なMarkov連鎖モンテカルロ法によって数値的に求められた動的臨界指数

• Parent Hamiltonians of PEPS

projected entangled pair state (PEPS)は2次元以上の量子系の基底状態を記述する際に広く用いられる変分状態。



PEPSを基底状態にもつFF系として、parent Hamiltonianが構成される。これが臨界的ならば必ず $z \geq 2$ となる。

→共形場理論の基底状態は有限ボンド次元のPEPSで書けない

• 平面波状態を基底状態にもつFF系

$$|\text{plane wave}\rangle = \sum_x \hat{O}_x|0\rangle$$

自発的に連続対称性を破る系を含む。
$z \geq 2$ は南部-Goldstoneボソンの分散関係が2乗分散であるかそれよりソフトであることを意味する。

結論と展望

臨界的なFF系の特異な振る舞いが動的臨界指数の観点から厳密に示された！

・FF系で $z < 2$ の臨界点を記述できないという**No-go定理**

・臨界的なFF系はLorentz対称性を持たない、よって共形場理論で表されない**非自明な量子臨界点**になっている

・一般のギャップレスFF系でも同様の定理が成り立つか？
・低エネルギー励起の分散関係
・動的臨界指数以外のギャップレスFF系の特徴づけ

参考文献

[1] A. Kitaev, Annals of Physics 321, 2 (2006).
[2] R. Masaoka, T. Soejima, and H. Watanabe, arxiv:2406.06415 (2024).
[3] D. Gosset and Y. Huang, Physical Review Letters 116, 097202 (2016).
[4] M. P. Nightingale and H. W. J. Blöte, Physical Review B 62, 1089 (2000).
[5] M. Hasenbusch, Physical Review E 101, 022126 (2020).
[6] A. Astillero and J. J. Ruiz-Lorenzo, Physical Review E 100, 062117 (2019).
[7] Y. Murase and N. Ito, Journal of the Physical Society of Japan 77, 014002 (2008).
[8] E. Arashiro, et al., Phys. A: Stat. Mech. Appl. 388, 4379 (2009).