物理工学専攻 院試解答

政岡凜太郎

2023 年 9 月 10 日

はじめに

- 解答の正しさは保証しません。
- 図示する問題は図を作るのが面倒なので省略しています。
- 試験が行われた年でラベル付けしています。年度とずれているので注意。
- 院試勉強、頑張ってください。

目次

1　2022 年 (令和 4 年)

第 1 問

[1.1]

　奇数に対し、

$$\psi_{2l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2l+1)\pi}{2a} x\right) \tag{1.1}$$

となる。偶数に対し、

$$\psi_{2l}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{l\pi}{a} x\right) \tag{1.2}$$

となる。ただし $l = 1, 2, \ldots$ である。エネルギーは、

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 \tag{1.3}$$

[1.2]

　設問 [1.1] の結果から、$\psi_n(x)$ は $\hat{P}$ の固有状態であり、固有値は

$$\psi_{2l+1}(x) : 1, \quad \psi_{2l}(x) : -1 \tag{1.4}$$

[2.1]

$$\hat{M}\left(\psi_1(x)\psi_1(y)\right) = \psi_1(x)\psi_1(y), \quad \hat{M}\left(\psi_2(x)\psi_2(y)\right) = \psi_2(x)\psi_2(y), \tag{1.5}$$

より、$\Psi_{1,1}(x,y), \Psi_{2,2}(x,y)$ は $\hat{M}$ の固有状態で、固有値は 1。

[2.2]

$$|\Psi_\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\Psi_{2,1}(x,y) \pm \Psi_{1,2}(x,y)\right) \tag{1.6}$$

は $\hat{M}$ の固有値 ± 1 の固有状態になっている。

[2.3]

$$\hat{M}\hat{L}\hat{M} = -\hat{L} \tag{1.7}$$

から、

$$\langle \Psi_\pm | \hat{L} | \Psi_\pm \rangle = -\langle \Psi_\pm | \hat{M}\hat{L}\hat{M} | \Psi_\pm \rangle = -\langle \Psi_\pm | \hat{L} | \Psi_\pm \rangle = 0 \tag{1.8}$$

[2.4]

$$\hat{C}_4 \Psi_{1,1}(x, y) = \psi_1(-y)\psi_1(x) = \psi_1(x)\psi_1(y) \tag{1.9}$$

から、$\Psi_{1,1}(x, y)$ は $\hat{C}_4$ の固有状態で固有値は 1。次に

$$\hat{C}_4 \Psi_{2,2}(x, y) = \psi_2(-y)\psi_2(x) = -\psi_2(x)\psi_2(y) \tag{1.10}$$

から、$\Psi_{2,2}(x, y)$ は $\hat{C}_4$ の固有状態で固有値は -1。

[2.5]

$$|\Psi'_\pm\rangle := \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\Psi_{2,1}(x, y) \pm \mathrm{i}\Psi_{1,2}(x, y) \big) \tag{1.11}$$

に対し、

$$\begin{aligned} \hat{C}_4 |\Psi'_\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\Psi_{2,1}(-y, x) \pm \mathrm{i}\Psi_{1,2}(-y, x) \big) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \big(\pm\mathrm{i}\Psi_{2,1}(x, y) - \Psi_{1,2}(x, y) \big) \end{aligned} \tag{1.12}$$

となる。よって $|\Psi'_\pm\rangle$ は $\hat{C}_4$ の固有値 $\pm\mathrm{i}$ の固有状態になっている。

[2.6]

$$\begin{aligned} \langle \Psi'_\pm | \hat{L} | \Psi'_\pm \rangle &= \frac{\pm\mathrm{i}}{2} \big(\langle \Psi_{2,1} | \hat{L} | \Psi_{1,2} \rangle - \langle \Psi_{1,2} | \hat{L} | \Psi_{2,1} \rangle \big) \\ &= \mp \operatorname{Im} \langle \Psi_{2,1} | \hat{L} | \Psi_{1,2} \rangle \\ &= \mp 2 \operatorname{Im} (\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | p | \psi_2 \rangle) \end{aligned} \tag{1.13}$$

ここで、

$$\begin{aligned}\langle \psi_2 | x | \psi_1 \rangle &= \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} x \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{32}{9\pi^2}a, \qquad (1.14)\\ \langle \psi_1 | p | \psi_2 \rangle &= \frac{-\mathrm{i}\hbar\pi}{a^2}\int_{-a}^{a} \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{-4\mathrm{i}\hbar}{3a} \qquad (1.15)\end{aligned}$$

から、

$$\langle \Psi'_{\pm} | \hat{L} | \Psi'_{\pm} \rangle = \pm\frac{256\hbar}{27\pi^2} \qquad (1.16)$$

第 2 問

[1]

$$x = L\sin\theta, \quad y = a\cos\Omega t + L\cos\theta \tag{1.17}$$

[2]

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -T\sin\theta \\ m\ddot{y} &= mg - T\cos\theta \end{aligned} \tag{1.18}$$

[3]

$$\ddot{x} = L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta), \quad \ddot{y} = -a\Omega^2\cos\Omega t - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) \tag{1.19}$$

[4]

問 [1] の結果から、運動方程式は

$$\begin{aligned} &mL(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) = -T\sin\theta, \\ &-ma\Omega^2\cos\Omega t - mL(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta) = mg - T\cos\theta \end{aligned} \tag{1.20}$$

と書ける。よって θ に関する運動方程式は、

$$\ddot{\theta} + \frac{a\Omega^2}{L}\cos\Omega t\sin\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta \tag{1.21}$$

[5]

θ が微小なとき、$\sin\theta \approx \theta$ として、

$$\ddot{\theta} + \frac{a\Omega^2}{L}\theta\cos\Omega t = -\frac{g}{L}\theta. \tag{1.22}$$

となる。$a = 0$ のとき、

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L}\theta. \tag{1.23}$$

この解は $\theta_0(0)=A,\ \dot{\theta}_0(0)=0$ のとき、

$$\theta_0(t)=A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right) \tag{1.24}$$

で与えられる。固有角振動数は、

$$\omega_0=\sqrt{\frac{g}{L}}\,. \tag{1.25}$$

[6]

運動方程式において、a の 1 次の係数は以下のようになる。

$$\ddot{\theta}_1(t)+\frac{A\Omega^2}{L}\cos\Omega t\cos\omega_0 t=-\frac{g}{L}\theta_1(t) \tag{1.26}$$

[7]

運動方程式は

$$-\ddot{\theta}_1(t)-\omega_0^2\theta_1(t)=\frac{A\Omega^2}{2L}\left(\cos[(\Omega+\omega_0)t]+\cos[(\Omega-\omega_0)t]\right) \tag{1.27}$$

と書ける。これに

$$\theta_1(t)=u_1\cos[(\Omega+\omega_0)t]+u_2\cos[(\Omega-\omega_0)t] \tag{1.28}$$

を代入すると、$\cos[(\Omega\pm\omega_0)t]$ の係数から

$$[(\Omega+\omega_0)^2-\omega_0^2]u_1=\frac{A\Omega^2}{2L},\quad [(\Omega-\omega_0)^2-\omega_0^2]u_2=\frac{A\Omega^2}{2L} \tag{1.29}$$

が成り立っていればよい。よって、

$$u_1=\frac{A\Omega}{2L(\Omega+2\omega_0)},\quad u_2=\frac{A\Omega}{2L(\Omega-2\omega_0)}. \tag{1.30}$$

このような u_1,u_2 が存在する条件は、

$$\Omega\neq\pm2\omega_0. \tag{1.31}$$

である。$\omega_0=\sqrt{g/L}$ から、

$$u_1=\frac{A\Omega}{2L(\Omega+2\sqrt{g/L})},\quad u_2=\frac{A\Omega}{2L(\Omega-2\sqrt{g/L})} \tag{1.32}$$

第 3 問

[1.1]

$$\pi R^2 L\,(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2} = h^3 L \tilde{Z}_1, \quad \tilde{Z}_1 = \frac{\pi R^2}{h^3}\,(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3/2} = \gamma R^2 (k_{\mathrm{B}} T)^{3/2} \tag{1.33}$$

[1.2]

$$Z_N = \frac{1}{N!}\frac{(\pi R^2 L)^N}{h^{3N}}\,(2\pi m k_{\mathrm{B}} T)^{3N/2} = \frac{L^N}{N!}\tilde{Z}_1^N \tag{1.34}$$

Stirling の公式から、

$$F \approx -N k_{\mathrm{B}} T \ln\left(L\tilde{Z}_1\right) + N k_{\mathrm{B}} T (\ln N - 1) \tag{1.35}$$

よって

$$\tilde{F} = -\nu k_{\mathrm{B}} T \left(\ln \tilde{Z}_1 - \ln \nu + 1\right) \tag{1.36}$$

[1.3]

$$P = -\frac{1}{2\pi R}\frac{\partial F}{\partial R} = \frac{\nu k_{\mathrm{B}} T}{2\pi R \tilde{Z}_1(T,R)}\frac{\partial}{\partial R}\tilde{Z}_1(T,R) \tag{1.37}$$

問 [1.1] の結果から、

$$P = \frac{\nu k_{\mathrm{B}} T}{\pi R^2} \tag{1.38}$$

[2.1]

$$\begin{aligned} &H_1 - \omega M_1 \\ &= \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - \omega(x p_y - y p_x) \\ &= \frac{1}{2m}(p_x + m\omega y)^2 + \frac{1}{2m}(p_y - m\omega x)^2 + \frac{1}{2m}p_z^2 - \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2) \end{aligned} \tag{1.39}$$

となる。この最小値は

$$-\frac{m\omega^2 R^2}{2}. \tag{1.40}$$

[2.2]

$$v_x(\boldsymbol{r}) = -\omega y, \quad v_y(\boldsymbol{r}) = \omega x. \tag{1.41}$$

[2.3]

$$2\pi \int_0^R \tilde{r} \exp\left(\frac{m\omega^2 \tilde{r}^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) \mathrm{d}\tilde{r} = \frac{2\pi k_\mathrm{B}T}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right] \tag{1.42}$$

から

$$\frac{1}{h^3 \tilde{Z}_1}(2\pi m k_\mathrm{B}T)^{3/2} \cdot \frac{2\pi k_\mathrm{B}T}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right] = 1 \tag{1.43}$$

となる。よって、

$$\tilde{Z}_1(T, R, \omega) = \frac{2\gamma(k_\mathrm{B}T)^{5/2}}{m\omega^2}\left[\exp\left(\frac{m\omega^2 R^2}{2k_\mathrm{B}T}\right) - 1\right] \tag{1.44}$$

[2.4]

$$\begin{aligned} P &= \frac{\nu k_\mathrm{B}T}{2\pi R}\frac{\partial}{\partial R}\ln \tilde{Z}_1(T, R, \omega) \\ &= \frac{\nu m\omega^2/2\pi}{1 - \exp(-m\omega^2 R^2/2k_\mathrm{B}T)} \end{aligned} \tag{1.45}$$

$T \to 0$ では

$$P = \frac{\nu m\omega^2}{2\pi}. \tag{1.46}$$

[2.5]

$\sqrt{x^2+y^2}=\tilde{r}$ とする。

$$
\begin{aligned}
I &= mN\int \mathrm{d}^3p \int_{-L/2}^{L/2}\mathrm{d}z\int_0^R 2\pi\,\mathrm{d}\tilde{r}\,\tilde{r}^3\rho(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) \\
&= mN\cdot\frac{k_{\mathrm{B}}T}{m\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\ln\tilde{Z}_1(T,R,\omega) \\
&= mN\cdot\left(-\frac{2k_{\mathrm{B}}T}{m\omega^2}+\frac{R^2}{1-\exp(-m\omega^2R^2/2k_{\mathrm{B}}T)}\right) \\
&= \frac{2N\varepsilon}{\omega^2(1-\exp(-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T))}-\frac{2Nk_{\mathrm{B}}T}{\omega^2}
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

[2.6]

$$
E=-N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\tilde{Z}_1=\frac{5}{2}Nk_{\mathrm{B}}T-\frac{N\varepsilon}{1-\exp(\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)}
\tag{1.48}
$$

また別解として、

$$
\begin{aligned}
E &= -\frac{1}{2}I(T)\omega^2+\frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T \\
&= \frac{5}{2}Nk_{\mathrm{B}}T-\frac{N\varepsilon}{1-\exp(-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)}
\end{aligned}
\tag{1.49}
$$

と計算しても良い。比熱は

$$
C_\omega=\frac{5}{2}Nk_{\mathrm{B}}-\frac{N\varepsilon^2}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{\exp(-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)}{(1-\exp(-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T))^2}
\tag{1.50}
$$

となる。高温極限では、

$$
C_\omega=\frac{5}{2}Nk_{\mathrm{B}}-\frac{N\varepsilon^2}{k_{\mathrm{B}}T^2}\frac{1}{(\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T)^2}=\frac{5}{2}Nk_{\mathrm{B}}-Nk_{\mathrm{B}}=\frac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}.
\tag{1.51}
$$

低温極限では、

$$
C_\omega=\frac{5}{2}Nk_{\mathrm{B}}.
\tag{1.52}
$$

第 4 問

[1.1]

外部電場に対し、

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \phi = -2(a+b+c) = 0 \tag{1.53}$$

となる。よって $a+b+c=0$。

[1.2]

$$m\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = -q\nabla\phi(\boldsymbol{r}(t)) + q\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B} \tag{1.54}$$

[1.3]

z 方向の運動方程式は、

$$m\ddot{z} = -2cqz \tag{1.55}$$

となる。この角振動数は、

$$\omega_z = \sqrt{\frac{2cq}{m}}. \tag{1.56}$$

[1.4]

$u = x + \mathrm{i}y$ とおくと、運動方程式は

$$m\ddot{u} = qcu - \mathrm{i}qB\dot{u} \tag{1.57}$$

と書ける。

[1.5]

xy 平面内の運動を解く。$u \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ とおくと、

$$m\omega^2 - qB\omega + qc = 0 \tag{1.58}$$

よって

$$\omega = \frac{qB \pm \sqrt{q^2B^2 - 4mqc}}{2m} \tag{1.59}$$

となる。束縛運動になるための条件は、

$$qB^2 - 4mc > 0. \tag{1.60}$$

[2.1]

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -2q\alpha x \cos\omega t \tag{1.61}$$

τ についての方程式に直すと

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{4}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{8q\alpha}{m\omega^2}x\cos 2\tau \tag{1.62}$$

となる。よって

$$\lambda = \frac{4q\alpha}{m\omega^2} \tag{1.63}$$

[2.2]

$$x(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cos[(2n+\Omega)\tau] \tag{1.64}$$

とおく。

$$2\lambda\cos 2\tau\cos[(2n+\Omega)\tau] = \lambda\cos[(2(n+1)+\Omega)\tau] + \lambda\cos[(2(n-1)+\Omega)\tau] \tag{1.65}$$

から、C_n が満たすべき漸化式は、

$$-(2n+\Omega)^2 C_n + \lambda(C_{n-1} + C_{n+1}) = 0 \tag{1.66}$$

である。

[2.3]

$0 < \lambda \ll 1$ のとき、C_{-1}, C_0, C_1 以外の寄与を無視すると、

$$C_1 = \frac{\lambda}{(\Omega+2)^2}C_0, \quad C_0 = \frac{\lambda}{\Omega^2}(C_{-1} + C_1), \quad C_{-1} = \frac{\lambda}{(\Omega-2)^2}C_0 \tag{1.67}$$

となる。よって、

$$\frac{C_{\pm 1}}{C_0} = \frac{\lambda}{(\Omega \pm 2)^2} \tag{1.68}$$

となる。$\Omega = \delta\lambda$ から、

$$\frac{C_{\pm 1}}{C_0} = \frac{\lambda}{4}, \quad \varepsilon = \frac{1}{4}. \tag{1.69}$$

この結果を代入すると、

$$1 = \frac{\lambda}{\Omega^2}(C_{-1} + C_1) = \frac{\lambda^2}{2\Omega^2} \tag{1.70}$$

となる。よって

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{1.71}$$

となる。

[2.4]

問 [2.3] の結果から、

$$\begin{aligned} x(\tau) &= C_0 \left(\cos\frac{\lambda\tau}{\sqrt{2}} + \frac{\lambda}{4}\cos\left[\left(2 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)t\right] + \frac{\lambda}{4}\cos\left[\left(2 - \frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)t\right]\right) \\ &= C_0 \left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos 2\tau\right)\cos\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}t\right) \end{aligned} \tag{1.72}$$

2　2021 年 (令和 3 年)

第 1 問

[1.1]

$$\hat{H} = -\mu \begin{pmatrix} B_0 & B_1 e^{-i\omega t} \\ B_1 e^{i\omega t} & -B_0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

である。また $\alpha(t), \beta(t)$ は

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

を満たす。

[1.2]

$a(t) = \alpha(t)e^{i\omega_0 t/2}$, $b(t) = \beta(t)e^{-i\omega_0 t/2}$ に対し、

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{i\omega_0 t/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_0 t/2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\omega-\omega_0)t} \\ e^{i(\omega-\omega_0)t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.3}$$

よって、

$$A(t) = e^{-i(\omega-\omega_0)t}. \tag{2.4}$$

[2.1]

$b(t) = 1$ と近似すると、

$$\frac{da}{dt} = -\frac{i\omega_1}{2}e^{-i(\omega-\omega_0)t} \tag{2.5}$$

となり、$a(0) = 0$ から

$$a(t) = \frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[e^{-i(\omega-\omega_0)t} - 1\right] \tag{2.6}$$

となる。よって、

$$P_1 = |a(\tau)|^2 = \frac{\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2}\sin^2\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} \tag{2.7}$$

[2.2]

$P_1(\omega)$ は $\omega=\omega_0$ で最大値 $\omega_1^2\tau^2/4$ をとる。またこの近傍で $P_1(\omega)=0$ となる角振動数は

$$\sin\left(\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\right)=0, \quad \omega=\omega_0\pm\frac{2\pi}{\tau} \tag{2.8}$$

で与えられる。

[3.1]

問 [2.1] と同様な議論から、$T<t<T+\tau$ において

$$a(t)=\frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}-C\right] \tag{2.9}$$

と書ける。C は定数である。ここで、磁場 $\boldsymbol{B}_0$ を印加したとき $a(t), b(t)$ が不変なことから

$$a(T)=a(\tau)=\frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}-1\right] \tag{2.10}$$

となる。よって

$$a(t)=\frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}\left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)T}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}-1\right] \tag{2.11}$$

となる。

$$a(T+\tau)=\frac{\omega_1}{2(\omega-\omega_0)}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)T}+1)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega-\omega_0)\tau}-1) \tag{2.12}$$

から、

$$P_2=|a(T+\tau)|^2=\frac{4\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2}\cos^2\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}\sin^2\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2} \tag{2.13}$$

[3.2]

$P_2(\omega)$ は $\omega=\omega_0$ で最大となる。また $\omega=\omega_0$ の近傍で $P_2(\omega)=0$ となるのは、$T\gg\tau$ に注意すると、

$$\cos\frac{(\omega-\omega_0)T}{2}=0 \tag{2.14}$$

のとき。よって、

$$\Omega_1=\omega_0-\frac{\pi}{T}, \quad \Omega_2=\omega_0+\frac{\pi}{T} \tag{2.15}$$

となる。

[3.3]

$$\mathit{\Delta}\mathit{\Omega} = \mathit{\Omega}_2 - \mathit{\Omega}_1 = \frac{2\pi}{T} \tag{2.16}$$

精度を改善するには、T を大きくすれば良い。

[4.1]

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\lambda L}{l}, \quad \frac{4\pi}{\tau} = \frac{2\lambda L}{D} \tag{2.17}$$

と対応づけられる。よって l が T に、D が τ に対応する。

[4.2]

時刻 t で測定すると、ほとんど $|-\rangle$ が測定される。よって時刻 t においてを $|-\rangle$ を初期状態としてよい。このとき位相を除いて問 [2.2] と同じ結果になる。つまり干渉が消える。

第 2 問

[1.1]

$$m\ddot{x}_n = -k(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) \tag{2.18}$$

[1.2]

$x_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qn} c_q(t)$ を [1.1] の結果に代入すると、

$$\ddot{c}_q(t) = -\frac{2k}{m}(1-\cos q)c_q = -\frac{4k}{m}\sin^2\frac{q}{2} \tag{2.19}$$

となる。

[1.3]

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{q}{2}\right| \tag{2.20}$$

[1.4]

$q = 0$ のとき、$c_q(t)$ についての微分方程式およびその解は、

$$\ddot{c}_0(t) = 0, \quad c_0(t) = At + B \tag{2.21}$$

となる。ただし A, B は定数である。

[2.1]

$|n| > 0$ については [1.1] と同様。すなわち、

$$m\ddot{x}_n = -k(2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) \tag{2.22}$$

となる。$n = 0$ については、

$$M\ddot{x}_0 = -k(2x_0 - x_1 - x_{-1}) \tag{2.23}$$

となる。

[2.2]

$n \le -2$ あるいは $n \ge +1$ に対しては、運動方程式は [1.1] と同様である。これに $x_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}qn - \mathrm{i}\omega_q t}$ を代入すると、[1.3] と同様な議論から

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{q}{2}\right| \tag{2.24}$$

となる。また $x_n(t)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qn - \mathrm{i}\omega_q t}$ を代入しても同じ結果を得る。さらに $x_n(t)$ としてこれらの線形結合をとっても問題ない。よって (1) 式に対して ω_q の表式は [1.3] と同じである。

[2.3]

$n = 0, -1$ に対する運動方程式

$$-M\ddot{x}_0 = -k(2x_0 - x_1 - x_{-1}) \tag{2.25}$$
$$-m\ddot{x}_{-1} = -k(2x_{-1} - x_0 - x_{-2}) \tag{2.26}$$

に (1) 式を代入すると、

$$(2k - M\omega_q^2)T_q = k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}T_q + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} + R_q\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}) \tag{2.27}$$
$$(2k - m\omega_q^2)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} + R_q\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}) = k(T_q + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}q} + R_q\mathrm{e}^{2\mathrm{i}q}) \tag{2.28}$$

となる。整理すると、

$$\left(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - \frac{4M}{m}\sin^2\frac{q}{2}\right)T_q - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}R_q = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}, \tag{2.29}$$
$$T_q - R_q = 1 \tag{2.30}$$

となる。

[2.4]

[2.3] の 2 つ目の式から $R_q = T_q - 1$ となる。これを 1 つ目の式に代入すると、

$$\left(2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - \frac{4M}{m}\sin^2\frac{q}{2}\right)T_q = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} \tag{2.31}$$

よって、

$$\begin{aligned} T_q &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{2 - 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - (M/m)(2 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q})} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{2(1 - M/m) + (M/m)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - (2 - M/m)\mathrm{e}^{\mathrm{i}q}} \end{aligned} \tag{2.32}$$

[2.5]

$M = m$ では

$$T_q = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}} = 1 \tag{2.33}$$

これは $M = m$ では波が全て透過し、反射が起こらないことを表している。次に、$M = +\infty$ では、

$$T_q = 0 \tag{2.34}$$

となる。これは透過が起こらず、全反射が起こることを表している。

[3.1]

$$\det\left[\begin{pmatrix} T_q & R_q \\ R_q & T_q \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 0 \tag{2.35}$$

となるから、

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}qL} - 2T_q\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} + T_q^2 - R_q^2 \\ &= (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} - T_q - R_q)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} - T_q + R_q) = 0 \end{aligned} \tag{2.36}$$

となる。よって、

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} = T_q \pm R_q = 2T_q - 1, 1 \tag{2.37}$$

[3.2]

$M = m$ の場合、$T_q = 1$，$R_q = 0$ となる。このとき、

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qL} = 1 \tag{2.38}$$

から

$$q = \frac{2l\pi}{L}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{2.39}$$

となる。このとき、

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}}\left|\sin\frac{l\pi}{L}\right| \tag{2.40}$$

[3.3]

$M=2m$ の場合、

$$T_q = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{-2 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}} \tag{2.41}$$

となる。よって、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qL} = 1, \tag{2.42}$$

または、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qL} = 2T_q - 1 = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}}{-1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}q}. \tag{2.43}$$

ここから

$$q = \frac{2l\pi}{L}, \frac{2l\pi}{L-1}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{2.44}$$

となる。また、

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}} \left| \sin \frac{l\pi}{L} \right|, \quad \sqrt{\frac{4k}{m}} \left| \sin \frac{l\pi}{L-1} \right| \tag{2.45}$$

である。$0 < q < \pi$ から基準振動の総数は、

$$0 < l < \frac{L}{2}, \quad 0 < l < \frac{L-1}{2} \tag{2.46}$$

となる整数 l の数の和で与えられる。よって

$$\left(\frac{L}{2} - 1\right) + \left(\frac{L}{2} - 1\right) = L - 2. \tag{2.47}$$

これは L よりも 2 個モードが少ない。1 個のモードは並進運動の自由度を表す。もう 1 個のモードは $n=0$ の質点のまわりに束縛されている。

[3.4]

$M \to \infty$ の場合、固定端の問題と同じ。$T_q = 0$ から、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}qL} = \pm 1 \tag{2.48}$$

よって

$$q = \frac{l\pi}{L}, \quad l \in \mathbb{Z} \tag{2.49}$$

であり、振動モードの数は L 個。(固定端だから並進運動できない。) また、

$$\omega_q = \sqrt{\frac{4k}{m}} \left| \sin \frac{l\pi}{2L} \right| \tag{2.50}$$

第 3 問

[1]

$$N_{AB} = N_A \cdot z \cdot \frac{N_B}{N} = Nzx(1-x) \tag{2.51}$$

$$E = NVzx(1-x) \tag{2.52}$$

[2]

$$\begin{aligned} S &= k_\mathrm{B} \log \frac{N!}{N_A! N_B!} \\ &= -k_\mathrm{B} N_A \log \frac{N_A}{N} - k_\mathrm{B} N_B \log \frac{N_B}{N} \\ &= -k_\mathrm{B} N [x \log x + (1-x) \log(1-x)] \end{aligned} \tag{2.53}$$

[3]

$$F = E - TS = NVzx(1-x) + k_\mathrm{B} NT [x \log x + (1-x) \log(1-x)] \tag{2.54}$$

[4]

$$f(x) = Vzx(1-x) + k_\mathrm{B} T [x \log x + (1-x) \log(1-x)] \tag{2.55}$$

から、$f(x)$ 極値をとる x では

$$f'(x) = -Vz(2x-1) + k_\mathrm{B} T (\log x - \log(1-x)) = 0 \tag{2.56}$$

となる。よって、

$$\frac{zV}{k_\mathrm{B} T}(2x-1) = g(x) = \log \frac{x}{1-x} \tag{2.57}$$

[5]

両辺の $x = 1/2$ における傾きが一致するとき、

$$\frac{2zV}{k_\mathrm{B}T} = \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right]_{x=1/2} = 4 \tag{2.58}$$

となる。よって、

$$T_{c0} = \frac{zV}{2k_\mathrm{B}} \tag{2.59}$$

[6]

両辺はどちらも $x = 1/2$ を軸として奇関数になっている。また $g(0) = -g(1) = \infty$ である。$T < T_{c0}$ では (2) 式の解が 3 つ現れ、$T > T_{c0}$ では (2) 式の解は 1 つだけである。これらを図示すれば良い。

[7]

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2zV + k_\mathrm{B}T\left[\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right] \\ &= -2zV + \frac{k_\mathrm{B}T}{x - x^2} = 0 \end{aligned} \tag{2.60}$$

から、

$$x^2 - x + \frac{k_\mathrm{B}T}{2zV} = 0. \tag{2.61}$$

よって

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_\mathrm{B}T}{2zV}}, \quad \delta_1 = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_\mathrm{B}T}{2zV}} \tag{2.62}$$

[8]

省略。$f'(0) = -\infty, f'(1) = \infty$ に気を付ける。(対数発散なので、グラフにすると大したことない。) $f(x)$ の極値が $1/2 - \delta_0, 0, 1/2 + \delta_0$ であり、極値の間に $1/2 \pm \delta_1$ がある。

[9]

よくある、$T < T_{c0}$ で二価な関数が $T = T_{c0}$ で合流してゼロになるようなグラフを δ_0, δ_1 のそれぞれについて描く。$\delta_0(T_{c0}) = \delta_1(t_{c0}) = 0$、$\delta_0(T=0) = \delta_1(T=0) = 1/2$ および $0 < T < T_{c0}$ で $|\delta_0(T)| > |\delta_1(T)|$ となることに注意する。

[10]

$$sx_1 + (1-s)x_2 = x_0 \tag{2.63}$$

より、

$$s = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} \tag{2.64}$$

[11]

$$f^* = sf(x_1) + (1-s)f(x_2) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_2}f(x_2) \tag{2.65}$$

[12]

$x_1 = x_0 - \delta, x_2 = x_0 + \delta$ とすると、

$$\begin{aligned}
f^* &= \frac{1}{2}f(x_0 - \delta) + \frac{1}{2}f(x_0 + \delta) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x_0) - \delta f'(x_0) + \frac{\delta^2}{2}f''(x_0)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x_0) + \delta f'(x_0) + \frac{\delta^2}{2}f''(x_0)\right) + \mathcal{O}(\delta^3) \\
&= f(x_0) + \frac{1}{2}\delta^2 f''(x_0) + \mathcal{O}(\delta^3)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

となる。よって $f^* > f(x_0)$ となるための条件は、

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0 \tag{2.67}$$

[13]

高温側が (I)、δ_0 と δ_1 に囲まれている領域が (II)、δ_1 に囲まれている領域が (III)。

第 4 問

[1.1]

$$m\ddot{\boldsymbol{x}}(t) = -q\boldsymbol{E}_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} - m\omega_0^2 \boldsymbol{x}(t) - m\gamma \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2.68}$$

[1.2]

$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ とすると、

$$-m\omega^2 \boldsymbol{x}_0 = -q\boldsymbol{E}_0 - m\omega_0^2 \boldsymbol{x}_0 + \mathrm{i}m\gamma\omega\boldsymbol{x}_0 \tag{2.69}$$

よって、

$$\boldsymbol{x}_0 = \frac{-q\boldsymbol{E}_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}\gamma\omega]} \tag{2.70}$$

[1.3]

$$\boldsymbol{P}_0 = -Nq\boldsymbol{x}_0 = \frac{Nq^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) - \mathrm{i}\gamma\omega]} \boldsymbol{E}_0 = \epsilon_0 \chi \boldsymbol{E}_0 \tag{2.71}$$

よって、

$$\chi = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) + \mathrm{i}\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{2.72}$$

である。

$$\chi_R = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \chi_I = \frac{Nq^2}{\epsilon_0 m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{2.73}$$

[1.4]

χ_R の符号は $\omega < \omega_0$ で正、$\omega > \omega_0$ で負となる。また $|\omega - \omega_0| \sim \gamma$ を境にゼロに減衰していく。

[2.1]

$$E_0 \exp(\mathrm{i}k \sin\theta_0 x) + E_m \exp(\mathrm{i}K_{mx} x) = E_t \exp(\mathrm{i}K_{tx} x) \tag{2.74}$$

[2.2]

[2.1] の結果が任意の x で成り立つことから、

$$K_{mx} = K_{tx} = k \sin\theta_0 \tag{2.75}$$

[2.3]

波動方程式は、

$$(\nabla^2 - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2})(\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_m) = \boldsymbol{0}, \quad \left(\nabla^2 - (1+\chi)\epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{0}. \tag{2.76}$$

ここから、

$$k^2 = K_{mx}^2 + K_{mz}^2 = \epsilon_0\mu_0\omega^2, \quad K_{tx}^2 + K_{tz}^2 = (1+\chi)\epsilon_0\mu_0\omega^2 \tag{2.77}$$

[2.4]

$$K_{mz} = k\cos\theta_0 \tag{2.78}$$

[2.5]

$\theta_0 = \theta_c$ において、

$$K_{tz}^2 = (1+\chi)\epsilon_0\mu_0\omega^2 - k^2\sin^2\theta_c = k^2(1+\chi-\sin^2\theta_c) \tag{2.79}$$

となる。よって、

$$\theta_c = \arcsin\left(\sqrt{1+\chi}\right) \tag{2.80}$$

である。$\theta_0 > \theta_c$ のとき、z 軸負方向に伝播していくことに注意して、

$$K_{tz} = -k\sqrt{1+\chi-\sin^2\theta_0}\,. \tag{2.81}$$

$\theta_0 < \theta_c$ のとき、z 軸負方向に減衰していくことに注意して、

$$K_{tz} = \mathrm{i}k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} \tag{2.82}$$

[2.6]

誘電体内での振幅は $\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_{tz}z} = \mathrm{e}^{-k\sqrt{\sin^2\theta_0-(1+\chi)}z}$ から

$$z_0 = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta_0-(1+\chi)}} = \frac{1}{k\sqrt{-\chi-\cos^2\theta_0}} \tag{2.83}$$

これは $\cos^2\theta_0 \to -\chi$ で発散する。

3　2020 年 (令和 2 年)

第 1 問

$\hbar = 1$ とおく。

[1]

$$\hat{U}(t - t_0) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H(t-t_0)} \tag{3.1}$$

[2]

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^A)^\dagger &= \left(1 + A + \frac{A^2}{2} + \cdots\right)^\dagger \\ &= 1 + A^\dagger + \frac{(A^\dagger)^2}{2} + \cdots \\ &= \mathrm{e}^{A^\dagger}\end{aligned} \tag{3.2}$$

より、

$$\hat{U}(t - t_0)^\dagger = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}^\dagger(t-t_0)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\hat{H}(t-t_0)} = \hat{U}(t - t_0)^{-1} \tag{3.3}$$

よって $\hat{U}$ はユニタリー。

[3]

設問 [2] の結果から、

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\hat{U}(t - t_0)^\dagger\hat{U}(t - t_0)|\psi(t_0)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle \tag{3.4}$$

で時間に依存しない。

[4]

$$\hat{U}(\tau) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\hat{\sigma}_z\tau} = \cos(a\tau)\hat{1} - \mathrm{i}\sin(a\tau)\hat{\sigma}_z \tag{3.5}$$

[5]

$$\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi t/\tau} \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

とすると、

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{U}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-\phi/\tau)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi t/\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\phi/\tau \end{pmatrix}\hat{U}(t) \tag{3.7}$$

となるから、

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\phi/\tau \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

[6]

$\hat{U}_{\mathrm{NOT}}(\tau) = \hat{\sigma}_x$ としたい。ここで、

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi\hat{\sigma}_x/2} = \hat{\sigma}_x \tag{3.9}$$

に注目すると、

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{\mathrm{i}\pi t}{2\tau}\hat{1} + \frac{\mathrm{i}\pi t}{2\tau}\hat{\sigma}_x\right) \tag{3.10}$$

とすれば良い。よって、

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2\tau}(\hat{1} - \hat{\sigma}_x) = \frac{\pi}{2\tau}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.11}$$

とすればよい。

[7]

$(\sin\theta\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z)^2 = 1$ より、

$$\begin{aligned} &\exp\Big(-\mathrm{i}a\tau[\sin\theta\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z] - \mathrm{i}b\tau\hat{1}\Big) \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}b}\left(\cos(a\tau)\hat{1} - \mathrm{i}\sin(a\tau)[\sin\theta\cos\phi\hat{\sigma}_x + \sin\theta\sin\phi\hat{\sigma}_y + \cos\theta\hat{\sigma}_z]\right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

[8]

$$\hat{U}_{\mathrm{H}} = \frac{\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x}{\sqrt{2}} \tag{3.13}$$

より、[6] と同じ議論によって、

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2\tau}\left\{\hat{1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right\} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,\tau}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}-1 \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

[9]

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\phi/\tau \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

[10]

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2\tau}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

第 2 問

[1]

質量、長さ、時間の次元をそれぞれ M, L, T で表す。左辺の次元は

$$\frac{M}{L^3}L^3\frac{L}{T^2}=\frac{ML^2}{T^2} \tag{3.17}$$

となり、右辺の次元は

$$\frac{ML}{T^2L^3}L^3=\frac{ML^2}{T^2} \tag{3.18}$$

となるから両辺の次元は一致する。

[2]

下面で接する 2 つの体積素の間での作用・反作用の法則から、下面に働く応力は $-\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}'', t)$ となる。

[3]

体積素が x_k 軸に直交する 2 つの面から受ける x_1 方向の力の合計は

$$p_1^{(k)}\left(\boldsymbol{x}+\frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_x\right)-p_1\left(\boldsymbol{x}-\frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_x\right)\approx\frac{\partial p_1^{(k)}}{\partial x_k} \tag{3.19}$$

となる。よってこれを $k=1,2,3$ について足し合わせると

$$F_1(\boldsymbol{x},t)=\sum_{k=1,2,3}\frac{\partial p_1^{(k)}}{\partial x_k} \tag{3.20}$$

を得る。

[4]

$$\begin{aligned}\rho\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}=F_j&=\sum_{k,m,n}\frac{1}{2}c_{jkmn}\partial_k(\partial_n u_m+\partial_m u_n)\\&=\sum_k(\lambda\partial_j\partial_k u_k+\mu\partial_k(\partial_j u_k+\partial_k u_j))\end{aligned} \tag{3.21}$$

から、

$$\rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}). \tag{3.22}$$

よって $A = \lambda + \mu$

[5]

$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{u}_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \mathrm{i}\omega t)$ とおく。縦波の場合、$\boldsymbol{k} \propto \boldsymbol{u}_0$ から

$$-\rho\omega^2 \boldsymbol{u}_0 = -\mu \boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{u}_0 - (\lambda + \mu)\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}_0), \quad \rho\omega^2 = (\lambda + 2\mu)k^2. \tag{3.23}$$

よって位相速度は

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{3.24}$$

となる。次に横波の場合、$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u}_0 = 0$ から

$$\rho\omega^2 \boldsymbol{u}_0 = -\mu \boldsymbol{k}^2. \tag{3.25}$$

よって位相速度は

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \tag{3.26}$$

[6]

$$\boldsymbol{u}_{t0} = u_t \begin{pmatrix} -\cos\alpha_t \\ \sin\alpha_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}'_{t0} = u'_t \begin{pmatrix} \cos\alpha'_t \\ \sin\alpha'_t \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{k}_t = k_t \begin{pmatrix} \sin\alpha_t \\ \cos\alpha_t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}'_t = k'_t \begin{pmatrix} \sin\alpha'_t \\ -\cos\alpha'_t \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

とおける。境界条件から、

$$p_1^{(2)} = \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = 0 \tag{3.29}$$

である。これを計算すると、

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ &= -\mathrm{i}u_t k_t \cos 2\alpha_t \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_t x \sin\alpha_t - \mathrm{i}\omega_t t} - \mathrm{i}u'_t k'_t \cos 2\alpha'_t \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_t x \sin\alpha'_t - \mathrm{i}\omega_t t} = 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

u_t, k_t, u'_t, k'_t は全てゼロではないので、x, t によらずこれがゼロになるためには、

$$\omega_t = \omega'_t, \quad k'_t \sin\alpha'_t = k_t \sin\alpha_t \tag{3.31}$$

が必要。$\omega_t = \omega'_t$ から $k_t = k'_t$ なので、

$$\omega_t = \omega'_t, \quad \alpha_t = \alpha'_t \tag{3.32}$$

が分かる。

[**7**]

$$p_2^{(2)} = \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u} + 2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \tag{3.33}$$

とする。横波なので、$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$ としてよく、

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \sin\alpha_t\cos\alpha_t(u'_t - u_t) = 0 \tag{3.34}$$

となる。$\alpha_t \neq 0, \pi$ から、$u'_t = u_t$ が分かる。この結果を $p_1^{(2)} = 0$ に代入すると、

$$\cos 2\alpha_t = 0 \tag{3.35}$$

が分かる。よって求める角度は $\alpha_t = \pi/4$。

[**8**]

縦波について、

$$\boldsymbol{u}'_l(x,t) = \mathrm{Re}[\boldsymbol{u}'_{l0}\exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{k}'_l\cdot\boldsymbol{x} - \omega'_l t))] \tag{3.36}$$

とおく。

$$\boldsymbol{u}'_{l0} = u'_l\begin{pmatrix}\sin\alpha'_l\\-\cos\alpha'_l\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{k}'_l = k'_l\begin{pmatrix}\sin\alpha'_l\\-\cos\alpha'_l\end{pmatrix} \tag{3.37}$$

とおける。境界条件から

$$\lambda k'_l u'_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}k'_l\sin(\alpha'_l)x - \mathrm{i}\omega'_l t} + 2\mu\sin\alpha_t\cos\alpha_t(u'_t - u_t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_t\sin(\alpha_t)x - \mathrm{i}\omega_t t} = 0 \tag{3.38}$$

$k'_l \neq 0, u'_l \neq 0$ であり、上の式が任意の x について成り立つことから、

$$k'_l\sin\alpha'_l = k_t\sin\alpha_t \tag{3.39}$$

となる。

第 3 問

[1.1]

固有状態は、

$$\psi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}) \tag{3.40}$$

で表される。ここで

$$\left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^3 \tag{3.41}$$

であるから、運動量空間の単位体積あたりの固有状態の数は、

$$\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \tag{3.42}$$

[1.3]

$\epsilon = p^2/2m$ から、

$$\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 \cdot 4\pi p^2 \, \mathrm{d}p = D(\epsilon) \, \mathrm{d}\epsilon \tag{3.43}$$

より、

$$D(\epsilon) = 4\pi m \sqrt{2m\epsilon} \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{mL^2}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \epsilon^{1/2}. \tag{3.44}$$

[1.3]

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{1/2}}{\mathrm{e}^{\epsilon/T} - 1} \, \mathrm{d}\epsilon &= T^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{\mathrm{e}^x - 1} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) T^{3/2} \end{aligned} \tag{3.45}$$

したがって、

$$\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{mL^2 T_c}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = N \tag{3.46}$$

$$T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \zeta\left(\frac{3}{2}\right)^{-2/3} \left(\frac{N}{L^3}\right)^{2/3} \tag{3.47}$$

[1.4]

$$N - N_0 = \zeta\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{mL^2T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} = \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2} N \tag{3.48}$$

$$N_0 = \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right] N \tag{3.49}$$

[1.5] 2 次元の場合、

$$D(\epsilon) = D = \text{const.} \tag{3.50}$$

と書けるから、

$$\begin{aligned} N &= \int_0^\infty \frac{D}{\mathrm{e}^{(\epsilon-\mu)/T} - 1}\,\mathrm{d}\epsilon \\ &= \int_0^\infty \frac{D\mathrm{e}^{-(\epsilon-\mu)/T}}{1 - \mathrm{e}^{-(\epsilon-\mu)/T}}\,\mathrm{d}\epsilon \\ &= \left[DT\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-(\epsilon-\mu)/T}\right)\right]_{\varepsilon=0}^{\infty} \\ &= -DT\ln\left(1 - \mathrm{e}^{\mu/T}\right) \end{aligned} \tag{3.51}$$

となる。これは $\mu \to -0$ とすればいくらでも大きくなるので、BEC は起こらない。

[2.1]

エネルギーが ϵ 以下になる状態数を $N(\epsilon)$ と書くと、

$$\hbar\omega\frac{\mathrm{d}N(\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon} \approx N(\epsilon + \hbar\omega) - N(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\hbar\omega} + 2 \approx \frac{\epsilon}{\hbar\omega} \tag{3.52}$$

である。ただし、$\epsilon/\hbar\omega \gg 1$ を仮定し、$\epsilon/\hbar\omega$ の 0 次の項を無視した。ここから、

$$D(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(\hbar\omega)^2} \tag{3.53}$$

となる。

[2.2]

$T = T_c$ において、

$$\int_0^\infty \frac{\epsilon/(\hbar\omega)^2}{\mathrm{e}^{\epsilon/T_c} - 1}\,\mathrm{d}\epsilon = N \tag{3.54}$$

が成り立つ。与えられた公式から、

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\epsilon/(\hbar\omega)^2}{\mathrm{e}^{\epsilon/T_c}-1}\,\mathrm{d}\epsilon &= \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2 \int_0^\infty \frac{x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2 = N
\end{aligned}
\tag{3.55}
$$

となるので、

$$
T_c = \frac{\sqrt{6}\,\hbar\omega}{\pi} N^{1/2} \tag{3.56}
$$

[2.3]

$\omega \propto L_0^{-1}$ より、

$$
\omega N^{1/2} \propto \frac{N^{1/2}}{L_0} = \mathrm{const.} \tag{3.57}
$$

を満たせば良い。

[2.4]

$$
N - N_0 = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T}{\hbar\omega}\right)^2 = \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 N \tag{3.58}
$$

より、

$$
N_0 = \left[1-\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right] N \tag{3.59}
$$

第 4 問

[1]

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\left[\left(r^2 - lr\cos\theta + \frac{l^2}{4}\right)^{-1/2} - \left(r^2 + lr\cos\theta + \frac{l^2}{4}\right)^{-1/2}\right]$$
$$= \frac{q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{l}{r^2}\cos\theta \tag{3.60}$$

$q(t)l = \alpha E_0$

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\alpha E_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left\{0\cdot\frac{1}{r} + 1\cdot\frac{1}{r^2}\right\} \tag{3.61}$$

$$C = 0, \quad D = 1 \tag{3.62}$$

[2]

$$r_\pm \approx r - \frac{l}{2}\cos\theta \tag{3.63}$$

より、

$$q(t - r_\pm/c)l \approx \alpha E_0\cos\left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 r}{c} \pm \frac{l\omega_0\cos\theta}{2c}\right)$$
$$\approx \alpha E_0\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \mp \alpha E_0\sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\frac{l\omega_0\cos\theta}{2c} \tag{3.64}$$

これを代入すると、

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) \approx \frac{\alpha E_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\frac{1}{r^2} - \sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)\frac{\omega_0}{cr}\right] \tag{3.65}$$

$$F = -\frac{\omega_0}{c}\sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right), \quad G = \cos\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \tag{3.66}$$

[3]

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\mathrm{d}p(t - \frac{r}{c})}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_z$$
$$= -\frac{\alpha_0 E_0\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\left(\omega_0\left(t - \frac{r}{c}\right)\right)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta) \tag{3.67}$$

[4]

　$1/r^2$ に比例する項を無視すると、

$$\nabla \frac{F \cos\theta}{r} \approx \frac{\cos\theta}{r} \nabla F = \frac{\omega_0^2 \cos\theta}{c^2 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_r \tag{3.68}$$

となる。よって、

$$\nabla \varphi = \frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_r \tag{3.69}$$

[5]

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) (\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta) \tag{3.70}$$

から、

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_\theta \tag{3.71}$$

次に $\boldsymbol{B}$ を求める。$1/r^2$ に比例する項を無視すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} &\approx -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r} \nabla \sin\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \times (\cos \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta) \\ &= \frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r} \cos\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_\phi \end{aligned} \tag{3.72}$$

[6]

$$\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} = \frac{(\alpha_0 E_0 \omega_0^2)^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3 r} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \cos^2\left(\omega_0 \left(t - \frac{r}{c}\right)\right) \boldsymbol{e}_r \tag{3.73}$$

$|\boldsymbol{S}|$ は ϕ によらず、θ に対しては

$$|\boldsymbol{S}| \propto \sin^2\theta \tag{3.74}$$

となる。

[**7**]

$$\alpha(t)=\alpha_0+\alpha_1\cos\omega_v t,\quad \alpha'(t)=-\omega_v\alpha_1\sin\omega_v t \tag{3.75}$$

から、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}&=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\mathrm{d}^2 p(t-r/c)}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}_z\\&=-\frac{\alpha(t)E_0\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_z\\&\quad-\frac{2\alpha'(t)E_0\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_z\\&\quad+\frac{\alpha''(t)E_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{3.76}$$

よって、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}=\frac{E_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}&\left[\alpha(t)\omega_0^2\sin\theta\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_\theta\right.\\&\left.+2\alpha'(t)\omega_0\sin\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_z-\alpha''(t)\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_z\right]\end{aligned} \tag{3.77}$$

これは

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}&=\frac{\alpha(t)E_0\omega_0^2\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\boldsymbol{e}_\theta\\&\quad+\frac{\alpha_1 E_0\omega_v}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\left[-2\omega_0\sin(\omega_v t)\sin\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)+\omega_v\cos(\omega_v t)\cos\left(\omega_0\left(t-\frac{r}{c}\right)\right)\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{3.78}$$

と書けるから、散乱された電磁波の角振動数は $\omega_0, \omega_0\pm\omega_v$ である。

4　2019 年 (令和 1 年)

第 1 問

[1.1]

簡単のため、$x_0 = x_{N+1} = 0$ とおく。運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_i(t) = -k(x_i - x_{i+1}) - k(x_i - x_{i-1}) = -k(2x_i - x_{i+1} - x_{i-1}) \tag{4.1}$$

となるので、

$$K = \begin{pmatrix} 2k & -k & & & \\ -k & 2k & -k & & \\ & -k & 2k & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -k \\ & & & -k & 2k \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

[1.2]

固有ベクトルは

$$(\boldsymbol{u}_l)_n = \frac{N_l}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_l n} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_l n}\right) \tag{4.3}$$

と書ける。この式は、$(\boldsymbol{u}_l)_0 = (\boldsymbol{u}_l)_{N+1} = 0$ を満たす。これに K を作用させると、

$$K\boldsymbol{u}_l = 2k\boldsymbol{u}_l - k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_l} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_l})\boldsymbol{u}_l = 2k(1 - \cos q_l) \tag{4.4}$$

となる。したがって、固有値は $2k\,(1 - \cos q_l)$ である。次に、規格化定数を求める。これは

$$\sum_{l=0}^{N}[(\boldsymbol{u}_l)_n]^2 = 1 \tag{4.5}$$

となるように定めるべきなので、

$$N_l = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \tag{4.6}$$

となる。ただし、ベクトル

$$|l\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}q_l n}, \quad |-l\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}q_l n} \tag{4.7}$$

がどちらも規格化されていることと、これらが直交する事実から、

$$\left| \frac{|l\rangle + |-l\rangle}{\sqrt{2}} \right|^2 = 1 \tag{4.8}$$

となることを用いた。

[1.3]

運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{x}(t) = -\frac{K}{m}\boldsymbol{x}(t) \tag{4.9}$$

から、

$$\sum_l \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\alpha_l(t)\boldsymbol{u}_l = -\sum_l \alpha_l \frac{K}{m}\boldsymbol{u}_l = -\sum_l \frac{2k}{m}(1-\cos q_l)\alpha_l \boldsymbol{u}_l \tag{4.10}$$

となる。$\boldsymbol{u}_l$ が完全系を張ることに注意して、

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\alpha_l(t) = -\frac{2k}{m}(1-\cos q_l)\alpha_l(t) \tag{4.11}$$

を得る。よって

$$\omega_l = \sqrt{\frac{2k}{m}(1-\cos q_l)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\frac{q_l}{2}\right| \tag{4.12}$$

[1.4]

省略。massless な線形分散が図示できれば OK

[2.1]

釣り合いの式から、

$$\boldsymbol{f} - K\boldsymbol{x} = 0 \tag{4.13}$$

となるので、

$$\beta_l - m\omega_l^2\alpha_l = 0, \quad \frac{\alpha_l}{\beta_l} = \frac{1}{m\omega_l^2} \tag{4.14}$$

[2.2]

$1/m\omega_l^2$ が最大となる l を求める。

$$m\omega_l^2 = 4k\sin^2\frac{q_l}{2} \tag{4.15}$$

より、これは $l = 1, N$ となるときに最小となる。

$$q_l = \frac{\pi l}{N+1} \tag{4.16}$$

より、$N \gg 1$ では

$$\frac{1}{m\omega_1^2} \approx \frac{1}{4k}\left(\frac{\pi}{2(N+1)}\right)^{-2} = \frac{(N+1)^2}{\pi^2 k} \tag{4.17}$$

である。

[3.1]

x_n についての運動方程式の右辺に $-k_0 x_n$ という項が追加されるので、

$$K \to K + k_0 I \tag{4.18}$$

となる。固有値は全て k_0 だけ増加し、固有ベクトルは不変。

[3.2]

$$m\omega_l^2 = 2k(1-\cos q_l) + k_0 = 4k\sin^2\frac{q_l}{2} + k_0 \tag{4.19}$$

より、

$$\omega_l = \sqrt{\frac{1}{m}\left(4\sin^2\frac{q_l}{2} + k_0\right)} \tag{4.20}$$

となる。$N \to \infty$ において最小の ω_l は、$q_l \to 0$ によって得られるので、

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \tag{4.21}$$

[3.3]

省略。massive な分散関係を図示すれば OK

第 2 問

[1]

Maxwell eq. に複素数表示の平面波解を代入すると、

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \omega \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = -\omega \mu_0 \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{E} \tag{4.22}$$

が得られる。したがって、

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) = \omega \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B} = -\omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{E} \tag{4.23}$$

が得られる。指数関数部分を取り除くと、

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) = -\omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{E}_0 \tag{4.24}$$

を得る。

[2]

[1] の結果を整理すると、

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) = \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0) - \boldsymbol{k}^2 \boldsymbol{E}_0 = -\omega^2 \mu_0 \tilde{\varepsilon} \boldsymbol{E}_0 \tag{4.25}$$

したがって、

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k_y^2 - k_z^2 & k_x k_y & k_x k_z \\ k_x k_y & \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k_x^2 - k_z^2 & k_y k_z \\ k_x k_z & k_y k_z & \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 - k_x^2 - k_y^2 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

と定義すれば、[1] の結果は $\tilde{X}\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{0}$ と書ける。

[3]

$\boldsymbol{k} = (0, k\sin\theta, k\cos\theta)^{\mathrm{T}}$ を代入すると、

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k^2 \cos^2\theta & k^2 \cos\theta \sin\theta \\ 0 & k^2 \cos\theta \sin\theta & \omega^2 \mu_0 \varepsilon_2 - k^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

となる。$\tilde{X}\boldsymbol{E}_0 = 0$ が非自明な解を持つためには、$\det \tilde{X} = 0$ が必要。したがって、

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_1 - k^2 = 0 \tag{4.28}$$

または、

$$\begin{aligned}&\left(\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2\cos^2\theta\right)\left(\omega^2\mu_0\varepsilon_2-k^2\sin^2\theta\right)-k^4\cos^2\theta\sin^2\theta\\&=\omega^4\mu_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2-k^2\omega^2\mu_0(\varepsilon_1\sin^2\theta+\varepsilon_2\cos^2\theta)=0\end{aligned}\tag{4.29}$$

である。したがってそれぞれの場合に、

$$k_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}\,,\quad k_2=\omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1\sin^2\theta+\varepsilon_2\cos^2\theta)}}\tag{4.30}$$

となる。

[4]

$k=k_1$ に対しては明らかに $(1,0,0)^{\mathrm{T}}\in\operatorname{Ker}\tilde{X}$ だから、$\boldsymbol{E}_0=(E_0,0,0)^{\mathrm{T}}$ とすればよい。$k=k_2$ に対しては、

$$\begin{pmatrix}\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_2^2\cos^2\theta & k_2^2\cos\theta\sin\theta\\ k_2^2\cos\theta\sin\theta & \omega^2\mu_0\varepsilon_2-k_2^2\sin^2\theta\end{pmatrix}\tag{4.31}$$

のカーネルの元を見つければよい。これを仮に $(1,a)^{\mathrm{T}}$ とおくと、

$$(\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_2^2\cos^2\theta)+ak_2^2\cos\theta\sin\theta=0\tag{4.32}$$

よって、

$$\begin{aligned}a&=-\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_1k_2^{-2}-\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\\&=-\frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\sin^2\theta+\cos^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\\&=-\frac{\varepsilon_1\sin\theta}{\varepsilon_2\cos\theta}\end{aligned}\tag{4.33}$$

となる。規格化すると、

$$\boldsymbol{E}_0=\frac{E_0}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta+\varepsilon_2^2\cos^2\theta}}\begin{pmatrix}0\\ \varepsilon_2\cos\theta\\ -\varepsilon_1\sin\theta\end{pmatrix}\tag{4.34}$$

[5]

電場が x 成分のみを持つのは $k=k_1$ の場合。Poynting ベクトルは

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{E}\times(\mu_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E})=\mu_0\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{k}-\mu_0(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}\tag{4.35}$$

と書ける。$k=k_1$ の場合、$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k}\propto\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}=0$ であるから、第 2 項が消えて $\boldsymbol{S}\propto\boldsymbol{k}$ となる。つまり光線は入射後も直進する。

[6]

電場が x 成分のみを持つのは $k = k_2$ の場合。このとき $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} \propto \boldsymbol{e}_x = (1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ だから、

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times (\mu_0 \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}) \propto \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{e}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1 \sin\theta \\ \varepsilon_2 \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

となる。すなわち、

$$\tan(\theta + \alpha) = \frac{\varepsilon_1 \sin\theta}{\varepsilon_2 \cos\theta} \tag{4.37}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{\sin(\theta+\alpha)\cos\theta - \cos(\theta+\alpha)\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos\theta + \sin(\theta+\alpha)\sin\theta} \\ &= \frac{\tan(\theta+\alpha) - \tan\theta}{1 + \tan(\theta+\alpha)\tan\theta} \end{aligned} \tag{4.38}$$

より、

$$\tan\alpha = \frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2 - 1)\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} \tag{4.39}$$

[7]

上下にずれた Q が 2 つ重なって見える。

第 3 問

[1]

$$
\begin{aligned}
Z^{(\mathrm{g})}(V,\beta,N) &= \frac{1}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\int \mathrm{d}x^{3N}\,\mathrm{d}p^{3N}\exp\left(-\sum_{i=1}^{3N}\frac{\beta p_i^2}{2m}\right) \\
&= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\int \mathrm{d}p\exp\left(\frac{\beta p^2}{2m}\right)\right)^{3N} \\
&= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{3N/2} \\
&= \frac{V^N}{N!}\frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3N/2}
\end{aligned}
\tag{4.40}
$$

[2]

$$
\begin{aligned}
Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{g})}(V,\beta,\mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} Z^{(\mathrm{g})}(V,\beta,N)\mathrm{e}^{\beta\mu N} \\
&= \exp\left(V\mathrm{e}^{\beta\mu}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.41}
$$

[3]

$$
P(\beta,\mu) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\log Z_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{g})} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\mathrm{e}^{\beta\mu}\beta^{-5/2} \tag{4.42}
$$

[4]

$$
\xi_{\mathrm{G}}^{(\mathrm{a})} = 1 + \mathrm{e}^{\beta(\varepsilon+\mu)} \tag{4.43}
$$

[5]

$$
n_a = \frac{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon+\mu)}}{1+\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon+\mu)}} = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-\beta(\varepsilon+\mu)}} \tag{4.44}
$$

[6]

$$\mathrm{e}^{-\beta\mu} = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \beta^{-5/2} P^{-1} \tag{4.45}$$

より、

$$\begin{aligned} n_a &= \frac{1}{1 + (m/2\pi\hbar^2)^{3/2}\, \mathrm{e}^{-\beta\varepsilon} \beta^{-5/2} P^{-1}} \\ &= \frac{1}{1 + (m/2\pi\hbar^2)^{3/2}\, \mathrm{e}^{-\varepsilon/k_{\mathrm{B}}T} (k_{\mathrm{B}}T)^{5/2} P^{-1}} \end{aligned} \tag{4.46}$$

[7]

図示は省略。P を 0 から上げていくと、n_a は 0 から単調増加して 1 に漸近する。T を 0 から上げていくと、n_a は 1 から減少したあと、極小値をとってまた 1 に近づいていく。

第 4 問

[1]

$$\tilde{H} = \hbar\omega(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + 1) \tag{4.47}$$

[2]

$$E = \hbar\omega(n_x + n_y + 1), \quad n_x, n_y \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{4.48}$$

[3]

角運動量の次元を表す定数は $\hbar$ であるから、

$$\begin{aligned}\hat{l}_z &= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger)(\hat{a}_y - \hat{a}_y^\dagger) + \frac{\mathrm{i}\hbar}{2}(\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x - \hat{a}_x^\dagger) \\ &= \mathrm{i}\hbar(\hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y)\end{aligned} \tag{4.49}$$

と書ける。ここから

$$[\hat{H}, \hat{l}_z] = \mathrm{i}\hbar^2\omega(-\hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y) = 0 \tag{4.50}$$

となる。つまり $\hat{l}_z$ は保存量。

[4]

$$\hat{l}_z \hat{A}|l_z\rangle = ([\hat{l}_z, \hat{A}] + \hat{A}\hat{l}_z)|l_z\rangle = (\alpha + l_z)\hat{A}|l_z\rangle \tag{4.51}$$

より、$\hat{A}|l_z\rangle \neq 0$ ならば、$\hat{A}|l_z\rangle$ は固有値 $l_z + \alpha$ を持つ $\hat{l}_z$ の固有状態となる。

[5]

$$[\hat{l}_z, C\hat{a}_x^\dagger + D\hat{a}_y^\dagger] = \mathrm{i}\hbar(C\hat{a}_y^\dagger - D\hat{a}_x^\dagger) = \alpha(C\hat{a}_x^\dagger + D\hat{a}_y^\dagger) \tag{4.52}$$

より、

$$\alpha C = -\mathrm{i}\hbar D, \quad \alpha D = \mathrm{i}\hbar C \tag{4.53}$$

となる。したがって $\alpha^2 C = -\mathrm{i}\hbar\alpha D = \hbar^2 C$ となるから、$\alpha = \pm\hbar$ である。$\alpha = \hbar$ に対しては、

$$\hat{b}_1^\dagger = C(\hat{a}_x^\dagger + \mathrm{i}\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{b}_1 = C(\hat{a}_x - \mathrm{i}\hat{a}_y) \tag{4.54}$$

となる。さらに $|C|^2 + |D|^2 = 1$ から

$$\hat{b}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + \mathrm{i}\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - \mathrm{i}\hat{a}_y) \tag{4.55}$$

となる。また $\alpha = -\hbar$ に対して同様に計算すると、

$$\hat{b}_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - \mathrm{i}\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + \mathrm{i}\hat{a}_y) \tag{4.56}$$

となる。

[**6**]

$$[\hat{b}_1, \hat{b}_1^\dagger] = [\hat{b}_2, \hat{b}_2^\dagger] = 1, \quad [\hat{b}_1, \hat{b}_2^\dagger] = [\hat{b}_2, \hat{b}_1^\dagger] = 0 \tag{4.57}$$

[**7**]

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2 + 1), \quad \hat{l}_z = \hbar(\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2) \tag{4.58}$$

[**8**]

$\hat{b}_1^\dagger\hat{b}_1$ の固有値を m_1、$\hat{b}_2^\dagger\hat{b}_2$ の固有値を m_2 とすると、N 番目のエネルギー準位については $m_1 + m_2 = N$ となる。$\hat{l}_z$ の固有値は

$$l_z = \hbar(m_1 - m_2) \tag{4.59}$$

であるから、$(m_1, m_2) = (N, 0), (N-1, 1), \ldots, (0, N)$ を代入して、

$$l_z = \hbar N, \hbar(N-2), \ldots, -\hbar N \tag{4.60}$$

となる。

[9]

エネルギー準位は $\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1$ の固有値を $m_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、$\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$ の固有値を $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$、スピン量子数を $s = \pm 1$ として、

$$E = \hbar\omega(m_1 + m_2 + 1) + \hbar\lambda s(m_1 - m_2) \tag{4.61}$$

と書ける。

5 2018 年 (平成 30 年)

物理学 I

第 1 問

[1.1]

遠心力と重力の釣り合いは、

$$m\frac{v_1^2}{R} = \frac{mMG}{R^2}. \tag{5.1}$$

よって

$$v_1 = \sqrt{\frac{MG}{R}} \tag{5.2}$$

[1.2]

脱出する最小の速度 v_2 に対し、

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{mMG}{R} = 0 \tag{5.3}$$

となる。よって

$$v_2 = \sqrt{\frac{2MG}{R}} \tag{5.4}$$

[1.3]

楕円

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)} \tag{5.5}$$

において、$\theta = \theta_0$ および $\theta = \theta_0 + \pi$ を代入すると、

$$r(\theta = \theta_0) = \frac{l}{1+\varepsilon}, \quad r(\theta = \theta_0 + \pi) = \frac{l}{1-\varepsilon} \tag{5.6}$$

となる。よって長軸は

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{l}{1+\varepsilon} + \frac{l}{1-\varepsilon} = \frac{2l}{1-\varepsilon^2} \\
&= \frac{2h^2}{GM} \cdot \frac{G^2M^2m}{2h^2(-E)} \\
&= \frac{GMm}{-E} \\
&= \frac{GM}{GM/R - v^2/2}
\end{aligned} \tag{5.7}
$$

[2.1]

$$2mR_0\omega_0^2 = \frac{2mMG}{R_0^2} \tag{5.8}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{MG}{R_0^3}} \tag{5.9}$$

[2.2]

$$I = 2 \cdot m \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2} \tag{5.10}$$

[2.3]

モーメント $\boldsymbol{N}$ を地道に計算する。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= -\frac{mMG}{|\boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{l}/2|^3}\frac{\boldsymbol{l}}{2} \times \left(\boldsymbol{R}_0 + \frac{\boldsymbol{l}}{2}\right) + \frac{mMG}{|\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{l}/2|^3}\frac{\boldsymbol{l}}{2} \times \left(\boldsymbol{R}_0 + \frac{\boldsymbol{l}}{2}\right) \\
&= \frac{mMG}{2R_0^3}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}_0 \left[\left(1 - \frac{\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{l}}{R_0^2} + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2} - \left(1 + \frac{\boldsymbol{R}_0 \cdot \boldsymbol{l}}{R_0^2} + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2}\right] \\
&= \frac{mMGl}{2R_0^2}\sin\phi \boldsymbol{e}_z \left[\left(1 - \frac{l}{R_0}\cos\phi + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2} - \left(1 + \frac{l}{R_0}\cos\phi + \frac{l^2}{4R^2}\right)^{-3/2}\right] \\
&= \frac{mMGl}{2R_0^2}3lR_0\sin\phi\cos\phi \boldsymbol{e}_z \\
&= \frac{1}{3}ml^2\omega_0^2\sin 2\phi \boldsymbol{e}_z
\end{aligned} \tag{5.11}
$$

[2.4]

$$\sin 2\phi_0 = 0, \quad \therefore \phi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2} \tag{5.12}$$

$$N = I\,\delta\ddot{\phi} = \frac{2}{3} m \cos 2\phi_0 l^2 \omega_0^2\, \delta\phi \tag{5.13}$$

$\phi = 0, \pi$ のまわりでは、

$$\delta\ddot{\phi} = \frac{3ml^2\omega_0^2}{2I}\,\delta\phi = 3\omega_0^2\,\delta\phi \tag{5.14}$$

となる。これは不安定である。次に $\phi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のまわりでは、

$$\delta\ddot{\phi} = -\frac{ml^2\omega_0^2}{I}\,\delta\phi = -3\omega_0^2\,\delta\phi \tag{5.15}$$

となる。これは安定な調和振動となり、角振動数は $\sqrt{3}\,\omega_0$ となる。

第 2 問

[1.1]

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{5.16}$$

これを半径 r の上から見て反時計回りの経路で積分すると、

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int (\nabla \times \boldsymbol{E}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\int \frac{\partial B}{\partial t} \mathrm{d}S \tag{5.17}$$

となる。よって、

$$2\pi r E(t) = -\pi r^2 B'(t), \quad E(t) = -\frac{1}{2} r B'(t) \tag{5.18}$$

である。つまり

$$E(t) = -\pi f \mu_0 H_0 r \cos(2\pi f t) \tag{5.19}$$

[1.2]

$\omega = 2\pi f, B_0 = \mu_0 H_0$ とおくと、

$$E(t) = -\frac{1}{2} r \omega B_0 \cos(\omega t) \tag{5.20}$$

である。単位体積あたりに発生する Joule 熱は、

$$p(r) = \frac{\boldsymbol{E}^2}{\rho} = \frac{\omega^2 B_0^2}{4\rho} r^2 \cos^2(\omega t) \tag{5.21}$$

で計算できる。これを積分して、

$$P = 2\pi L \int_0^R r p(r) \mathrm{d}r = 2\pi L \frac{\omega^2 B_0^2}{4\rho} \frac{R^4}{4} \cos^2(\omega t) \tag{5.22}$$

を得る。$\omega = 2\pi f$ および $B_0 = \mu_0 H_0$ を代入すると、

$$P = \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{2\rho} \cos^2(2\pi f t) \tag{5.23}$$

となる。

[1.3]

$$\begin{aligned}\frac{\langle P\rangle}{C}/\mathrm{K} &= \frac{\pi^3\mu_0^2H_0^2f^2LR^4}{4\rho C}\\ &= \frac{2^{4+6}\times 10^{-14+8+2-3-8}\times\pi^5}{2^{2+2-1}\times 10^{-8}}\\ &= 128\pi^5\times 10^{-7}\end{aligned} \tag{5.24}$$

である。

$$\pi^5 \approx 3^5\cdot 1.05^5 \approx 243\cdot 1.25 \approx 300 \tag{5.25}$$

から、

$$\frac{\langle P\rangle}{C} \approx 4\times 10^{-3}\,\mathrm{K} \tag{5.26}$$

[2.1]

系の対称性から B_x について計算すればよい。Biot-Savart の法則より、

$$B_x = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ia^2\,\mathrm{d}\theta}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} \tag{5.27}$$

[2.2]

$$B(x) = \frac{\mu_0 Ia^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right) \tag{5.28}$$

これを x について展開する。まず、$B(0)=0$ である。また、

$$B'(0) = -2\cdot\frac{\mu_0 Ia}{2}\cdot\frac{3}{2}\frac{2b}{(a^2+b^2)^{5/2}} = \frac{3\mu_0 Iab}{(a^2+b^2)^{5/2}} \tag{5.29}$$

である。

$$B(x) = -B(-x) \tag{5.30}$$

から $B''(0) = -B''(0) = 0$ なので、

$$B(x) = -\frac{3\mu_0 Ia^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}x + \mathcal{O}(x^3) \tag{5.31}$$

と書ける。

[2.3]

電流が同じ向きの場合、

$$B(x) = \frac{\mu_0 I a^2}{2}\left(\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right) \tag{5.32}$$

となる。() 内第 1 項を無次元化したものを x について展開すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^2+b^2+2bx+x^2}{a^2+b^2}\right)^{-3/2} &= \left(1+\frac{2bx+x^2}{a^2+b^2}\right)^{-3/2} \\
&= 1-\frac{3}{2}\cdot\frac{2bx+x^2}{a^2+b^2}+\frac{15}{8}\cdot\frac{4b^2x^2+\mathcal{O}(x^3)}{(a^2+b^2)^2} \\
&= 1-\frac{3bx}{a^2+b^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{4b^2-a^2}{(a^2+b^2)^2}x^2+\mathcal{O}(x^3)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

これに $x \to -x$ とした式を足し上げ、定数倍することで $B(x)$ が得られる。したがって、$B(x)$ の x^2 に比例する項が消える条件は、

$$4b^2 - a^2 = 0 \tag{5.34}$$

とである。$a, b > 0$ から求める条件は

$$a = 2b \tag{5.35}$$

である。

物理学 II

第 1 問

[1.1]

まず波動関数の連続性から

$$\psi(\varepsilon) = \psi(-\varepsilon) \tag{5.36}$$

が成り立つ。ε は微小な正の数である。次に、Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + U(x)\psi(x) = E\psi(x) \tag{5.37}$$

を $-\varepsilon$ から ε まで積分することで、

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\psi'(\varepsilon) - \psi'(-\varepsilon)\right) + \alpha\psi(0) = 0 \tag{5.38}$$

を得る。

[1.2]

境界条件から

$$1 + r = t \tag{5.39}$$

$$\frac{\mathrm{i}k\hbar^2}{2m}(t + r - 1) = \alpha(1 + r) \tag{5.40}$$

となる。整理すると、

$$1 + r = t \tag{5.41}$$

$$\mathrm{i}(t + r - 1) = 2C(1 + r) \tag{5.42}$$

となる。これを解くと、

$$r = \frac{C}{\mathrm{i} - C}, \quad t = \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i} - C}. \tag{5.43}$$

[2.1]

$$\begin{aligned}\Psi(x_1,x_2) &\propto \det\begin{pmatrix} t\psi_+(x_1)+r\psi_-(x_1) & r\psi_+(x_1)+t\psi_-(x_1) \\ t\psi_+(x_2)+r\psi_-(x_2) & r\psi_+(x_2)+t\psi_-(x_2)\end{pmatrix} \\ &= (t^2-r^2)\det\begin{pmatrix} t\psi_+(x_1) & t\psi_-(x_1) \\ t\psi_+(x_2) & t\psi_-(x_2)\end{pmatrix} \\ &= (t^2-r^2)(\psi_+(x_1)\psi_-(x_2)-\psi_-(x_1)\psi_+(x_2)) \end{aligned} \tag{5.44}$$

よって 2 粒子は反対方向に散乱される。

[2.2]

対称な場合、

$$\begin{aligned}\Psi(x_1,x_2) \propto\ & 2tr(\psi_+(x_1)\psi_+(x_2)+\psi_+(x_1)\psi_-(x_2)) \\ &+(t^2+r^2)(\psi_+(x_1)\psi_-(x_2)+\psi_-(x_1)\psi_+(x_2))\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$tr = \frac{\mathrm{i}C}{(\mathrm{i}-C)^2} \tag{5.46}$$

は、$\alpha \to 0$ または $\alpha \to \infty$ で 0 になる。よって、このとき 2 粒子は反対方向に散乱される。また $C=\mathrm{i}$ すなわち、

$$\alpha = \alpha_0 = \frac{\mathrm{i}\hbar^2 k}{m} = \mathrm{i}\hbar\sqrt{\frac{2E}{m}} \tag{5.47}$$

のとき、2 粒子は必ず同方向に散乱される。

[3]

$x<0$ での波動関数を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$、$0<x<L$ での波動関数を $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$、$L<x$ での波動関数を $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-L+\delta)}$ とおく。接続条件は

$$A+B=1, \tag{5.48}$$

$$\mathrm{i}(A-B-1)=2C, \tag{5.49}$$

$$A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta}, \tag{5.50}$$

$$\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta}-A\mathrm{e}^{\mathrm{i}kL}+B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kL})=2C\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\delta} \tag{5.51}$$

となる。上の 2 式から

$$A=1-\mathrm{i}C, \quad B=\mathrm{i}C \tag{5.52}$$

となる。また下の 2 式から

$$Ae^{ik(L-\delta)} = 1 + iC, \quad Be^{-ik(L+\delta)} = -iC \tag{5.53}$$

となる。よって

$$e^{2ikL} = \frac{B}{A} \cdot \frac{Ae^{ik(L-\delta)}}{Be^{-ik(L+\delta)}} = \frac{iC}{1 - iC} \cdot \frac{1 + iC}{-iC} = \frac{1 + iC}{-1 + iC}. \tag{5.54}$$

よって

$$L = \frac{1}{2ki} \log \frac{1 + iC}{-1 + iC} \tag{5.55}$$

第 2 問

[1]

van der Waals の状態方程式

$$P = \frac{nk_{\mathrm{B}}T}{1-bn} - an^2 \tag{5.56}$$

について考える。まず

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T = 0 \quad \text{and} \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_T = 0 \tag{5.57}$$

となる点 T_c, n_c を求める。

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{1-bn} + \frac{bnk_{\mathrm{B}}T}{(1-bn)^2} - 2an \\ &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{(1-bn)^2} - 2an = 0\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_T = \frac{2bk_{\mathrm{B}}T}{(1-bn)^3} - 2a = 0 \tag{5.59}$$

よって、

$$\frac{2b}{1-bn} = \frac{1}{n}, \quad n_c = \frac{1}{3}\frac{1}{b}. \tag{5.60}$$

また

$$T_c = \frac{2an_c}{k_{\mathrm{B}}}(1-bn_c)^2 = \frac{8}{27}\frac{a}{k_{\mathrm{B}}b}. \tag{5.61}$$

このとき

$$P_c = \frac{n_c k_{\mathrm{B}} T_c}{1-bn_c} - an_c^2 = \frac{4a}{27b^2} - \frac{a}{9b^2} = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}. \tag{5.62}$$

[**2**]

$$\begin{aligned}K_T &= -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \\ &= \left[-V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right]^{-1} \\ &= \left[n\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T\right]^{-1} \\ &= \left(\frac{nk_\mathrm{B}T}{(1-bn)^2} - 2an^2\right)^{-1}\end{aligned} \tag{5.63}$$

$n = n_c = 1/3b$ のとき、

$$K_T = \frac{1}{n_c}\left(\frac{9}{4}k_\mathrm{B}T - \frac{2a}{3b}\right)^{-1} = \frac{4}{9}\frac{1}{n_c k_\mathrm{B}(T-T_c)} \tag{5.64}$$

となる。

[**3**]

$$\begin{aligned}Z_0(T,V,N) &= \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\exp\left(-\frac{1}{k_\mathrm{B}T}\frac{p^2}{2m}\right)\right]^{3N} \\ &= \frac{1}{N!}\frac{V^N}{h^{3N}}(2mk_\mathrm{B}T)^{3N/2}\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}F_0(T,V,N) &= -k_\mathrm{B}T\ln Z_0(T,V,N) \\ &= -Nk_\mathrm{B}T\left(\ln\frac{V}{h^3} - \ln N + 1 + \frac{3}{2}\ln(2mk_\mathrm{B}T)\right)\end{aligned} \tag{5.66}$$

[**4**]

$$A \approx \left(\frac{V-Nv}{V}\right)^N\left[1 - \frac{4\pi}{V}\int_l^\infty r^2\frac{u(r)}{k_\mathrm{B}T}\mathrm{d}r\right]^{N(N-1)/2} \tag{5.67}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{4\pi}{V}\int_l^\infty r^2\frac{u(r)}{k_\mathrm{B}T}\,\mathrm{d}r &= -\frac{4\pi\varepsilon}{k_\mathrm{B}TV}\int_l^\infty \frac{l^6}{r^4}\,\mathrm{d}r \\
&= -\frac{4\pi\varepsilon l^3}{3k_\mathrm{B}TV} \\
&= -\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{2v}{V}
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln A &\approx N\ln\left(\frac{V-Nv}{V}\right)+\frac{N(N-1)}{2}\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{2v}{V}\right) \\
&\approx N\ln\left(\frac{V-Nv}{V}\right)+\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{vN^2}{V}
\end{aligned}
\tag{5.69}
$$

$$
F=-Nk_\mathrm{B}T\left(\ln\frac{V-Nv}{Nh^3}+1+\frac{3}{2}\ln(2mk_\mathrm{B}T)+\frac{\varepsilon}{k_\mathrm{B}T}\frac{vN}{V}\right)
\tag{5.70}
$$

[**5**]

$$
\begin{aligned}
P=-\frac{\partial F}{\partial V} &= \frac{Nk_\mathrm{B}T}{V-Nv}-\frac{v\varepsilon N^2}{V^2} \\
&= \frac{nk_\mathrm{B}T}{1-vn}-\varepsilon vn^2
\end{aligned}
\tag{5.71}
$$

[**6**]

$$
b=v,\quad a=\varepsilon v
\tag{5.72}
$$

第 3 問

[1.1]

$$E^{\mathrm{i}}(z,t) = E_0^{\mathrm{i}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\omega n_0}{c}z + \omega t\right)\right] \tag{5.73}$$

$$H^{\mathrm{i}}(z,t) = H_0^{\mathrm{i}} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\omega n_0}{c}z + \omega t\right)\right] \tag{5.74}$$

Maxwell の方程式

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{5.75}$$

より、

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{5.76}$$

が成り立つ。

$$-\mathrm{i}\frac{\omega n_0}{c}E_0^{\mathrm{i}} = \mathrm{i}\omega\mu_0 H_0^{\mathrm{i}} \tag{5.77}$$

$$H_0^{\mathrm{i}} = -\frac{n_0}{c\mu_0}E_0^{\mathrm{i}} \tag{5.78}$$

[1.2]

$$E_0^{\mathrm{i}} + E_0^{\mathrm{r}} = E_0^{\mathrm{t}}, \quad H_0^{\mathrm{i}} + H_0^{\mathrm{r}} = H_0^{\mathrm{t}} \tag{5.79}$$

[1.3]

境界条件は以下のように書き直せる。

$$E_0^{\mathrm{i}} + E_0^{\mathrm{r}} = E_0^{\mathrm{t}} \tag{5.80}$$

$$\frac{n_0}{c\mu_0}(E_0^{\mathrm{i}} - E_0^{\mathrm{r}}) = \frac{n_{\mathrm{g}}}{c\mu_0}E_0^{\mathrm{t}} \tag{5.81}$$

これを解くと、

$$E_0^{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{n_{\mathrm{g}}}{n_0}\right)E_0^{\mathrm{t}} \tag{5.82}$$

$$E_0^{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{n_{\mathrm{g}}}{n_0}\right)E_0^{\mathrm{t}} \tag{5.83}$$

となる。振幅反射係数 $r_0 = E_0^{\mathrm{r}}/E_0^{\mathrm{i}}$ は、

$$r_0 = \frac{E_0^{\mathrm{r}}}{E_0^{\mathrm{i}}} = \frac{n_0 - n_{\mathrm{g}}}{n_0 + n_{\mathrm{g}}} \tag{5.84}$$

となる。

[2.1]

$$E_l(z,t) = \left\{ E_l^- \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l) \right] + E_l^+ \exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega n_l}{c}(z - z_l) \right] \right\} \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{5.85}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} \tag{5.86}$$

$$H_l^{\pm} = \mp \frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{\pm} \tag{5.87}$$

[2.2]

第 l 層の厚みを $d_l = z_{l-1} - z_l$ とする。$z = z_{l-1}$ における境界条件は

$$E_l(z_{l-1}, t) = E_{l-1}(z_{l-1}, t), \quad H_l(z_{l-1}, t) = H_{l-1}(z_{l-1}, t), \tag{5.88}$$

で与えられる。電場の境界条件は、

$$E_l^- \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] + E_l^+ \exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] = E_{l-1}^- + E_{l-1}^+ \tag{5.89}$$

となる。磁場の境界条件は、

$$-n_l E_l^- \exp\left[-\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] + n_l E_l^+ \exp\left[\mathrm{i}\frac{\omega n_l d_l}{c} \right] = -n_{l-1} E_{l-1}^- + n_{l-1} E_{l-1}^+ \tag{5.90}$$

となる。よって、$\varDelta_l = n_l \omega d_l / c$ とおくと、

$$\frac{E_{l-1}^- - E_{l-1}^+}{E_{l-1}^- + E_{l-1}^+} = \frac{n_l}{n_{l-1}} \cdot \frac{E_l^- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varDelta_l} - E_l^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varDelta_l}}{E_l^- \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varDelta_l} + E_l^+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varDelta_l}} \tag{5.91}$$

すなわち、

$$\alpha_l = \frac{n_l}{n_{l-1}} \tag{5.92}$$

[2.3]

$\mathit{\Delta}_l = \pi/2$ のとき、

$$\frac{E_{l-1}^{-} - E_{l-1}^{+}}{E_{l-1}^{-} + E_{l-1}^{+}} = \frac{n_l}{n_{l-1}} \cdot \frac{E_l^{-} + E_l^{+}}{E_l^{-} - E_l^{+}} \tag{5.93}$$

である。屈折率 $n_{\mathrm{L}}, n_{\mathrm{H}}$ の層を空気側から $LHLH \cdots LH$ と交互に重ねていく場合に、漸化式を繰り返し用いると、

$$\begin{aligned}\frac{E_{2N+1}^{-} + E_{2N+1}^{+}}{E_{2N+1}^{-} - E_{2N+1}^{+}} &= \frac{n_{\mathrm{H}}}{n_{\mathrm{g}}} \cdot \frac{E_{2N}^{-} - E_{2N}^{+}}{E_{2N}^{-} + E_{2N}^{+}} \\ &= \cdots = \frac{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N}}{n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}} \cdot \frac{E_0^{-} - E_0^{+}}{E_0^{-} + E_0^{+}}\end{aligned} \tag{5.94}$$

となる。$E_{2N+1}^{+} = 0$ から

$$\frac{1 - r_1}{1 + r_1} = \frac{n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}}{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N}}, \quad r_1 = \frac{E_0^{+}}{E_0^{-}} \tag{5.95}$$

となる。したがって、

$$r_1 = \frac{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N} - n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}}{n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N} + n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}} \tag{5.96}$$

であり、反射防止条件 $r_1 \leq 0$ は

$$n_0 n_{\mathrm{H}}^{2N} \leq n_{\mathrm{g}} n_{\mathrm{L}}^{2N}, \quad \frac{n_{\mathrm{L}}}{n_{\mathrm{H}}} \geq \left(\frac{n_0}{n_{\mathrm{g}}}\right)^{1/2N} \tag{5.97}$$

となる。

第 4 問

[1.1]

化学ポテンシャル μ は内部エネルギー $U(S,V,N)$ (S はエントロピー、V は体積、N は粒子数) に対し

$$\mathrm{d}U = T\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V + \mu\,\mathrm{d}N \tag{5.98}$$

によって定義される。(T は温度、p は圧力)

2 つの系の間で粒子のやりとりが許され、化学ポテンシャルが高い方から低い方へ粒子が流れる。今の場合、金属板 M と半導体板 S で化学ポテンシャルが異なったために電荷が移動した。

[1.2]

微小な電荷 δq が M から S へ移動するときの静電エネルギーの変化は

$$\frac{\rho d}{\varepsilon_0}\,\delta q \tag{5.99}$$

で与えられる。一方電荷の移動によって獲得される化学ポテンシャルの差分は

$$(W - \phi_{\mathrm{s}})\frac{\delta q}{e} \tag{5.100}$$

となる。これらが釣り合うことから、

$$\rho = \frac{\varepsilon_0}{ed}(W - \phi_{\mathrm{s}}). \tag{5.101}$$

[1.3]

M, S の間の力は、

$$A\rho\cdot\frac{\rho}{2\varepsilon_0} = \frac{\varepsilon_0 A}{2e^2d^2}|W - \phi_{\mathrm{s}}|^2 \tag{5.102}$$

[1.4]

$$\begin{aligned}\rho(t) &= \frac{\varepsilon_0}{ed}(W - \phi_{\mathrm{s}})\left(1 + \frac{\delta}{d}\sin\varOmega t\right)^{-1}\\ &\approx \frac{\varepsilon_0}{ed}(W - \phi_{\mathrm{s}})\left(1 - \frac{\delta}{d}\sin\varOmega t\right)\end{aligned} \tag{5.103}$$

から、電流は

$$I(t) = A\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\frac{\varepsilon_0 A\delta}{ed^2}(W - \phi_{\mathrm{s}})\varOmega\cos\varOmega t \tag{5.104}$$

となる。よって、

$$I_0 = \frac{\varepsilon_0 A\delta}{ed^2}|W - \phi_{\mathrm{s}}|\varOmega \tag{5.105}$$

[**2.1**]

$\varDelta_{\mathrm{s}}$ は電子を S から M へ動かすときに必要なエネルギーなので、化学ポテンシャルの差に一致する。すなわち、

$$\varDelta_{\mathrm{s}} = W - \phi_{\mathrm{s}} \tag{5.106}$$

[**2.2**]

接合面近傍の伝導電子の数は電圧を V として、$\mathrm{e}^{eV/k_{\mathrm{B}}T}$ に比例する。よって $V < 0$ の領域では $0 < \mathrm{e}^{eV/k_{\mathrm{B}}T} < 1$ から電流は小さく、$V > 0$ の領域では $\mathrm{e}^{eV/k_{\mathrm{B}}T} > 1$ となり電流は大きくなる。

6　2017 年 (平成 29 年)

第 1 問

[1.1]

エネルギー保存

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgR\cos\theta = mgR \tag{6.1}$$

から、

$$v = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)} \tag{6.2}$$

[1.2]

動径方向の運動方程式を考えると、重力と遠心力のつりあいから、

$$mg\cos\theta_{c1} = \frac{mv^2}{R} = 2mg(1-\cos\theta_{c1}) \tag{6.3}$$

したがって、

$$\cos\theta_{c1} = \frac{2}{3} \tag{6.4}$$

このとき、

$$v_{c1} = \sqrt{\frac{2}{3}gR} \tag{6.5}$$

[2.1]

$$I = 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^r {r'}^2 \,\mathrm{d}r'\, \rho(r'\sin\theta)^2 \tag{6.6}$$

$$\rho = \frac{3m}{4\pi r^3} \tag{6.7}$$

$$\begin{aligned} I &= \frac{3mr^2}{2}\int_{-1}^{1}(1-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\cos\theta \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{3mr^2}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{5} \\ &= \frac{2}{5}mr^2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

[2.2]

剛体球の回転角を ϕ とおく。球全体が剛体に沿って θ 回転し、さらに球が滑らないことによる回転を考慮すると、

$$\phi = \theta + \frac{R}{r}\theta \tag{6.9}$$

となる。時間微分を取ると、$v = (R + r)\dot{\theta}$ に注意して、

$$\omega = \left(1 + \frac{R}{r}\right)\dot{\theta} = \frac{v}{r} \tag{6.10}$$

を得る。

[2.3]

エネルギー保存則は、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(R + r)\cos\theta = mg(R + r). \tag{6.11}$$

これに [2.1],[2.2] の結果を代入すると、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 = \frac{7}{10}mv^2 = mg(R + r)(1 - \cos\theta) \tag{6.12}$$

よって、

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R + r)(1 - \cos\theta) \tag{6.13}$$

である。動径方向の運動方程式を考えると、重力と遠心力のつりあいから、

$$mg\cos\theta_{c2} = \frac{mv^2}{R + r} = \frac{10}{7}mg(1 - \cos\theta_{c2}) \tag{6.14}$$

よって、

$$\cos\theta_{c2} = \frac{10}{17} \tag{6.15}$$

となる。

[2.4]

回転運動にエネルギーが移動する分、剛体球の速度が小さくなり、結果として遠心力が小さくなるので、θ_{c2} は θ_{c1} と異なる。

[3.1]

$$v_0 = \frac{P}{m}, \quad \omega_0 = \frac{P(h-r)}{I} = \frac{5}{2}\frac{P(h-r)}{mr^2} \tag{6.16}$$

$$\omega_0 = \frac{v_0}{r} \tag{6.17}$$

$$\frac{5}{2}\frac{P(h-r)}{mr^2} = \frac{P}{mr} \tag{6.18}$$

$$h = \frac{7}{5}r \tag{6.19}$$

[3.2]

エネルギー保存則

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mg(R+r)\cos\theta = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}I\omega_0^2 + mg(R+r) \tag{6.20}$$

から、

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta) + \frac{P^2}{m^2} \tag{6.21}$$

となる。また動径方向の運動方程式から、

$$m\cos\theta_{c3} = \frac{mv_{c3}^2}{R+r} = \frac{10}{7}mg(1-\cos\theta_{c3}) + \frac{P^2}{m(R+r)} \tag{6.22}$$

となる。よって、

$$\frac{17}{7}\cos\theta_{c3} = \frac{10}{7} + \frac{P^2/m^2}{g(R+r)} \tag{6.23}$$

となり、

$$\cos\theta_{c3} = \frac{10}{17} + \frac{7}{17}\frac{P^2/m^2}{g(R+r)} \tag{6.24}$$

$$v_{c3} = \sqrt{g(R+r)\cos\theta_{c3}} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r) + \frac{7}{17}\frac{P^2}{m^2}} \tag{6.25}$$

が得られる。

第 2 問

[1.1]

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & a \le r \le b \\ 0 & r \le a \quad \text{or} \quad b \le r \end{cases} \tag{6.26}$$

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) & r \le a \\ \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) & a \le r \le b \\ 0 & b \le r \end{cases} \tag{6.27}$$

[1.2]

$$\phi(b) - \phi(a) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{6.28}$$

より、

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b - a} \tag{6.29}$$

[1.3]

誘電体を入れた場合、静電容量は

$$C' = \frac{4\pi\varepsilon ab}{b - a} \tag{6.30}$$

となる。エネルギーは、

$$\frac{Q_0^2}{2C'} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \tag{6.31}$$

[1.4]

2 つのキャパシタ

$$C_1 = \frac{4\pi\varepsilon_0 a(b - d)}{b - d - a}, \quad C_2 = \frac{4\pi\varepsilon b(b - d)}{d} \tag{6.32}$$

を直列につなげると考えれば良い。よって、

$$\begin{aligned}\frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-d}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b-d} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{d}{b^2} + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\frac{d}{b^2}\right)\end{aligned} \tag{6.33}$$

$$\begin{aligned}C &= \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}\left[1 + \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\frac{ad}{b(b-a)}\right] \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} + \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon}\frac{a^2}{(b-a)^2}d\end{aligned} \tag{6.34}$$

[2.1]

$$j(r) = \sigma E(r) = \frac{\sigma Q_0}{4\pi\varepsilon r^2} \tag{6.35}$$

電流は、

$$I = 4\pi r^2 j = \frac{\sigma Q_0}{\varepsilon}. \tag{6.36}$$

Joule 熱は、

$$VI = \frac{\sigma Q_0^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \tag{6.37}$$

[2.2]

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -I = -\frac{\sigma Q_0}{\varepsilon} \tag{6.38}$$

を解いて、

$$Q(t) = Q_0 \mathrm{e}^{-\sigma t/\varepsilon} \tag{6.39}$$

となる。時刻 0 から t までに発生した Joule 熱は、

$$\begin{aligned}W(t) &= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\int_0^t Q(t')^2\,\mathrm{d}t' \\ &= \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)(1 - \mathrm{e}^{-2\sigma t/\varepsilon})\end{aligned} \tag{6.40}$$

[2.3]

$t \to \infty$ とすると $W(t)$ は [1.3] で求めた静電エネルギーに漸近していく。これは静電エネルギーが全て Joule 熱として散逸していくことを意味する。

[3]

それぞれの媒質に流れる電流は、

$$j_1 = \sigma_1 E_1(r_0) = \frac{\sigma_1 Q_1}{4\pi\varepsilon_1 r_0^2}, \quad j_2 = \sigma_2 E_2(r_0) = \frac{\sigma_2 Q_2}{4\pi\varepsilon_2 r_0^2} \tag{6.41}$$

となる。

$$j_1 = j_2 = \frac{I}{4\pi r_0^2} \tag{6.42}$$

から

$$\frac{\sigma_1 Q_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2 Q_2}{\varepsilon_2} = I \tag{6.43}$$

となるので、求める電荷の面密度は

$$\frac{Q_2 - Q_1}{4\pi r_0^2} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)\frac{I}{4\pi r_0^2}. \tag{6.44}$$

物理学 II

第 1 問

[1]

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\phi'(+0)-\phi'(-0)) = v\phi(0) \tag{6.45}$$

に $\phi(x) = N\mathrm{e}^{-\xi|x|}$ を代入すると、

$$\frac{\hbar^2}{2m}\cdot 2N\xi = vN \tag{6.46}$$

よって、

$$\xi = \frac{mv}{\hbar^2} \tag{6.47}$$

次に規格化条件から、

$$N^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\xi|x|}\,\mathrm{d}x = 2N^2\frac{1}{2\xi} = 1. \tag{6.48}$$

よって、

$$N = \sqrt{\xi} = \sqrt{\frac{mv}{\hbar^2}} \tag{6.49}$$

$N = \sqrt{\xi}$。次に $x \neq 0$ での Schrödinger 方程式から、

$$E = -\frac{\hbar^2}{2m}\xi^2 = -\frac{mv^2}{2\hbar^2} \tag{6.50}$$

[2.1]

$$E(c_1, c_2) = \frac{\langle\Phi_t|\hat{H}|\Phi_t\rangle}{\langle\Phi_t|\Phi_t\rangle} = \frac{A(c_1^2+c_2^2)+2Bc_1c_2}{c_1^2+c_2^2+2Sc_1c_2} \tag{6.51}$$

[2.2]

拘束条件として、$\langle \varPhi_t | \varPhi_t \rangle = 1$ を課してもよい。この場合、変分するべきは未定係数 E を含めた

$$\begin{aligned} &A(c_1^2 + c_2^2) + 2Bc_1c_2 - E(c_1^2 + c_2^2 + 2Sc_1c_2) \\ &= (c_1 \quad c_2) \begin{pmatrix} A - E & B - 2ES \\ B - 2ES & A - E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{6.52}$$

である。これを c_1, c_2 で偏微分すると、

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 & S \\ S & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{6.53}$$

を得る。

[2.3]

条件を以下のように書き換えられる。

$$\begin{pmatrix} A + B & 0 \\ 0 & A - B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ c_1 - c_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} 1 + S & 0 \\ 0 & 1 - S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{6.54}$$

ここから

$$E = \frac{A + B}{1 - S}, \quad \frac{A - B}{1 + S} \tag{6.55}$$

であり、それぞれのエネルギーに対応して

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6.56}$$

となる。よって波動関数は規格化定数を除いて

$$\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) \pm \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2) \tag{6.57}$$

となる。

[2.4]

$$\begin{aligned} &(\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) + \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2))\,(\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) - \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2)) \\ &(\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) - \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2))\,(\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) - \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2)) \\ &(\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) - \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2))\,\alpha(\omega_1)\alpha(\omega_2) \\ &(\phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) - \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_1 - R/2))\,\beta(\omega_1)\beta(\omega_2) \end{aligned}$$

第 2 問

[1.1]

$$W = \frac{M!}{N!(M-N)!} \tag{6.58}$$

となるので、

$$\begin{aligned} S = k_{\mathrm{B}} \ln W &= k_{\mathrm{B}}(M \ln M - N \ln N - (M-N)\ln(M-N)) \\ &= k_{\mathrm{B}} N \ln \frac{M}{N} + k_{\mathrm{B}}(M-N)\ln \frac{M}{M-N} \end{aligned} \tag{6.59}$$

[1.2]

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{\partial F_0}{\partial V} = T\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{T}{v}\frac{\partial S}{\partial M} \\ &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{v}\left(\frac{N}{M} + \ln \frac{M}{M-N} + \frac{M-N}{M} - 1\right) \\ &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{v} \ln \frac{M}{M-N} \\ &= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{v} \ln\left(1 - \frac{vN}{V}\right) \end{aligned} \tag{6.60}$$

これは $\phi = vN/V \ll 1$ のときに

$$p_0 = \frac{k_{\mathrm{B}}NT}{V} + \frac{k_{\mathrm{B}}vN^2T}{2V^2} + \cdots \tag{6.61}$$

と展開でき、1 次では p_{id} と一致する。

[2.1]

$$F = U - TS = -\frac{1}{2}Mz\alpha\phi^2 - k_{\mathrm{B}}T\left(M\phi \ln \frac{1}{\phi} + M(1-\phi)\ln \frac{1}{1-\phi}\right) \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{M}\frac{\partial F}{\partial \phi} &= -\alpha z \phi - k_{\mathrm{B}}T(-\ln \phi - 1 + \ln(1-\phi) + 1) \\ &= -\alpha z \phi + k_{\mathrm{B}}T[\ln \phi - \ln(1-\phi)] \end{aligned} \tag{6.63}$$

[2.2]

$$\mu'(\phi) = -\alpha z + k_{\mathrm{B}}T\left[\frac{1}{\phi} + \frac{1}{1-\phi}\right] = -\alpha z + \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\phi(1-\phi)} \tag{6.64}$$

$\mu'(\phi) > 0$ となる温度の条件は、

$$\phi(1-\phi) < \frac{k_{\mathrm{B}}T}{\alpha z} \tag{6.65}$$

が任意の ϕ について成り立つこと。よって、

$$\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\alpha z} > \frac{1}{4}, \quad T > \frac{\alpha z}{4k_{\mathrm{B}}} \tag{6.66}$$

[2.3]

等しい μ を与える ϕ が 3 つ存在するとき、相共存が起こりうる。すなわち $\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2)$ となる ϕ_1, ϕ_2 が存在し、$\phi_1 < \phi < \phi_1$ となる ϕ に対しては系が密度 ϕ_1, ϕ_2 の 2 つの領域に分かれる。この ϕ_1, ϕ_2 は Maxwell の等面積則によって決まる。

第 3 問

[1.1]

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = (A + BW(\omega_0))N_2 - BW(\omega_0)N_1 \tag{6.67}$$
$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = BW(\omega_0)N_1 - (A + BW(\omega_0))N_2 \tag{6.68}$$

[1.2]

定常状態では $\mathrm{d}N_1/\mathrm{d}t = \mathrm{d}N_2/\mathrm{d}t = 0$ から、

$$-(N_1 - N_2)BW(\omega_0) + AN_2 = 0 \tag{6.69}$$

よって、

$$W(\omega_0) = \frac{AN_2}{B(N_1 - N_2)} \tag{6.70}$$

となる。また、

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{BW(\omega_0)}{A + BW(\omega_0)} < 1 \tag{6.71}$$

[2.1]

一つのモードは波数 $\boldsymbol{k}$ で特徴づけられ、$\boldsymbol{k}$ は

$$\boldsymbol{k} = \frac{2\pi}{d}\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^3 \tag{6.72}$$

と書ける。$\omega = c|\boldsymbol{k}|$ から、角周波数が 0 から ω までのモードの数 N は、偏向を考慮すると、

$$N = 2\left(\frac{d}{2\pi}\right)^3 \frac{4\pi(\omega/c)^3}{3} = \frac{d^3\omega^3}{3\pi^2c^3} \tag{6.73}$$

[2.2]

単位角周波数あたり、単位体積あたりの電磁波のモード数は、

$$D(\omega) = \frac{1}{d^3}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3} \tag{6.74}$$

よって、

$$W_{\mathrm{eq}}(\omega) = \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T} - 1} D(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{1}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_{\mathrm{B}}T} - 1} \tag{6.75}$$

[2.3]

$$\frac{A}{B} = \frac{N_1 - N_2}{N_2} W(\omega_0) = (\mathrm{e}^{\hbar\omega_0/k_{\mathrm{B}}T} - 1) W(\omega_0) \tag{6.76}$$

[3.1]

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -(P+L)N_1 + (A+L)N_2 + (A'+P)N_3 \tag{6.77}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = LN_1 - (A+L)N_2 + CN_3 \tag{6.78}$$

$$\frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}t} = PN_1 - (A'+P+C)N_3 \tag{6.79}$$

[3.2]

$$\begin{pmatrix} -P-L & A+L & A'+P \\ L & -A-L & C \\ P & 0 & -A'-P-C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{6.80}$$

から、

$$(-C(P+L) - (A'+P)L)N_1 + (A'+P+C)(A+L)N_2 \tag{6.81}$$

よって、

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{(A'+P+C)L + CP}{(A'+P+C)(A+L)} \tag{6.82}$$

となる。$N_2/N_1 > 1$ となるとき、

$$(A'+P+C)L + CP > (A'+P+C)(A+L) \tag{6.83}$$

これを整理すると、

$$P(C-A) > A(A'+C) \tag{6.84}$$

となる。よって $C > A$ のとき、P の臨界値 P_c が存在し、

$$P_c = \frac{A(C + A')}{C - A} \tag{6.85}$$

となる。

[3.3]

反転分布の条件は、

$$W_p(\omega_p) > \frac{A(C + A')}{B_{13}(C - A)} \tag{6.86}$$

である。短波長では

$$W_p(\omega_p) \approx \frac{\hbar\omega^3}{\pi c^3} \mathrm{e}^{-\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} \tag{6.87}$$

であり、これは ω が大きくなると指数関数的に減衰するため、条件を満たすのが難しくなる。

第 4 問

[1.1]

$v = v_x + \mathrm{i}v_y$, $E = E_x + \mathrm{i}E_y$ とおくと、

$$m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\right)v = -eE + \mathrm{i}eBv. \tag{6.88}$$

定常状態では

$$v = -\frac{eE\tau}{m} + \mathrm{i}\omega_c\tau v \tag{6.89}$$

となる。ただし $\omega_c = eB/m$ である。よって、

$$J = -nev = \frac{ne^2\tau/m}{1+(\omega_c\tau)^2}(1+\mathrm{i}\omega_c\tau)E \tag{6.90}$$

これを行列で表すと、

$$\boldsymbol{J} = \tilde{\sigma}\boldsymbol{E}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{ne^2\tau/m}{1+(\omega_c\tau)^2}\begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau \\ \omega_c\tau & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.91}$$

よって

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{6.92}$$

[1.2]

$j_y = 0$ のとき、

$$E = \frac{1-\mathrm{i}\omega_c\tau}{\sigma_0}j_x. \tag{6.93}$$

よって、

$$R_{\mathrm{H}} = \frac{E_y}{j_xB} = -\frac{\omega_c\tau}{\sigma_0 B} = -\frac{1}{ne}, \quad \sigma = \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{6.94}$$

[2.1]

正孔に対する運動方程式は定常状態の場合、

$$v = \frac{eE\tau}{m} - \mathrm{i}\omega_c\tau v \tag{6.95}$$

と書ける。よって伝導率は

$$\frac{ne^2\tau/m}{1-\mathrm{i}\omega_c\tau}+\frac{pe^2\tau/m}{1+\mathrm{i}\omega_c\tau} \tag{6.96}$$

となる。行列で書くと、

$$\tilde{\sigma}=\frac{e^2\tau/m}{1+(\omega_c\tau)^2}\begin{pmatrix} n+p & -(n-p)\omega_c\tau \\ (n-p)\omega_c\tau & n+p \end{pmatrix}. \tag{6.97}$$

[2.2]

$$\begin{aligned} E &= \frac{m(1+(\omega_c\tau)^2)}{e^2\tau}\cdot\frac{1}{(n+p)+\mathrm{i}(n-p)\omega_c\tau}j_x \\ &= \frac{m(1+(\omega_c\tau)^2)}{e^2\tau}\cdot\frac{(n+p)-\mathrm{i}(n-p)\omega_c\tau}{(n+p)^2+(n-p)^2(\omega_c\tau)^2}j_x \end{aligned} \tag{6.98}$$

$$\begin{aligned} R_{\mathrm{H}} &= \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{e}{m\omega_c}\cdot\frac{m(1+(\omega_c\tau)^2)}{e^2\tau}\cdot\frac{(n-p)\omega_c\tau}{(n+p)^2+(n-p)^2(\omega_c\tau)^2} \\ &= \frac{1}{(n-p)e}\cdot\frac{1+(\omega_c\tau)^2}{(\frac{n+p}{n-p})^2+(\omega_c\tau)^2} \end{aligned} \tag{6.99}$$

$$\sigma=\frac{j_x}{E_x}=\frac{(n+p)e^2\tau}{m}\cdot\frac{1+(\frac{n-p}{n+p})^2(\omega_c\tau)^2}{1+(\omega_c\tau)^2} \tag{6.100}$$

[2.3]

問 [2.2] の結果から、

$$R_H^{(0)}=-\frac{n-p}{e(n+p)^2},\quad R_H^{(\infty)}=-\frac{1}{e(n-p)}. \tag{6.101}$$

よって、

$$n-p=-\frac{1}{eR_H^{(\infty)}},\quad (n+p)^2=\frac{1}{e^2R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}} \tag{6.102}$$

となるから、

$$n=\frac{1}{2e}\left(\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}}-\frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right),\quad p=\frac{1}{2e}\left(\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}}+\frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right) \tag{6.103}$$

[2.4]

$p/n = 0$ の場合、

$$\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \frac{ne^2\tau}{m} \tag{6.104}$$

で σ は一定。$p/n > 0$ の場合

$$\sigma(\omega_c\tau) = \frac{(n+p)e^2\tau}{m} \cdot \frac{1 + (\frac{n-p}{n+p})^2(\omega_c\tau)^2}{1 + (\omega_c\tau)^2} \tag{6.105}$$

である。これは $\omega_c\tau$ に対して単調減少し、

$$\sigma(0) = \frac{(n+p)e^2\tau}{m}, \quad \sigma(\infty) = \frac{(n-p)^2e^2\tau}{(n+p)m} \tag{6.106}$$

となる。

[2.5]

$p = n$ のとき、

$$\sigma(\omega_c\tau) = \frac{(n+p)e^2\tau}{m} \cdot \frac{1}{1 + (\omega_c\tau)^2} \tag{6.107}$$

から $\omega_c\tau \to \infty$ で σ は 0 に漸近する。これは電子・正孔のサイクロトロン運動が激しくなることで、電場と平行な方向への運動が妨げられることから理解できる。

7　2016 年 (平成 28 年)

物理学 I

第 1 問

[1.1]

$$kv_0t_0 = \mu mg, \quad t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0} \tag{7.1}$$

[1.2]

$$m\ddot{x}_B(t) = k(v_0(t+t_0) - 2x_B(t)) - \frac{2}{3}\mu mg = -2kx_B(t) + kv_0t + \frac{1}{3}kv_0t_0 \tag{7.2}$$

[1.3]

運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(x_B(t) - \frac{v_0t}{2} - \frac{v_0t_0}{6}\right) = -2k\left(x_B(t) - \frac{v_0t}{2} - \frac{v_0t_0}{6}\right) \tag{7.3}$$

と書ける。よって $x_B(0) = \dot{x}_B(0) = 0$ から、$\omega = \sqrt{2k/m}$ とおくと

$$x_B(t) = \frac{v_0t}{2} + \frac{v_0t_0}{6} - \frac{v_0t_0}{6}\cos\omega t - \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t \tag{7.4}$$

となる。

[1.4]

$\omega t_0 \ll 1$ のとき、

$$\begin{aligned} x_B(t_0) &= \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \frac{\sin\omega t_0}{\omega}\right) + \frac{v_0t_0}{6}(1-\cos\omega t_0) \\ &= \frac{v_0t_0}{12}\omega^2t_0^2 \\ &= \frac{kv_0t_0^3}{6m} \end{aligned} \tag{7.5}$$

となる。$t = t_0$ での A, B 間の力は

$$kx_B(t_0) = \frac{\mu mg}{12}\omega^2t_0^2 \ll \mu mg \tag{7.6}$$

となり、A は静止している。

[2.1]

$$\frac{\mathrm{d}^2U}{\mathrm{d}x^2}=k_1\left[1-+3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \tag{7.7}$$

より、$x=0$ まわりでばね定数 $-k_1$、$x=\pm l$ でばね定数 $2k_1$ の復元力が働く。ここから運動方程式を書き下すと、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}q_A\\q_B\\q_C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_0-2k_1 & k_0 & 0\\ k_0 & -2k_0+k_1 & k_0\\ 0 & k_0 & -k_0-2k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_A\\q_B\\q_C\end{pmatrix} \tag{7.8}$$

となる。次にこれを対角化するが、系の対称性 $A\leftrightarrow C$ に注意する。ここから固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\quad\begin{pmatrix}a\\b\\a\end{pmatrix} \tag{7.9}$$

という形を取る。1 つ目の固有値は $-k_0$ である。次に 2 つ目に対して、

$$\begin{pmatrix}-k_0-2k_1 & k_0 & 0\\ k_0 & -2k_0+k_1 & k_0\\ 0 & k_0 & -k_0-2k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-k_0-2k_1)a+k_0b\\2k_0a+(-2k_0+k_1)b\\(-k_0-2k_1)a+k_0b\end{pmatrix} \tag{7.10}$$

から、ブロック対角行列

$$\begin{pmatrix}-k_0-2k_1 & k_0\\ 2k_0 & -2k_0+k_1\end{pmatrix} \tag{7.11}$$

の固有値を求めればよい。この固有値は

$$\lambda^2+(3k_0+k_1)\lambda+(3k_0k_1-2k_1^2)=0,\quad \lambda=\frac{3k_0+k_1\pm\sqrt{9k_0^2-6k_0k_1+9k_1^2}}{2} \tag{7.12}$$

となる。以上により固有振動数は

$$\omega=\sqrt{\frac{k_0}{m}},\quad\sqrt{\frac{3k_0+k_1\pm\sqrt{9k_0^2-6k_0k_1+9k_1^2}}{2m}} \tag{7.13}$$

[2.2]

振動は不安定になりうるのは

$$\omega = \sqrt{\frac{3k_0 + k_1 - \sqrt{9k_0^2 - 6k_0k_1 + 9k_1^2}}{2m}} \tag{7.14}$$

である。その条件は $\omega^2 < 0$ であり、したがって

$$(3k_0 + k_1)^2 - (9k_0^2 - 6k_0k_1 + 9k_1^2) = 12k_0k_1 - 8k_1^2 < 0. \tag{7.15}$$

よって

$$k_1 > \frac{3}{2}k_0 = k_c \tag{7.16}$$

[2.3]

$k_1 = 4k_c/9 = 2k_0/3$ のとき、

$$\omega^2 = \frac{k_0}{2m} \cdot \left(3 + \frac{2}{3} - \sqrt{9 - 4 + 4}\right) = \frac{k_0}{3m} \tag{7.17}$$

である。また [2.1] のブロック対角行列は

$$k_0 \begin{pmatrix} -7/3 & 1 \\ 2 & -4/3 \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

となる。この行列の固有値 $-k_0/3$ に対応する固有ベクトルは $(a, b) = (1, 2)$ で与えられる。よって

$$q_A : q_B : q_C = 1 : 2 : 1 \tag{7.19}$$

第 2 問

[1]

$$\phi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) \tag{7.20}$$

[2]

$$\frac{1}{r_\pm} = \frac{1}{r}\left(1 \mp \frac{d\cos\theta}{r} + \frac{d^2}{4r^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{r} \pm \frac{d\cos\theta}{2r^2} \tag{7.21}$$

より、

$$\phi(P) = \frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \tag{7.22}$$

[3]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E} = -\nabla\phi &= -\frac{qd}{4\pi\varepsilon_0}\left(\boldsymbol{e}_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\boldsymbol{e}_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\frac{\cos\theta}{r^2} \\ &= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(2\cos\theta\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\end{aligned} \tag{7.23}$$

[4]

$\boldsymbol{p}_1 \propto \boldsymbol{e}_z$ とする。

(a) $(\theta_1, \theta_2) = (\pi/2, 0)$ のとき、$\boldsymbol{p}_2$ には $\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_z$ 方向の電場がかかり、時計回りに回転する。

(b) $(\theta_1, \theta_2) = (\pi/2, -\pi/2)$ のとき、$\boldsymbol{p}_2$ には $\boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_z$ 方向の電場がかかり、安定釣り合いの状態で回転しない。

[5]

$$
\begin{aligned}
U &= -\frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 l^3}\boldsymbol{p}_2\cdot(2\cos\theta_1\boldsymbol{e}_r+\sin\theta_1\boldsymbol{e}_{\theta_1}) \\
&= -\frac{p_1p_2}{4\pi\varepsilon_0 l^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2) \\
&= -\frac{p_1p_2}{8\pi\varepsilon_0 l^3}(3\cos(\theta_1+\theta_2)+\cos(\theta_1-\theta_2))
\end{aligned}
\tag{7.24}
$$

[6]

$\theta_1+\theta_2, \theta_1-\theta_2$ が独立なことから、

$$
\theta_1+\theta_2 = 2m\pi\theta_1-\theta_2 = 2n\pi, m, n\in\mathbb{Z} \tag{7.25}
$$

のときに最も安定。よって

$$
(\theta_1,\theta_2) = (0,0), (\pi,\pi) \tag{7.26}
$$

このとき

$$
U = -\frac{p_1p_2}{2\pi\varepsilon_0 l^3} \tag{7.27}
$$

[7]

問 [5] の結果で $p_1=-p_2=p, l=2h, \theta_1=\pi-\alpha, \theta_2=\alpha$ とすればよい。すなわち、

$$
U' = \frac{p^2}{64\pi\varepsilon_0 h^3}(3\cos\pi+\cos(\pi-2\alpha)) = -\frac{p^2}{64\pi\varepsilon_0 h^3}(\cos(2\alpha)+3) \tag{7.28}
$$

[8]

$\cos(2\alpha)=1$ のときに最も安定。よって

$$
\alpha = 0, \pi \tag{7.29}
$$

物理学 II

第 1 問

[1]

ポテンシャルから境界条件

$$\psi(a/2) = \psi(-a/2) = 0 \tag{7.30}$$

が課される。一方、Schrödinger 方程式から

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx), \quad (A, B = \text{const.}) \tag{7.31}$$

となるので、規格化された固有関数は

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & (n = 1, 3, 5, ...) \\ \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) & (n = 2, 4, 6, ...) \end{cases} \tag{7.32}$$

となる。エネルギー固有値は

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad (n = 1, 2, 3, ...) \tag{7.33}$$

で与えられる。

[2]

あり得る波動関数は以下の 4 つ。

$$g(x_1)g(x_2) \tag{7.34}$$
$$e(x_1)e(x_2) \tag{7.35}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2) + e(x_1)g(x_2)) \tag{7.36}$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2) - e(x_1)g(x_2)) \tag{7.37}$$

[3]

まず $S = 1$ となる固有状態は以下の 3 つがある。

$$|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, \quad |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \tag{7.38}$$

次に $S=0$ となる固有状態は以下の 1 つだけである。

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \tag{7.39}$$

これ以外の基底はない。

[4]

まず軌道が対称でスピンが反対称な固有状態として、以下の 3 つがある。

$$\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}g(x_1)g(x_2)(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2), \tag{7.40}$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e(x_1)e(x_2)(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2), \tag{7.41}$$

$$\Psi_3 = \frac{1}{2}(g(x_1)e(x_2) + e(x_1)g(x_2))(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2). \tag{7.42}$$

それぞれのエネルギー固有値は、

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{ma^2}, \quad E_2 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{ma^2}, \quad E_3 = \frac{5\hbar^2\pi}{2ma^2} \tag{7.43}$$

となる。次に軌道が反対称でスピンが対称な固有状態として、以下の 3 つがある。

$$\Psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2) - e(x_1)g(x_2))|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, \tag{7.44}$$

$$\Psi_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}(g(x_1)e(x_2) - e(x_1)g(x_2))|\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 \tag{7.45}$$

$$\Psi_6 = \frac{1}{2}(g(x_1)e(x_2) - e(x_1)g(x_2))(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \tag{7.46}$$

それぞれのエネルギー固有値は、

$$E_4 = E_5 = E_6 = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2ma^2} \tag{7.47}$$

となる。

[5]

$g(x)$ が偶関数、$e(x)$ が奇関数であることに注意すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} xe(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2e(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{7.48}$$

が言える。このことに気をつけると、$\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ は以下のように計算できる。

$$\langle \Psi_1 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_1 \rangle = 2A, \tag{7.49}$$

$$\langle \Psi_2 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_2 \rangle = 2B. \tag{7.50}$$

次に、

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_3 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_3 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, (x_1 - x_2)^2 (g(x_1)^2 e(x_2)^2 + 2g(x_1)e(x_1)g(x_2)e(x_2) + e(x_1)^2 g(x_2)^2) \\
&= \frac{1}{2}(A + B - 4C^2 + A + B) \\
&= A + B - 2C^2.
\end{aligned} \tag{7.51}$$

Ψ_4, Ψ_5, Ψ_6 についてはスピン部分が期待値に寄与しないので、

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_4 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_4 \rangle = \langle \Psi_5 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_5 \rangle = \langle \Psi_6 | (x_1 - x_2)^2 | \Psi_6 \rangle \\
&= \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2 \, (x_1 - x_2)^2 (g(x_1)^2 e(x_2)^2 - 2g(x_1)e(x_1)g(x_2)e(x_2) + e(x_1)^2 g(x_2)^2) \\
&= A + B + 2C^2.
\end{aligned} \tag{7.52}$$

[6]

1 次の摂動エネルギーは

$$\Delta E = \langle \Psi | V_0 x_1 x_2 | \Psi \rangle \tag{7.53}$$

と表される。これを各状態について求めると、

$$\begin{aligned}
&\langle \Psi_1 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_1 \rangle = \langle \Psi_2 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_2 \rangle = 0 \\
&\langle \Psi_3 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_3 \rangle = V_0 C^2 \\
&\langle \Psi_4 | x_1 x_2 | \Psi_4 \rangle = \langle \Psi_5 | x_1 x_2 | \Psi_5 \rangle = \langle \Psi_6 | x_1 x_2 | \Psi_6 \rangle = -V_0 C^2
\end{aligned} \tag{7.54}$$

となる。したがって、$\Psi_1, \ldots, \Psi_6$ のエネルギーは、

$$\frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2}, \frac{4\hbar^2 \pi^2}{ma^2}, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} + V_0 C^2, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0 C^2, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0 C^2, \frac{5\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} - V_0 C^2 \tag{7.55}$$

となる。

第 2 問

[1]

終点の座標 X は、

$$X = a(n^+ - n^-) \tag{7.56}$$

と表される。分子が取りうる状態の数は 2^n である。また $X = na$ のとき、分子が取りうる状態の数は $N!/n^+!n^-!$ である。

$$n^+ = \frac{N+n}{2}, \quad n^- = \frac{N-n}{2} \tag{7.57}$$

なので、$X = na$ となる確率 $P(n)$ は

$$P(n) = \frac{1}{2^n}\frac{N!}{((N+n)/2)!((N-n)/2)!} \tag{7.58}$$

で与えられる。分子のエントロピーは、

$$S = k_\mathrm{B} \ln 2^n = nk_\mathrm{B} \ln 2 \tag{7.59}$$

である。

[2]

終点を固定したとき、分子のエントロピーは

$$\begin{aligned} S &= k_\mathrm{B} \ln \left(\frac{N!}{n^+!n^-!} \right) \\ &\approx k_\mathrm{B}(N \ln N - n^+ \ln n^+ - n^- \ln n^-) \\ &= k_\mathrm{B} n^+ \ln \frac{N}{n^+} + k_\mathrm{B} n^- \ln \frac{N}{n^-} \end{aligned} \tag{7.60}$$

となる。全ての状態のエネルギーが等しいので、内部エネルギーは定数であり、エントロピーは温度依存しない。これらのことに注意すると、

$$\begin{aligned}\tau &= \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_T = -T\frac{\partial S}{\partial X} \\ &= -T\left(\frac{\partial n^+}{\partial X}\frac{\partial S}{\partial n^+} + \frac{\partial n^-}{\partial X}\frac{\partial S}{\partial n^-}\right) \\ &= -\frac{k_{\mathrm{B}}T}{2a}\left(\ln\frac{N}{n^+} - \ln\frac{N}{n^-}\right) \\ &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{2a}\ln\frac{n^+}{n^-} \\ &= \frac{k_{\mathrm{B}}T}{2a}\ln\frac{aN+X}{aN-X}. \end{aligned} \tag{7.61}$$

また $X \ll Na$ のとき、

$$\tau = \frac{k_{\mathrm{B}}TX}{a^2N} \tag{7.62}$$

[3]

$\beta = 1/k_{\mathrm{B}}T$ とおく。分配関数は、

$$Z(\beta) = \sum_{n^-=0}^{N}\frac{N!}{n^-!(N-n^-)!}\mathrm{e}^{\beta\kappa(N-n^-)}\mathrm{e}^{-\beta\kappa n^-} = (\mathrm{e}^{\beta\kappa} + \mathrm{e}^{-\beta\kappa})^N \tag{7.63}$$

である。ここから $\langle E\rangle, \langle X\rangle$ は、

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z(\beta) = -N\kappa\tanh\frac{\kappa}{k_{\mathrm{B}}T} \\ \langle X\rangle &= -\frac{a}{\kappa}\langle E\rangle = Na\tanh\frac{\kappa}{k_{\mathrm{B}}T}\end{aligned} \tag{7.64}$$

と表される。次に $|\kappa| \ll k_{\mathrm{B}}T$ のとき、

$$\langle E\rangle = -\frac{N\kappa^2}{k_{\mathrm{B}}T}, \quad \langle X\rangle = \frac{Na\kappa}{k_{\mathrm{B}}T} \tag{7.65}$$

となる。

[4]

$\langle E^2\rangle = Z''(\beta)/Z(\beta)$ から、

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ln Z(\beta) = \frac{Z''(\beta)}{Z(\beta)} - \frac{Z'(\beta)^2}{Z(\beta)^2} = \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 \tag{7.66}$$

となる。よって

$$\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = \frac{N\kappa^2}{\cosh^2(\kappa/k_{\mathrm{B}}T)} \tag{7.67}$$

となる。ここから

$$\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = \frac{a^2}{\kappa^2}(\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2) = \frac{Na^2}{\cosh^2(\kappa/k_{\mathrm{B}}T)} \tag{7.68}$$

となる。

第 3 問

[1]

電子の運動方程式は、

$$m\ddot{\boldsymbol{u}} = -e\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} - e\dot{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}} - m\omega_0^2 \boldsymbol{u} \tag{7.69}$$

である。u_x, u_y についての方程式は

$$-m\omega^2 u_x = -eE_x + \mathrm{i}e\omega u_y B - m\omega_0^2 u_x \tag{7.70}$$

$$-m\omega^2 u_y = -eE_y - \mathrm{i}e\omega u_x B - m\omega_0^2 u_x \tag{7.71}$$

となる。

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(\omega^2 - \omega_0^2) & \mathrm{i}e\omega \\ -\mathrm{i}e\omega & m(\omega^2 - \omega_0^2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} eE_x \\ eE_y \end{pmatrix} \tag{7.72}$$

から、u_x, u_y は、

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{u_+ + u_-}{2} = \frac{em(\omega^2 - \omega_0^2)E_x - \mathrm{i}e^2\omega B E_y}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - e^2\omega^2 B^2}, \\ u_y &= \frac{u_+ - u_-}{2\mathrm{i}} = \frac{\mathrm{i}e^2\omega B E_x + em(\omega^2 - \omega_0^2)E_y}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - e^2\omega^2 B^2}. \end{aligned} \tag{7.73}$$

[2]

$\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} = -ne\boldsymbol{u}/\varepsilon_0$ から、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 1 - \frac{ne^2 m(\omega^2 - \omega_0^2)/\varepsilon_0}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - e^2\omega^2 B^2} \\ \gamma &= \frac{ne^3\omega B/\varepsilon_0}{m^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - e^2\omega^2 B^2} \end{aligned} \tag{7.74}$$

となる。

$$\begin{aligned} m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - e^2\omega^2 B^2 &= m^2\omega_0^4 \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\frac{e^2 B^2}{m^2} \right) \\ &\approx m^2\omega_0^4 > 0 \end{aligned} \tag{7.75}$$

から、

$$\varepsilon_{xx} > 1, \quad \gamma > 0 \tag{7.76}$$

である。

[3]

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)=(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}-|\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}_0=-\mu_0\varepsilon_0\tilde{\varepsilon}\omega^2\boldsymbol{E}_0 \tag{7.77}$$

よって、

$$(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}-|\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}_0+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{7.78}$$

[4]

$$\begin{aligned}&-k_z^2E_{0,x}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(\varepsilon_{xx}E_{0,x}+\mathrm{i}\gamma E_{0,y})=0\\&-k_z^2E_{0,y}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2(-\mathrm{i}\gamma E_{0,x}+\varepsilon_{xx}E_{0,x})=0\end{aligned} \tag{7.79}$$

から

$$E_{0,x}^2+E_{0,y}^2=0 \tag{7.80}$$

となる。よって $E_{0,y}/E_{0,x}=\pm\mathrm{i}$ であり、

$$k_\pm=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{xx}\pm\gamma} \tag{7.81}$$

となる。また、

$$E_{0,z}k_z^2-k_z^2E_{0,z}+\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\varepsilon_{z,z}E_{0,z}=0 \tag{7.82}$$

から $E_{0,z}=0$ となるので、

$$\boldsymbol{E}_{0\pm}=\frac{E}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mp\mathrm{i}\\ 0\end{pmatrix} \tag{7.83}$$

[5]

$$\operatorname{Re}E_{+,x}(z=0,t)=\frac{E}{\sqrt{2}}\cos(\omega t), \tag{7.84}$$

$$\operatorname{Re}E_{+,y}(z=0,t)=-\frac{E}{\sqrt{2}}\sin(\omega t) \tag{7.85}$$

[6]

$$\begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \tag{7.86}$$

から、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(l,t) &= \frac{\boldsymbol{E}_+}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_+ l - \omega t)} + \frac{\boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_- l - \omega t)} \\ &= \left[\frac{\boldsymbol{E}_+}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_+ - k_-)l} + \frac{\boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_+ - k_-)l} \right] \exp\left(\mathrm{i} \frac{k_+ + k_-}{2} l - \mathrm{i}\omega t \right) \\ &. \end{aligned} \tag{7.87}$$

よって、

$$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{E}_+}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_+ - k_-)l/2} + \frac{\boldsymbol{E}_-}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k_+ - k_-)l/2} = \begin{pmatrix} E\cos((k_+ - k_-)l/2) \\ E\sin((k_+ - k_-)l/2) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.88}$$

偏向面の回転角は、

$$\theta = \frac{(k_+ - k_-)l}{2} \tag{7.89}$$

[7]

反射する光に対しては $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}} \to -\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}$ として同様の議論をすれば、回転角が求まる。このとき $\gamma \to -\gamma$, $k_\pm \to k_\mp$ となることと、回転角の符号の取り方が逆になることに注意すると、反射するときの回転角は θ に等しい。よって全体の回転角は、

$$2\theta = (k_+ - k_-)l \tag{7.90}$$

第 4 問

[1]

$$E = eV = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{2m\lambda^2} \tag{7.91}$$

よって

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2} = 1.5 \times 10^4\,\mathrm{V} \tag{7.92}$$

[2]

$$A(\boldsymbol{K}) = f \sum_{n_x=0}^{N_x-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK_x n_x} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK_y n_y} \tag{7.93}$$

よって

$$L(K, N) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aKn} \tag{7.94}$$

とすれば、

$$A(\boldsymbol{K}, N_x, N_y) = fL(K_x, N_x)L(K_y, N_y) \tag{7.95}$$

と表せる。

$$\begin{aligned} &L(K,1) = 1, \\ &L(K,2) = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK/2}\cos(aK/2), \\ &L(K,3) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}aK}\,(1 + 2\cos(aK)) \end{aligned} \tag{7.96}$$

[3]

$$\boldsymbol{a}_1 = a\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = a\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \tag{7.97}$$

$$\boldsymbol{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.98}$$

散乱の条件は、

$$\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2 + c\boldsymbol{e}_z, \quad |\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'| \tag{7.99}$$

である。散乱角 θ は、

$$|m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2| = 2|\boldsymbol{k}|\sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi}\sin\theta \tag{7.100}$$

によって定義される。よって

$$\theta = \sin^{-1}\frac{\lambda|m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2|}{4\pi} \tag{7.101}$$

となる。$|m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2|$ は小さい順から

$$\frac{4\pi}{\sqrt{3}\,a}, \frac{4\pi}{a}, \frac{8\pi}{\sqrt{3}\,a}, \dots \tag{7.102}$$

となるので、

$$\theta_1 = \sin^{-1}\frac{\lambda}{\sqrt{3}\,a}, \quad \theta_2 = \sin^{-1}\frac{\lambda}{a}, \quad \theta_1 = \sin^{-1}\frac{2\lambda}{\sqrt{3}\,a} \tag{7.103}$$

図示は省略する。逆格子点を原点からの距離ごとに図示すれば良い。

[4]

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}) = f\left(1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/3}\right)L(K_x, N_x)L(K_y, N_y) \tag{7.104}$$

ここで

$$\frac{2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2}{3}\cdot(m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2) = \frac{2\pi}{3}(2m_1 + m_2) \tag{7.105}$$

から、相対的な強度は

$$\left|1 + 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot(2\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)/3}\right|^2 = 5 + 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}(2m_1 + m_2)\right) \tag{7.106}$$

となる。よって

$$\cos 0 = 1, \quad \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \tag{7.107}$$

から $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ のピークの強度比は $3 : 9 : 3 = 1 : 3 : 1$ となる。

[5]

各層からの散乱光が打ち消し合うため。このときピークが現れる c が離散化される。積層面を傾けていくことはビームを傾けることと等価であり、このとき c が変化していくが、c が離散化された値に横切るときにピークが復活する。

8　2015 年 (平成 27 年)

物理学 I

第 1 問

[1]

　Lagrangian は

$$L = \frac{1}{2}m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g l_1 \cos\theta_1 \tag{8.1}$$

なので、運動方程式は

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \sin\theta_1 \tag{8.2}$$

となる。$\theta_1 \ll 1$ の場合、

$$\ddot{\theta}_1 \approx -\frac{g}{l_1}\theta_1 \tag{8.3}$$

から運動は単振動となり、各周波数は $\omega_0 = \sqrt{g/l_1}$ で与えられる。

[2]

　単振動の復元力が重力から来ており、m_1 に比例するため、ω_0 は m_1 に依存しない。撃力を加えた場合、振幅が $1/m_1$ に比例する。

[3]

　$\phi = \theta_1 + \theta_2$ とおく。質点 1,2 の座標は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 \\ -l_1 \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\phi \\ -l_1 \cos\theta_1 - l_2 \cos\phi \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

となる。ここで θ_1, ϕ を微小に動かすことを考えると、

$$\mathrm{d}y_1 = l_1 \sin\theta_1 \,\mathrm{d}\theta_1 \tag{8.5}$$

$$\mathrm{d}x_2 = l_1 \cos\theta_1 \,\mathrm{d}\theta_1 + l_2 \cos\phi \,\mathrm{d}\phi \tag{8.6}$$

$$\mathrm{d}y_2 = l_1 \sin\theta_1 \,\mathrm{d}\theta_1 + l_2 \sin\phi \,\mathrm{d}\phi \tag{8.7}$$

となる。拘束力は仕事をしないことに注意して、力の釣り合いから、

$$F\mathrm{d}x_2 - m_1 g \,\mathrm{d}y_1 - m_2 g \,\mathrm{d}y_2 = 0 \tag{8.8}$$

となる。$\mathrm{d}\theta_1$, $\mathrm{d}\phi$ の係数から

$$Fl_1\cos\theta_1 - (m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0, \tag{8.9}$$
$$Fl_2\cos\phi - m_2 gl_2\sin\phi = 0. \tag{8.10}$$

よって、

$$\theta_1 = \arctan\frac{F}{(m_1+m_2)g}, \quad \phi = \arctan\frac{F}{m_2 g} \tag{8.11}$$

となる。θ_2 については、

$$\theta_2 = \arctan\frac{F}{m_2 g} - \arctan\frac{F}{(m_1+m_2)g} \tag{8.12}$$

である。

[4]

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}ml^2\left(\dot\theta_1^2 + (\dot\theta_1^2 + \dot\phi^2 + 2\cos(\theta_1-\phi)\dot\theta_1\dot\phi)\right) + mgl\left(\cos\theta_1 + (\cos\theta_1 + \cos\phi)\right) \\ &= \frac{1}{2}ml^2\left(2\dot\theta_1^2 + (\dot\theta_1+\dot\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_1-\phi)\dot\theta_1(\dot\theta_1+\dot\theta_2)\right) + mgl(2\cos\theta_1 + \cos(\theta_1+\theta_2)) \end{aligned} \tag{8.13}$$

[5]

θ_1, ϕ について 2 次の項を無視すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\theta_1} = 2ml^2\ddot\theta_1 + ml^2\ddot\phi \tag{8.14}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\theta_1} = -2mgl\theta_1 \tag{8.15}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot\phi} = ml^2\ddot\phi + ml^2\ddot\theta_1 \tag{8.16}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\phi} = -mgl\phi \tag{8.17}$$

となる。よって、運動方程式は

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot\theta_1 \\ \ddot\phi \end{pmatrix} = -\frac{g}{l}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \phi \end{pmatrix} \tag{8.18}$$

と書ける。θ_1, θ_2 についてまとめると、

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{pmatrix} = -\frac{g}{l} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{8.19}$$

[6]

解として $\theta_i = A_i \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ と仮定すると、

$$\begin{pmatrix} 2\omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_1 + A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.20}$$

となる。ただし $\omega_0 = g/l$ である。よって、非自明な解が存在するためには、

$$\omega^4 - 4\omega_0^2\omega^2 + 2\omega_0^4 = 0 \tag{8.21}$$

でなければならない。よって

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 2 \pm \sqrt{2} \tag{8.22}$$

となる。よってこの系は基準振動

$$\omega = \omega_0 \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} \tag{8.23}$$

をもつ。

第 2 問

$$B_x = B_0 \alpha z, \quad B_y = 0, \quad B_z = B_0(1+\alpha x) \tag{8.24}$$

[**1**]

$$\varPhi = B_0 \int \mathrm{d}S\,(1+\alpha x) = \pi a^2 B_0 (1+\alpha X) \tag{8.25}$$

[**2**]

磁束の時間変化は

$$\frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t} = \pi a^2 B_0 \alpha V = IR \tag{8.26}$$

となる。よって

$$I = \frac{\pi a^2 B_0 \alpha V}{R} \tag{8.27}$$

[**3**]

加えた仕事と Joule 熱が等しくなるので、

$$RI^2 = FV, \quad F = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2 V}{R} \tag{8.28}$$

[**4**]

時計回りの電流を I とおく。Lorentz 力は、

$$\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} I\sin\theta \\ -I\cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_0 b(t)(1+\alpha x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I\cos\theta B_0 b(t)(1+\alpha x) \\ -I\sin\theta B_0 b(t)(1+\alpha x) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.29}$$

から、

$$a\int_0^{2\pi} \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\theta = -\pi a^2 B_0 \alpha b(t) I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8.30}$$

である。よって

$$I = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\varPhi}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi a^2 B_0}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)] \tag{8.31}$$

から、運動方程式は

$$m\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2\alpha}{R}b(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)] \tag{8.32}$$

となる。

$$\lambda = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2}{mR} \tag{8.33}$$

[5]

X を

$$X = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \tag{8.34}$$

と展開する。$X(0) = 0,\ X'(0) = 0$ から $a_0 = a_1 = 0$。また運動方程式

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda t}{\tau^2}\left[1 + \alpha X + \alpha t\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right] \tag{8.35}$$

の t^0 の係数から、

$$2\alpha a_2 = 0 \tag{8.36}$$

よって $a_0 = a_1 = a_2 = 0$。

[6]

運動方程式の t^1 の係数から

$$6\alpha a_3 = -\frac{\lambda(1+\alpha a_0)}{\tau^2} \tag{8.37}$$

よって $a_0 = 0$ から

$$a_3 = -\frac{\lambda}{6\alpha\tau^2} \tag{8.38}$$

となる。$X = a_3 t^3$ という近似のもとで、

$$V_0 = X'(\tau) = 3a_3\tau^2 = -\frac{\lambda}{2\alpha} \tag{8.39}$$

[7]

　$t \geq \tau$での運動方程式は

$$\alpha\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}t^2} = -\lambda\alpha\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} \tag{8.40}$$

であるから、$X(\tau) = X_0, X'(\tau) = V_0$ を初期条件として、

$$X'(\tau+t) = V_0\mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad X(\tau+t) = X_0 + \frac{V_0}{\lambda}(1-\mathrm{e}^{-\lambda t}) \tag{8.41}$$

となる。よって

$$X(t\to\infty) = X_0 + \frac{V_0}{\lambda} = -\frac{\lambda\tau}{6\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \tag{8.42}$$

物理学 II

第 1 問

[1]

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a} \tag{8.43}$$

である。$\hat{N}$ の固有値 $n+1$ の固有状態 $|n+1\rangle$ に対し、

$$\hat{N}(\hat{a}|n+1\rangle) = (\hat{a}\hat{N} - \hat{a})|n+1\rangle = n\hat{a}|n+1\rangle \tag{8.44}$$

から $\hat{a}|n+1\rangle$ は $\hat{N}$ の固有値 n の固有状態になる。また、

$$\|\hat{a}|n+1\rangle\| = \langle n+1|\hat{N}|n+1\rangle = n+1 \tag{8.45}$$

となるから、

$$\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}\,|n\rangle \tag{8.46}$$

と書ける。また、

$$\|\hat{a}|0\rangle\| = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = 0 \tag{8.47}$$

から $\hat{a}|0\rangle = 0$。

[2]

$$\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{(n-1)!}}|n-1\rangle = \alpha|\Psi(\alpha)\rangle \tag{8.48}$$

[3]

$$\langle\hat{N}\rangle = |\alpha|^2, \quad \langle\hat{H}\rangle = \hbar\omega\left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right) \tag{8.49}$$

[4]

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\langle\hat{a}+\hat{a}^\dagger\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,(\alpha+\alpha^*), \tag{8.50}$$

$$\langle\hat{p}\rangle = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,\langle\hat{a}-\hat{a}^\dagger\rangle = -\mathrm{i}\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\,(\alpha-\alpha^*), \tag{8.51}$$

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\langle\hat{a}^2+2\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^{\dagger 2}+1\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha+\alpha^*)^2+1), \tag{8.52}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\langle\hat{a}^2-2\hat{a}^\dagger\hat{a}+\hat{a}^{\dagger 2}-1\rangle = -\frac{\hbar}{2m\omega}((\alpha-\alpha^*)^2-1). \tag{8.53}$$

よって、

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \tag{8.54}$$

であり、

$$\Delta x\,\Delta p = \frac{\hbar}{2} \tag{8.55}$$

[5]

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{N}\omega t-\mathrm{i}\omega t/2} \tag{8.56}$$

から、

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\hat{H}t/\hbar}|\Psi(\alpha_0)\rangle &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}\mathrm{e}^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega t}|n\rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t/2}|\Psi(\alpha_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\rangle.\end{aligned} \tag{8.57}$$

よって、

$$\alpha(t) = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\omega t-\theta)} \tag{8.58}$$

[6]

$$\langle\hat{x}\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}\,\alpha(t) = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,A\cos(\omega t-\theta), \tag{8.59}$$

$$\langle\hat{p}\rangle_t = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\mathrm{Im}\,\alpha(t) = -\sqrt{2m\hbar\omega}\,A\sin(\omega t-\theta) \tag{8.60}$$

これは調和振動子の古典的運動に一致するので、準古典的状態と呼ぶのは妥当である。

第 2 問

[1]

Maxwell の関係式から

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P^{-1} = \frac{TV\alpha}{C_P} \tag{8.61}$$

[2]

各領域のエンタルピーの微小変化は

$$\mathrm{d}H_i = T\mathrm{d}S_i + V\mathrm{d}P_i\,, \quad i = 1, 2. \tag{8.62}$$

である。高圧領域と低圧領域のどちらでも $\mathrm{d}P_i = 0$ であり、断熱過程であることから $\mathrm{d}S_1 + \mathrm{d}S_2 = 0$ なので、

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}H_1 + \mathrm{d}H_2 = 0 \tag{8.63}$$

となる。

[3]

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H &= -\left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P^{-1} \\ &= -\frac{1}{C_P}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial P}\right)_T + T\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T\right] \\ &- \frac{1}{C_P}\left[V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P\right] \\ &= \frac{V(\alpha T - 1)}{C_P}\end{aligned} \tag{8.64}$$

$C_P > 0,\ V > 0$ から、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V(\alpha T - 1)}{C_P} < \frac{TV\alpha}{C_P} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S \tag{8.65}$$

理想気体の場合、

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \tag{8.66}$$

から、Joule-Thomson 係数は、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = 0 \tag{8.67}$$

[4]

PVを b/Vについて 1 次まで展開すると、

$$PV = \frac{RT}{1-b/V} - \frac{a}{V} = RT + \left(RT - \frac{a}{b}\right)\frac{b}{V} \tag{8.68}$$

よって

$$B(T) = 1 - \frac{a}{bRT}. \tag{8.69}$$

ボイル温度は $B(T)=0$ となる温度である。このとき $PV = RT + \mathcal{O}(b^2/V^2)$ となり、気体は理想気体に近くなる。

[5]

$$V \approx \frac{RT}{P} + \left(1 - \frac{a}{bRT}\right)b \tag{8.70}$$

と近似すると、

$$\begin{aligned}\alpha T = \frac{T}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P &= \frac{RT}{PV} + \frac{a}{RTV} \\ &\approx 1 - \left(1 - \frac{a}{bRT}\right)\frac{b}{V} + \frac{a}{RTV}.\end{aligned} \tag{8.71}$$

よって、

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{1}{C_P}\left(\frac{2a}{RT} - b\right) \tag{8.72}$$

この符号が変化する温度は、

$$T_{\mathrm{inv}} = \frac{2a}{Rb} \tag{8.73}$$

[**6**]

a の寄与を無視すると、体積 V で排除体積 b がある気体は、体積が $V-b$ の理想気体として考えられる。このとき体積の膨張 $V_1 \to V_2$, $V_2 > V_1$ に対して

$$\frac{V_2 - b}{V_1 - b} \tag{8.74}$$

は b の増加関数である。すなわち、理想気体で考えると b が大きくなるほど激しい膨張をすることになる。それに対応して温度は低くなる。

第 3 問

[**1**]

Lorentz 力を無視すると、

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{x} - \frac{e}{m}\boldsymbol{E} \tag{8.75}$$

[**2**]

$\boldsymbol{P} = -eN\boldsymbol{x}$ から、

$$\ddot{\boldsymbol{P}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{P} + \frac{e^2 N}{m}\boldsymbol{E} \tag{8.76}$$

[**3**]

$$P = \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} E \tag{8.77}$$

[**4**]

$$\varepsilon E = \left(\varepsilon_0 + \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) E \tag{8.78}$$

$$k^2 = \left(\varepsilon_0 + \frac{e^2 N}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \mu_0 \omega^2 \tag{8.79}$$

[**5**]

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)} \tag{8.80}$$

根号の中身は ω_0 および

$$\omega_1 := \sqrt{\omega_0^2 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} \tag{8.81}$$

を境に符号を変えるので、$0 < \omega < \omega_0$, $\omega_1 < \omega$ では

$$k = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 + \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)} \omega, \tag{8.82}$$

となり、$\omega_0 < \omega < \omega_1$ では

$$k = \mathrm{i}\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m(\omega^2 - \omega_0^2)} - 1\right)} \tag{8.83}$$

となる。グラフには発散があるが、粘性項を無視する近似をしているので、仕方ない。

[6]

Lorentz 力を無視すると、

$$m\ddot{\boldsymbol{x}} = -e\boldsymbol{E} \tag{8.84}$$

[7]

[5] の結果で $\omega_0 = 0$ とすると、

$$\frac{k}{\omega} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \left(1 - \frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m \omega^2}\right)} \tag{8.85}$$

よって

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 N}{\varepsilon_0 m}} \tag{8.86}$$

とすると、$\omega < \omega_p$ のときに k は虚数になる。

[8]

誘電体に対しては電磁波は透過する。金属に対しては電磁波は完全に反射し、金属内の電磁場は指数関数的に減衰する。

第 4 問

[1.1]

$$N(\varepsilon) = \frac{L^3}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\prod_i \sqrt{\frac{2m_i\varepsilon}{\hbar^2}} \tag{8.87}$$

$$\rho(\varepsilon) = \frac{1}{L^3}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sqrt{2m_1m_2m_3\varepsilon}}{2\pi^2\hbar^3} \tag{8.88}$$

[1.2]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -eB/m_2 & 0\\ eB/m_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_x\\k_y\\k_z\end{pmatrix} \tag{8.89}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\sqrt{m_2}\,k_x\\ \sqrt{m_1}\,k_y\\ k_z\end{pmatrix} = \frac{eB}{\sqrt{m_1m_2}}\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{m_2}\,k_x\\ \sqrt{m_1}\,k_y\\ k_z\end{pmatrix} \tag{8.90}$$

$$\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{m_1m_2}} \tag{8.91}$$

$$\sqrt{m_2}\,k_x = \sqrt{m_2}\,k_0\cos(\omega_c t) \tag{8.92}$$

より、

$$k_y = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\,k_{0x}\sin(\omega_c t), \quad k_z = k_{0z} \tag{8.93}$$

[1.3]

[1.4]

$$(x, y) = \frac{\hbar k_{0x}}{\sqrt{m_1}\,\omega_c}\left(\frac{1}{\sqrt{m_1}}\sin(\omega_c t), \frac{1}{\sqrt{m_2}}\left(1-\cos(\omega_c t)\right)\right) \tag{8.94}$$

$$z = \frac{\hbar k_{0z}}{m_3} t \tag{8.95}$$

$$\epsilon(\boldsymbol{k}) = \pm\gamma\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{8.96}$$

[2.1]

$$N = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\epsilon}{\gamma}\right)^3 \tag{8.97}$$

$$\rho(\epsilon) = \frac{4\pi}{\gamma^3}\epsilon^2 \tag{8.98}$$

[2.2]

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{\hbar}\frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\boldsymbol{k}} = \pm\frac{\gamma}{\hbar}\frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{8.99}$$

$$\hbar\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \mp\frac{\gamma e}{\hbar}\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{8.100}$$

$|\boldsymbol{k}| = k_0 = \mathrm{const.}$ となる解を求めると、

$$k := k_x + \mathrm{i}k_y = k_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t}, \quad \omega_c = \pm\frac{\gamma e B}{\hbar^2 k_0} \tag{8.101}$$

[2.3]

$w = x + \mathrm{i}y$ とおくと、

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{\gamma}{\hbar}\frac{k}{|k|} = \pm\frac{\gamma}{\hbar}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t} \tag{8.102}$$

$$w = \mp\frac{\mathrm{i}\gamma}{\hbar\omega_c}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t} - 1) = -\frac{\hbar k_0}{eB}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_c t} - 1) \tag{8.103}$$

9　2014 年 (平成 26 年)

物理学 I

第 1 問

[1]

$$\begin{aligned} I &= \frac{3m}{4\pi a^3} \cdot 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\theta \int_0^a \mathrm{d}r\, r^4 \sin^2\theta \\ &= \frac{3m}{2a^3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{a^5}{5} \\ &= \frac{2}{5} m a^2 \end{aligned} \tag{9.1}$$

[2]

接地点の速度がゼロになることから、

$$v' + a\omega' = 0 \tag{9.2}$$

[3]

$$mv' = P, \quad I(\omega' - \omega) = \frac{2}{5} m a^2 (\omega' - \omega) = aP \tag{9.3}$$

以上の条件から、

$$\frac{2}{5} m a (\omega' - \omega) - m v' = \frac{1}{5} m a \left(7\omega' - 2\omega\right) = 0 \tag{9.4}$$

よって、

$$\omega' = \frac{2}{7}\omega \tag{9.5}$$

[4]

跳ね返り前後の関係は

$$m(v_n - v_{n-1}) = -P_n, \quad I(\omega_n - \omega_{n-1}) = -aP_n \tag{9.6}$$

である。1 つ目の式の a 倍から 2 つ目の式を引くと、

$$(I\omega_n - amv_n) - (I\omega_{n-1} - amv_{n-1}) = 0 \tag{9.7}$$

を得る。よって

$$l := I\omega_n - amv_n \tag{9.8}$$

は一定となる。

[5]

反跳が終わったとき、球がすべらずに転がったことから、

$$v_\mathrm{f} + a\omega_\mathrm{f} = 0. \tag{9.9}$$

これを (9.8) と連立すると、

$$l = I\omega_\mathrm{f} - amv_\mathrm{f} = -\left(\frac{I}{a} + am\right) v_f = -\frac{7}{5}mav_\mathrm{f} \tag{9.10}$$

よって、

$$v_\mathrm{f} = -\frac{5l}{7ma} \tag{9.11}$$

と表せる。また、$v_\mathrm{f} = 0$ となるためには、

$$l = I\omega_0 - amv_0 = 0 \tag{9.12}$$

となればよい。整理すると、

$$v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0 \tag{9.13}$$

となる。

第 2 問

[1]

円筒状の領域で Gauss の定理を用いると、

$$2\pi r l E(r) = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}, \quad E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{9.14}$$

となる。よって、

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}r\, E(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{r}{r_0} \tag{9.15}$$

[2]

点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ と $(a, 0), (b, 0)$ との間の距離は、

$$\sqrt{(}a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta), \quad \sqrt{(}b^2 + r^2 - 2br\cos\theta) \tag{9.16}$$

で与えられるので、

$$\phi(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta} \tag{9.17}$$

となる。

[3]

設問 [2] の結果から、静電ポテンシャルは

$$\phi(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{D^2 + r^2 - 2Dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta} \tag{9.18}$$

と書ける。$r = R$ においてこれが θ に依存しない条件は、

$$\frac{D^2 + R^2}{2DR} = \frac{d^2 + R^2}{2dR} \tag{9.19}$$

である。整理すると、

$$D = \frac{R^2}{d} \tag{9.20}$$

が得られる。これを (9.18) に代入すると、

$$\phi(r, \theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{R^2}{d^2}\frac{(r/R)^2 d^2 + R^2 - 2dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}\right) \tag{9.21}$$

となる。

[4]

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \varepsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r=R} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{2d^2/R - 2d\cos\theta}{d^2+R^2-2dR\cos\theta} - \frac{2R-2d\cos\theta}{d^2+R^2-2dR\cos\theta}\right] \\
&= \frac{\lambda(d^2-R^2)}{2\pi R(R^2+d^2-2Rd\cos\theta)}
\end{aligned} \tag{9.22}
$$

[5]

$d/R = a$ とおくと、

$$
\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R}\frac{a^2-1}{1-2a\cos\theta+a^2} = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx\right) \tag{9.23}
$$

これを $r=R$ の円周上で積分すると、

$$
R\int_0^{2\pi} \sigma \, \mathrm{d}\theta = -\lambda \tag{9.24}
$$

となる。つまり、z 軸方向の単位長さあたりの誘起される電荷は $-\lambda$ となる。

[6]

線電荷が $\theta = 0$ の位置にいるとし、σ_n がそれぞれ $\theta_n := -\psi + (n-1)\pi/2$ の位置にいるとしてよい。このとき、

$$
\frac{2\pi R\sigma_n}{\lambda} = \frac{-(R^2-d^2)}{R^2+d^2-2Rd\cos\theta_n} \tag{9.25}
$$

となる。d が R に比べて十分小さいとして、d/R に関して 2 次の項を無視すると、

$$
\frac{2\pi R\sigma_n}{\lambda} = -1 - \frac{2d}{R}\cos\theta_n \tag{9.26}
$$

となる。ここで、

$$
\cos\theta_1 = \cos\psi, \quad \cos\theta_2 = \sin\psi, \tag{9.27}
$$

から、

$$
(x_0, y_0) = (d\cos\psi, d\sin\psi) = \left(-\frac{R}{2}\left(1+\frac{2\pi R\sigma_1}{\lambda}\right), -\frac{R}{2}\left(1+\frac{2\pi R\sigma_2}{\lambda}\right)\right) \tag{9.28}
$$

となる。また、

$$\cos\theta_3 = -\cos\psi, \quad \cos\theta_4 = -\sin\psi \tag{9.29}$$

から、

$$\sigma_1 + \sigma_3 = \sigma_2 + \sigma_4 = -\frac{\lambda}{\pi R} \tag{9.30}$$

となるので、

$$\begin{aligned}(x_0, y_0) &= \left(-\frac{R}{2}\left(1 - \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_3}\right), -\frac{R}{2}\left(1 - \frac{2\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_4}\right)\right) \\ &= \left(\frac{R}{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \frac{R}{2}\frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}\right).\end{aligned} \tag{9.31}$$

物理学 II

第 1 問

[1]

ψ_S と ψ_A の節の数はそれぞれ 0 と 1 であり、振動定理から節の数が少ない ψ_S ほうが固有エネルギーが低い。

[2]

$$\langle\psi_L|\psi_R\rangle = \frac{1}{2}(\langle\psi_S|\psi_S\rangle - \langle\psi_A|\psi_A\rangle) = 0 \tag{9.32}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} \tag{9.33}$$

[3]

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & \mathrm{i}\sin\omega t \\ \mathrm{i}\sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}, \quad \omega = \frac{J}{\hbar} \tag{9.34}$$

より、$\sin^2(Jt/\hbar)$

[4.1]

$$|0\rangle = |LL\rangle, \quad |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|LR\rangle + |RL\rangle), \quad |2\rangle = |RR\rangle \tag{9.35}$$

$$\mathcal{H}|0\rangle = \mathcal{H}|2\rangle = -J(|LR\rangle + |RL\rangle) = -\sqrt{2}\,J|1\rangle \tag{9.36}$$

$$\mathcal{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(2|LL\rangle + 2|RR\rangle) = -\sqrt{2}\,J(|0\rangle + |2\rangle) \tag{9.37}$$

[4.2]

もとの固有状態で考えれば、$-2J, 0, 2J$

[4.3]

2 つの粒子が独立なことから、

$$P_1(t) = 2\sin^2\frac{Jt}{\hbar}\cos^2\frac{Jt}{\hbar} \tag{9.38}$$

$$P_2(t) = \cos^4\frac{Jt}{\hbar} \tag{9.39}$$

[5.1]

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} -A & -\sqrt{2}\,J & 0 \\ -\sqrt{2}\,J & 0 & -\sqrt{2}\,J \\ 0 & -\sqrt{2}\,J & -A \end{pmatrix} \tag{9.40}$$

[5.2]

固有方程式は、

$$E^3 + 2AE^2 + (A^2 - 4J^2)E - 4AJ^2 = (E + A)(E^2 + AE - 4J^2) = 0 \tag{9.41}$$

(パリティ対称性があるので、3×3 行列でも楽に対角化できることが保証されている。つまり、自明な固有ベクトルとして $(1, 0, -1)$ があるので、これに $\mathcal{H}$ を作用させれば少なくとも 1 つの固有値は求まる。) よって

$$E = -A, \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2}. \tag{9.42}$$

J^2/A のオーダーまで展開すると、

$$E = -A - \frac{4J^2}{A}, -A, \frac{4J^2}{A} \tag{9.43}$$

[5.3]

摂動がパリティを破っていないことに注意すると、$|1\rangle$ の成分はない。よって 2 個の粒子が複合粒子を作っている状況なので、設問 [3] と同じものを選べば良い。よってグラフは (b)。また点線が P_0、実線が P_2、一点鎖線が P_1。周期は基底状態と第一励起状態のエネルギー差を $\varDelta E$ として、

$$T = \frac{2\pi}{\varDelta E/\hbar} = \frac{\pi\hbar A}{2J^2}. \tag{9.44}$$

[6]

$A \to -B$ とすればよい。グラフは (b)。点線が P_0、実線が P_2、一点鎖線が P_1。周期は

$$T = \frac{\pi \hbar B}{2J^2} \tag{9.45}$$

[7]

引力の場合と斥力の場合の違いは、複合粒子状態 ($|0\rangle, |2\rangle$) のエネルギーがそうでない状態 ($|1\rangle$) のエネルギーよりが高いか低いかだけである。しかし、摂動がパリティを破っていないことから、$|1\rangle$ の成分はない。よって 2 つの場合で差はない。

第 2 問

[1]

$$Z = \frac{V^N}{h^{3N}N!}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_\mathrm{B}T}\right)\right)^{3N} = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{mk_\mathrm{B}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2} \tag{9.46}$$

[2]

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z = \frac{3}{2}Nk_\mathrm{B}T \tag{9.47}$$

$$C = \frac{3}{2}k_\mathrm{B}T \tag{9.48}$$

[3]

$$P = k_\mathrm{B}T\frac{\partial}{\partial V}\ln Z = \frac{Nk_\mathrm{B}T}{V} \tag{9.49}$$

[4]

相互作用がない場合の分配関数を $Z_0(T, V, N)$ と書くことにする。分配関数は、

$$Z = Z_0(T, V-b, N)\exp\left(-\frac{\alpha N^2}{V-b}\right) \tag{9.50}$$

となる。ここから、

$$P = k_\mathrm{B}T\frac{\partial}{\partial V}\ln Z = \frac{k_\mathrm{B}T}{V-b} + \frac{\alpha k_\mathrm{B}TN^2}{(V-b)^2} \tag{9.51}$$

[5]

状態方程式は $A'(V) = 0$ のときに満たされる。これは 3 点あるが、力学的に安定となるためには

$$A''(V) = \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} = -\frac{\partial P}{\partial V} < 0 \tag{9.52}$$

が成り立つ必要がある。よって安定な点は 2 つの極小点で、極大となる点は不安定。

第 3 問

[1]

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{e}^{-k_2 z}\,\mathrm{Re}\left[\tilde{\boldsymbol{E}}_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left(k_1 z - \omega t\right)\right\}\right] \tag{9.53}$$

の位相速度は、

$$v = \frac{\omega}{k_1} \tag{9.54}$$

[2]

$$d = \frac{1}{k_2} \tag{9.55}$$

[3]

(1),(2) から、

$$\tilde{k}^2 = \varepsilon\mu\omega^2 + \mathrm{i}\mu\sigma\omega =: \mu\omega\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{9.56}$$

となる。ここで、

$$\tilde{k} = \pm\sqrt{\mu\omega\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}}\left(\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right) \tag{9.57}$$

と書けるから、

$$k_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\omega\left(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}+\varepsilon\omega\right)}, \tag{9.58}$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{1}{2}\mu\omega\left(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\varepsilon\omega\right)} \tag{9.59}$$

となる。ただし符号は $k_2 > 0$ となるように選択した。

[4]

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\varepsilon\omega)}} \tag{9.60}$$

$\sigma \gg \varepsilon\omega$ のとき、

$$d \approx \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\sigma}} \propto \sigma^{-1/2} \tag{9.61}$$

$\sigma \ll \varepsilon\omega$ のとき、

$$d \approx \sqrt{\frac{4\varepsilon}{\mu\sigma^2}} \propto \sigma^{-1} \tag{9.62}$$

[5]

$-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{E}$ より、

$$\mathrm{i}\omega\boldsymbol{B} = \mathrm{i}\tilde{k}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{E}. \tag{9.63}$$

よって、位相の遅れは

$$\phi = \arg(k_1 + \mathrm{i}k_2) \tag{9.64}$$

$\sigma/\varepsilon\omega \to \infty$ では $k_1/k_2 \to 1$ から、

$$\phi = \arg(1 + \mathrm{i}) = \frac{\pi}{4} \tag{9.65}$$

$\sigma/\varepsilon\omega \to 0$ では $k_2/k_1 \to 0$ から、

$$\phi = \arg(1) = 0 \tag{9.66}$$

[6]

$z = 0$ において、

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{|\tilde{k}||\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{\mu\omega}\cos(\omega t)\cos(\omega t + \phi) = \frac{|\tilde{k}||\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{2\mu\omega}\left(\cos(2\omega t + \phi) + \cos\phi\right) \tag{9.67}$$

と書ける。よってこの時間平均をとると、

$$\frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2|\tilde{k}|\cos\phi}{2\mu\omega} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{2}\sqrt{\frac{1}{2\mu\omega}\left(\sqrt{\varepsilon^2\omega^2 + \sigma^2} + \varepsilon\omega\right)} \tag{9.68}$$

[7]

$$Q = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) \tag{9.69}$$

[**8**]

$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}$ より、

$$\langle Q \rangle = \frac{1}{2}\sigma |\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2 \mathrm{e}^{-2k_2 z} \tag{9.70}$$

$$\int_0^{+\infty} \langle Q \rangle \, \mathrm{d}z = \frac{\sigma |\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2}{4k_2} = \frac{|\tilde{\boldsymbol{E}}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} \tag{9.71}$$

ここで

$$k_1 k_2 = \frac{1}{2}\mu\omega\sigma \tag{9.72}$$

を用いた。よって、境界から導体内へ流入するエネルギーは全て Joule 熱として消費される。

第 4 問

[1]

$$
\boldsymbol{b}_1 = 2\pi \frac{\det \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & -\sqrt{3}\,a/2 \\ \boldsymbol{e}_2 & a/2 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \sqrt{3}\,a/2 & -\sqrt{3}\,a/2 \\ a/2 & a/2 \end{vmatrix}} = 2\pi \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3}\,a \\ 1/a \end{pmatrix}, \tag{9.73}
$$

$$
\boldsymbol{b}_2 = 2\pi \frac{\det \begin{vmatrix} \sqrt{3}\,a/2 & \boldsymbol{e}_1 \\ a/2 & \boldsymbol{e}_2 \end{vmatrix}}{\det \begin{vmatrix} \sqrt{3}\,a/2 & -\sqrt{3}\,a/2 \\ a/2 & a/2 \end{vmatrix}} = 2\pi \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3}\,a \\ 1/a \end{pmatrix}. \tag{9.74}
$$

$P(2\pi/\sqrt{3}\,a, 0)$, $Q(0, 4\pi/3a)$

[2]

k_{F} に対して、

$$
2 \cdot \pi k_{\mathrm{F}}^2 \frac{S}{(2\pi)^2} = 2 \cdot \frac{S}{s} \tag{9.75}
$$

が成り立つ。S は系の面積、s は単位胞の面積であり、

$$
s = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \tag{9.76}
$$

で与えられる。よって、

$$
k_{\mathrm{F}} = \sqrt{\frac{4\pi}{s}} = \sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}\, a^{-1}. \tag{9.77}
$$

同じことを波数空間でも考えられる。Fermi 面の内部の面積と Brillouin ゾーンの面積が等しいことから、

$$
\pi k_{\mathrm{F}}^2 = \frac{(2\pi)^2}{s} = \frac{8\pi^2}{\sqrt{3}\,a^2}. \tag{9.78}
$$

よって同じ答えを得る。

[4]

$$\langle \phi_i^A | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}} \rangle = \lambda_A \epsilon_A \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^A} + \lambda_B \tau \sum_{\boldsymbol{\delta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i^A+\boldsymbol{\delta})} \tag{9.79}$$

$$\langle \phi_i^B | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}} \rangle = \lambda_B \epsilon_B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^B} + \lambda_A \tau \sum_{\boldsymbol{\delta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_i^B-\boldsymbol{\delta})} \tag{9.80}$$

から、

$$\begin{pmatrix} \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^A | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^A \rangle & \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^A | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^B \rangle \\ \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^B | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^A \rangle & \langle \psi_{\boldsymbol{k}}^B | \mathcal{H} | \psi_{\boldsymbol{k}}^B \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_A & \tau \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} \\ \tau \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} & \epsilon_B \end{pmatrix} \tag{9.81}$$

となる。ここで、

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_3 = \frac{-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3} \tag{9.82}$$

と定義した。λ_A, λ_B が満たす方程式は、

$$\begin{pmatrix} \epsilon_A & \tau \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} \\ \tau \sum_j \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} & \epsilon_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} = E(\boldsymbol{k}) \begin{pmatrix} \lambda_A \\ \lambda_B \end{pmatrix} \tag{9.83}$$

となる。

[5]

まず、

$$\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k}) := \tau \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j} \tag{9.84}$$

とおく。設問 [4] で求めた方程式に非自明な解が存在する条件は、

$$E(\boldsymbol{k})^2 - (\epsilon_A + \epsilon_B) E(\boldsymbol{k}) + (\epsilon_A \epsilon_B - |\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2) = 0 \tag{9.85}$$

となる。よって

$$E(\boldsymbol{k}) = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + |\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2} \tag{9.86}$$

である。正直ここで終わりにしたいが、$|\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2$ を計算する。

$$\begin{aligned} |\mathit{\Delta}(\boldsymbol{k})|^2 &= \tau^2 \left[3 + 2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{23}) + 2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{31}) + 2\cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{12})\right] \\ &= \tau^2 \left(3 + 2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_x + \frac{1}{2}ak_y\right) + 2\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}ak_x + \frac{1}{2}ak_y\right) + 2\cos(ak_y)\right) \\ &= \tau^2 \left(3 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}ak_x\right)\cos\left(\frac{1}{2}ak_y\right) + 2\cos(ak_y)\right) \end{aligned} \tag{9.87}$$

ただし $\boldsymbol{\delta}_{ij} = \boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j$ と略記している。よって、

$$E(\boldsymbol{k}) = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2 \left(3 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}\,ak_x}{2}\right)\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 2\cos\left(ak_y\right)\right)} \tag{9.88}$$

[6]

$k_x = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} E(k_y) &= \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2 \left(1 + 4\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{ak_y}{2}\right)\right)} \\ &= \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2 \left(1 + 2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right)^2\right)}. \end{aligned} \tag{9.89}$$

ギャップが最小になるのは $\cos\left(ak_y/2\right) = -1/2$ のときなので、

$$k_y = \frac{4\pi}{3a} + 4n\pi, \quad \frac{8\pi}{3a} + 4n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{9.90}$$

のとき。ただし、これらは全て等価であり、Brilloin ゾーンに含まれる点としては

$$k_y = \pm\frac{4\pi}{3a} \tag{9.91}$$

となる。このとき、ギャップは

$$E_g = \epsilon_A - \epsilon_B \tag{9.92}$$

[7]

点 X からの k_y のずれを δk_y とおく。

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{a\,\delta k_y}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\,\delta k_y \tag{9.93}$$

から、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k}) &\approx \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)}{2}\left[1 + \frac{2\tau^2}{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}\left(\frac{\sqrt{3}\,a}{2}\,\delta k_y\right)^2\right] \\ &= \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \left[\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)}{2} + \frac{3a^2\tau^2}{4(\epsilon_A - \epsilon_B)}\,\delta k_y^2\right] \end{aligned} \tag{9.94}$$

上下のバンドの有効質量は、

$$\pm\frac{2\hbar^2(\epsilon_A-\epsilon_B)}{3a^2\tau^2} \tag{9.95}$$

となる。

[**8**]

$\epsilon_A=\epsilon_B$ とすればよい。

$$E(\boldsymbol{k})=\epsilon_A\pm\tau\left|1+2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right)\right| \tag{9.96}$$

から、点 X 付近では、

$$E(\boldsymbol{k})=\epsilon_A\pm\frac{\sqrt{3}\,a\tau}{2}\left|\delta k_y\right|. \tag{9.97}$$

10　2013 年 (平成 25 年)

物理学 I

第 1 問

[1]

運動項は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{R}}-\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2+\frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{R}}+\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2\\
&=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{\boldsymbol{R}}^2+\frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\dot{\boldsymbol{r}}^2
\end{aligned}
\tag{10.1}
$$

と変形できる。よって

$$
M=m_1+m_2,\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}
\tag{10.2}
$$

と定義すると、

$$
\mathcal{L}=\frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2+\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-U(\boldsymbol{r})
\tag{10.3}
$$

となる。

[2]

$$
\begin{aligned}
L&=\frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2-U(r)\\
&=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}\boldsymbol{e}_r+r\dot{\phi}\boldsymbol{e}_\phi)^2-U(r)\\
&=\frac{1}{2}\mu(\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2)-U(r)
\end{aligned}
\tag{10.4}
$$

[3]

$$
\begin{aligned}
\mu\ddot{r}&=\mu r\dot{\phi}^2-\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\\
&=\frac{l^2}{\mu r^3}-\frac{\mathrm{d}U(r)}{\mathrm{d}r}\\
&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(U(r)+\frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}\right)
\end{aligned}
\tag{10.5}
$$

これは $U(r)$ に遠心力ポテンシャルを加えた運動方程式になっている。

[4]

$$\mu\dot{r}\ddot{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U(r) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2}\right) \tag{10.6}$$

から、

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U(r) + \frac{1}{2}\frac{l^2}{\mu r^2} \tag{10.7}$$

は時間変化しない。

[5]

$\boldsymbol{l}$ は $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}$ と垂直であり、$\boldsymbol{r}$ とも垂直である。よって、

$$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{A} = 0 \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} &= \mu^2\dot{\boldsymbol{r}}^2\boldsymbol{r}^2 - \mu^2(\boldsymbol{r}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})^2 - \mu k r \\ &= \mu^2 r^4\dot{\phi}^2 - \mu k r \\ &= l^2 - \mu k r = A r\cos\alpha \end{aligned} \tag{10.9}$$

$$r = \frac{l^2}{\mu k + A\cos\alpha}, \quad \frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\alpha\right) \tag{10.10}$$

第 2 問

[1.1]

Biot-Savart の法則から

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{aI}{(a^2 + z^2)^{3/2}} a \, \mathrm{d}\theta \tag{10.11}$$

となる。よって、

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \tag{10.12}$$

[1.2]

どの程度厳密にやるのかわからないが、N が十分大きいときは、

$$lB_z = \mu_0 NI, \quad B_z = \frac{\mu_0 NI}{l} \tag{10.13}$$

となる。

[1.3]

$$V = N \cdot \pi a^2 \cdot \frac{\mathrm{d}B_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi \mu_0 N^2 a^2}{l} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{10.14}$$

$$L = \frac{\pi \mu_0 N^2 a^2}{l} \tag{10.15}$$

[2]

コンデンサーの軸方向を z 軸とする。電場は、

$$\boldsymbol{E} = \frac{v_0}{d} \sin(\omega t) \boldsymbol{e}_z \tag{10.16}$$

と表される。また z 軸正方向から見て反時計回りの方向の磁場を $B(r, t)$ とおく。r は z 軸からの距離である。$B(r, t)$ を半径 r の円周上で積分すると、

$$2\pi r B(r, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{\omega v_0}{d} \cos(\omega t) \tag{10.17}$$

となる。よって、

$$B(r, t) = \frac{\omega \varepsilon_0 \mu_0 v_0}{2d} r \cos(\omega t) \tag{10.18}$$

[3.1]

回路方程式は、

$$\frac{Q(t)}{C} = L\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2Q(t)}{\mathrm{d}t^2} \tag{10.19}$$

となる。よって Q, I の時間変化は単振動となり、

$$Q(t) = CV\cos(\omega t), \quad I(t) = -\omega CV\sin(\omega t), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{10.20}$$

で与えられる。

[3.2]

コノデンサーとソレノイドのエネルギーはそれぞれ

$$\frac{1}{2}CV^2\cos^2(\omega t), \quad \frac{1}{2}CV^2\sin^2(\omega t) \tag{10.21}$$

となる。全エネルギーは保存しており、コンデンサーとソレノイドの間でエネルギーが交互に移動していることが分かる。

[3.3]

全エネルギーは $QV/2 \to QV = CV^2$ に変化する。またキャパシタンスが $C \to C/2$ と変化するので、電流の振動数が $\sqrt{2}$ 倍になる。

物理学 II

第 1 問

[1]

σ_x の固有ベクトルおよび固有値は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm 1\end{pmatrix}, \quad \pm 1 \tag{10.22}$$

σ_y の固有ベクトルおよび固有値は、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \pm \mathrm{i}\end{pmatrix}, \quad \pm 1 \tag{10.23}$$

となる。

[2]

[2.1]

$p_y = p_z = 0,\ \boldsymbol{E} = (0, 0, E)$ を代入すると、

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + H_{\mathrm{SO}} = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\gamma}{\hbar} p_x E \sigma_y \tag{10.24}$$

[2.2]

固有関数を

$$\psi_\pm = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} |y\pm\rangle \tag{10.25}$$

とおく。ただし、$|y\pm\rangle$ は σ_y の固有値 ± 1 の固有状態である。エネルギー固有値は、

$$E_\pm = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \mp \gamma E k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k \mp \frac{m\gamma E}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{m\gamma^2 E^2}{2\hbar^2} \tag{10.26}$$

となる。

[2.3]

ハミルトニアンは、

$$H = \frac{p_x^2}{2m} - \frac{\gamma}{\hbar} p_x E \sigma_y + \frac{1}{2} g \mu_{\mathrm{B}} B \sigma_x \tag{10.27}$$

となる。固有エネルギーは

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \pm \sqrt{(\gamma E k)^2 + \left(\frac{g\mu_{\mathrm{B}} B}{2}\right)^2} \tag{10.28}$$

となる。ただし、ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}$ からの固有値が $\pm|\boldsymbol{v}|$ となることを用いた。設問 [2.3] と比べると、準位交差していた部分が上下のバンドに分かれている。

第 2 問

[1]

エネルギーが E であるような状態は、

$$E = \frac{1}{2}m(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2) \tag{10.29}$$

で与えられる。よって、ミクロカノニカル分布は 4 次元の速度の空間上での球面上の一様な分布となる。その半径は、$\sqrt{2E/m}$ で与えられる。

[2]

極座標を用いると、

$$\begin{aligned} S_{n+1}(r) &= \int_{-r}^{r} S_n(r\sin\theta)\frac{\mathrm{d}(r\cos\theta)}{\sin\theta} \\ &= \int_{-r}^{r} \mathrm{d}q\,\frac{rS_n(\sqrt{r^2-q^2})}{\sqrt{r^2-q^2}} \end{aligned} \tag{10.30}$$

となる。よって $S_1(r) = 2$ からはじめれば、与えられた公式が導かれる。

[3]

$$\int P(v_1)\,\mathrm{d}v_1 = \frac{1}{S_{2N}(r)}\int_{-r}^{r} \mathrm{d}v_1\,\frac{rS_{2N-1}(\sqrt{r^2-v_1^2})}{\sqrt{r^2-v_1^2}} \tag{10.31}$$

と書ける。ここで $r = \sqrt{2E/m}$ である。$N = 2$ のとき、

$$P(v_1) \propto \frac{rS_3(\sqrt{2E/m - v_1^2})}{\sqrt{2E/m - v_1^2}} \propto \sqrt{\frac{2E}{m} - v_1^2} \tag{10.32}$$

[4]

$$P(v_1) \propto \frac{rS_{2N-1}(\sqrt{2E/m - v_1^2})}{\sqrt{2E/m - v_1^2}} \propto \left(\frac{2N\varepsilon}{m} - v_1^2\right)^{N-3/2} \tag{10.33}$$

[5]

$$P(v_1) \propto \left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\varepsilon}\right)^{N-3/2} \to \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2\varepsilon}\right) \tag{10.34}$$

よって $N \to \infty$ で Maxwell 速度分布になる。

[6]

設問 [5] の結果を

$$P(v_1) \propto \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right) \tag{10.35}$$

と比較すると、

$$T = \frac{\varepsilon}{k_{\mathrm{B}}} \tag{10.36}$$

となる。(1 粒子あたりのエネルギーは $\varepsilon = 2 \cdot k_{\mathrm{B}}T/2$ となり妥当。)

第 3 問

[1]

$$D(\boldsymbol{r}, t) = \frac{4\pi a^2 \sigma}{4\pi r^2} = \sigma \left(\frac{a}{r}\right)^2 \tag{10.37}$$

[2]

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{10.38}$$

[3]

$$\int_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_S \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\, \mathrm{d}S \tag{10.39}$$

[4]

C に囲まれる面の、原点 O から見た立体角は、

$$2\pi(1 - \cos\theta) \tag{10.40}$$

で与えられる。よって、

$$\varDelta\varPsi = 4\pi a^2 \sigma \cdot \varDelta \left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right) = 2\pi a^2 \sigma \sin\theta\, \varDelta\theta \tag{10.41}$$

となる。

$$v\, \varDelta t = \varDelta(d \cot\theta) = -\frac{d}{\sin^2\theta}\, \varDelta\theta \tag{10.42}$$

より、

$$\varDelta\varPsi == -\frac{2\pi a^2 \sigma v}{d} \sin^3\theta\, \varDelta t\,. \tag{10.43}$$

[5]

$$H = \frac{|\, \varDelta\varPsi / \varDelta t\,|}{2\pi d} = \frac{a^2 \sigma v}{d^2} \sin^3\theta \tag{10.44}$$

[6]

$$u(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{2}\mu_0 H(\boldsymbol{r}, t)^2 \tag{10.45}$$

[7]

$$\begin{aligned}
&\int u(\boldsymbol{r}, t)\,\mathrm{d}^3 x \\
&= \frac{1}{2}\mu_0 a^4 \sigma^2 v^2 \cdot 2\pi \int_a^\infty r^2\,\mathrm{d}r \int_{-1}^1 \mathrm{d}\cos\theta\,\frac{1}{(r\sin\theta)^4}\sin^6\theta \\
&= \pi\mu_0 a^4 \sigma^2 v^2 \int_a^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}\int_{-1}^1 (1-c^2)\,\mathrm{d}c \\
&= \frac{4\pi a^3}{3}\mu_0 \sigma^2 v^2
\end{aligned} \tag{10.46}$$

[8]

微小球の運動に伴う全エネルギーは、

$$\frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{4\pi a^3}{3}\mu_0\sigma^2 v^2 = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{8\pi a^3 \mu_0 \sigma^2}{3}\right)v^2 \tag{10.47}$$

となる。

物理的意味: 電荷の自己エネルギーが質量に転化されている。もう少し説明すると、荷電していない半径 a の球を q だけ帯電させるためにかかるエネルギーは

$$\mathit{\Delta} E = \int_0^q \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 a}\,\mathrm{d}q' = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a} \tag{10.48}$$

となる。よって

$$\mathit{\Delta} m = \frac{\mathit{\Delta} E}{c^2} = \frac{\mu_0 q^2}{8\pi a} = 2\pi a^3 \mu_0 \sigma \tag{10.49}$$

係数がずれているので、なにか見落としている気がする。

第 4 問

[1]

波数の大きさが k 以下になるような状態数は、

$$N \propto k^d \propto \omega^d \tag{10.50}$$

となる。よって、

$$D(\omega) = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\omega} \propto \omega^{d-1}. \tag{10.51}$$

よって (a)3 次元の場合は $p = 2$、(b)2 次元の場合は $p = 1$ となる。

[2]

フォノンによるエネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \int_0^\infty \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1} D(\omega)\,\mathrm{d}\omega \\ &\propto \int_0^\infty \frac{\omega^d\,\mathrm{d}\omega}{\mathrm{e}^{\hbar\omega/k_\mathrm{B}T} - 1} \\ &\propto T^{d+1} \end{aligned} \tag{10.52}$$

となる。よって、

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} \propto T^d. \tag{10.53}$$

すなわち (a)3 次元の場合 $q = 3$、(b)2 次元の場合 $q = 2$。

[3]

この系は面内の方が弾性力が大きい。弾性力が大きいほど ω も大きいので、(i) が面間、(ii) が面内。

[4]

$\omega_0 \ll \omega_a$ では全ての方向で分散関係が線形になる。等エネルギー面は、

$$v_a^2 k_a^2 + v_b^2(k_{b,1}^2 + k_{b,2}^2) = \omega_0^2 \tag{10.54}$$

で与えられる。これは楕円体の表面である。ただし面に垂直な波数成分を k_a、水平な波数成分を $k_{b,1}, k_{b,2}$ とし、それぞれの方向の音速を v_a, v_b とおいた。

次に $\omega_a \ll \omega_0 \ll \omega_b$ では、面に垂直な方向のフォノンによるエネルギーは ω_a でほぼ一定になってしまう。よって等エネルギー面は

$$v_b^2(k_{b,1}^2 + k_{b,2}^2) = \omega_0^2 - \omega_a^2 \tag{10.55}$$

で与えられる。これは円筒である。

[5]

$\omega_0 \ll \omega_a$ では、等エネルギー面の面積は ω^2 に比例する。よってこのとき

$$D(\omega) \propto \omega^2, \quad r = 2. \tag{10.56}$$

次に $\omega_a \ll \omega_0 \ll \omega_b$ では、等エネルギー面の面積は ω に比例する。よってこのとき

$$D(\omega) \propto \omega, \quad r = 1. \tag{10.57}$$

[6]

$k_\mathrm{B}T \ll \hbar\omega_a$ のとき、設問 [2] の 3 次元の場合と同様に

$$C_V \propto T^3, \quad s = 3 \tag{10.58}$$

が言える。次に $\hbar\omega_a \ll k_\mathrm{B}T \ll \hbar\omega_b$ のとき、面に垂直な方向のフォノンによる比熱は無視でき、設問 [2] の 2 次元の結果から、

$$C_V \propto T^2, \quad s = 2 \tag{10.59}$$

となる。最後に $\hbar\omega_b \ll k_\mathrm{B}T$ のとき、全ての振動モードの比熱が k_B で一定になるので

$$C_V \propto T^0, \quad s = 0 \tag{10.60}$$

となる。

11　2012 年 (平成 24 年)

物理学 I

第 1 問

[1]

$\boldsymbol{F}$ は図 1 を前方から見て角度 $7\pi/6$ の向き。$\boldsymbol{F}'$ は角度 π の向き。B へのモーメントの釣り合いから

$$F - F' = 0 \tag{11.1}$$

[2]

B と C の間の垂直抗力の大きさを T とおく。C の y 方向の釣り合いから、

$$2\left(\frac{1}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}T\right) = F + \sqrt{3}\,T = mg. \tag{11.2}$$

また B の x 方向の釣り合いから、

$$-F' - \frac{\sqrt{3}}{2}F + \frac{1}{2}T = 0. \tag{11.3}$$

これらを $F' = F$ と連立すると、

$$F = \frac{mg}{4 + 2\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}mg, \quad T = \frac{1}{2}mg \tag{11.4}$$

が得られる。また B と床との間の垂直抗力 $T' = 3/2mg$ である。円柱が静止する条件は、

$$\frac{F}{T} = 2 - \sqrt{3} < \mu, \quad \frac{F'}{T'} = \frac{2-\sqrt{3}}{3} < \mu'. \tag{11.5}$$

[3]

$$I = \frac{m}{\pi a^2 l} \cdot 2\pi l \int_0^a r^3 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2}ma^2 \tag{11.6}$$

[4]

運動方程式は、

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{I}{a}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\mu'' mg \tag{11.7}$$

で与えられる。これを解くと、

$$v = v_0 - \mu'' gt, \quad \omega = \omega_0 - \frac{2\mu'' g}{a}t \tag{11.8}$$

となる。$v = 0$ となるときの角速度は、

$$\omega_0 - \frac{2\mu'' g}{a} \cdot \frac{v_0}{\mu'' g} = \omega_0 - \frac{2v_0}{a}. \tag{11.9}$$

[5]

滑らずに転がりはじめるのは $v + a\omega = 0$ となるとき。このときの速さ $|v|$ は、

$$|v| = -\left(v_0 - \mu'' g \cdot \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g}\right) = \frac{a\omega_0 - 2v_0}{3} \tag{11.10}$$

[6]

$v + a\omega = 0$ となる時間が T に到達した後、S に到達するまでの間になければならない。T, S に到達する時間はそれぞれ

$$\frac{v_0}{\mu'' g}, \quad \frac{2v_0}{\mu'' g} \tag{11.11}$$

であり、$v + a\omega = 0$ となる時間は、

$$t = \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g} \tag{11.12}$$

で与えられるから、求める条件は

$$\frac{v_0}{\mu'' g} < \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g} < \frac{2v_0}{\mu'' g} \tag{11.13}$$

である。整理すると、

$$\frac{2v_0}{a} < \omega_0 < \frac{5v_0}{a} \tag{11.14}$$

となる。

第 2 問

[1]

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\phi(x) \tag{11.15}$$

より、

$$v(x) = \sqrt{\frac{2e\phi(x)}{m}} \tag{11.16}$$

[2]

連続の式から

$$\frac{\partial\rho(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial i(t,x)}{\partial x} \tag{11.17}$$

である。定常状態では左辺はゼロなので、$\mathrm{d}i/\mathrm{d}x = 0$ となる。よって $i(x)$ は定数となり、$n(x)v(x) > 0$ から $i = -i_0 (i_0 > 0)$ となる。

[3]

$$\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}^2\phi(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{i_0}{v(x)} = i_0 \sqrt{\frac{m}{2e}}\,\phi(x)^{-1/2} \tag{11.18}$$

よって

$$A = \frac{i_0}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}, \quad \alpha = -\frac{1}{2}. \tag{11.19}$$

[4]

設問 [3] の方程式

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = A\phi^{-1/2} \tag{11.20}$$

を $\phi(0) = 0$ のもとで解く。$\phi = Bx^\beta$ とおくと、

$$B\beta(\beta-1)x^{\beta-2} = AB^{-1/2}x^{-\beta/2} \tag{11.21}$$

から、

$$\beta = \frac{4}{3}, \quad B = \left(\frac{9}{4}A\right)^{2/3} \tag{11.22}$$

とすればよい。

$$\phi(x) = \left(\frac{9i_0}{4\varepsilon_0}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} x^{4/3} \tag{11.23}$$

[**5**]

$$V = \phi(L) = \left(\frac{9i_0}{4\varepsilon_0}\right)^{2/3} \left(\frac{m}{2e}\right)^{1/3} L^{4/3} \tag{11.24}$$

物理学 II

第 1 問

[1]

$\hat{X} \propto \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ から $\langle n|q\hat{X}|n \pm 1\rangle$ のみが値をもつ。つまり $|n \pm 1\rangle$ に遷移しうる。

[2]

$$\langle n|\lambda \hat{X}^4|n\rangle = \lambda \left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2 \langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4|n\rangle \tag{11.25}$$

ここで

$$\begin{aligned}
&\langle n|(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)^4|n\rangle \\
&= (n+1)(n+2) + (n+1)^2 + (n+1)n + n(n+1) + n^2 + n(n-1) \\
&= 6n^2 + 6n + 3
\end{aligned} \tag{11.26}$$

から、$|n\rangle$ のエネルギーの変化は、

$$3\lambda(2n^2 + 2n + 1)\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2 \tag{11.27}$$

となる。

[3]

$|n\rangle'$ には $|n-4\rangle, |n-2\rangle, |n\rangle, |n+2\rangle, |n+4\rangle$ の成分が含まれているので、$\langle n|'(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)|8\rangle' \neq 0$ となる n は、

$$n = 3, 5, 7, 9, 11, 13. \tag{11.28}$$

このような $|n\rangle'$ に遷移しうる。

[4]

$$[\hat{H}_0, \hat{a}] = -\hbar\omega_0 \hat{a}, \quad [\hat{H}_0, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger, \tag{11.29}$$

より、

$$\begin{aligned}\hat{X}(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}H_0t/\hbar}\hat{X}(0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_0t/\hbar} \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0t}\hat{a}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0t}\hat{a}^\dagger\right) \\ &= \cos(\omega_0t)\hat{X}(0)+\frac{1}{m\omega_0}\sin(\omega_0t)\hat{P}(0) \end{aligned} \tag{11.30}$$

[5]

$\langle n|\hat{X}(0)|n\rangle = \langle n|\hat{P}(0)|n\rangle = 0$ から、設問 [4] の結果より

$$\langle n|\hat{X}(t)|n\rangle = 0 \tag{11.31}$$

となる。位置の期待値が有限の振幅で振動する状態の例としては、コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \quad \alpha\in\mathbb{C} \tag{11.32}$$

が挙げられる。これは $\hat{a}$ の固有値 α の固有状態なので、

$$\langle\alpha|\hat{X}(t)|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_0t}\alpha+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0t}\alpha^*\right) \tag{11.33}$$

となり、振動する。

第 2 問

[1]

$$f_{\mathrm{BE}}(E)=\frac{1}{\mathrm{e}^{(E-\mu)/k_{\mathrm{B}}T}-1} \tag{11.34}$$

$E-\mu=0$ でこれは発散するので、$\mu<0$ でなければいけない。

[2]

$f_{\mathrm{BE}}(E)$ は μ についての増加関数であり、$-\mu$ を大きくしていくと指数関数的に減衰する。

[3]

エネルギーが E 以下となるような $\boldsymbol{p}$ の、運動量空間における体積は

$$\frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2} \tag{11.35}$$

で与えられる。よってエネルギーが E 以下の状態数は

$$N(E)=\left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3\frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2}=\frac{4V}{3\sqrt{\pi}}\left(\frac{mE}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{11.36}$$

となる。状態密度は、

$$D(E)=\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}E}=\frac{2V}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}E^{1/2} \tag{11.37}$$

[4]

N_{t} は $\mu=0$ のときに最大。よって、$D(E)=AE^{1/2}$ とおくと、

$$\begin{aligned}N_{\mathrm{t}}^{\max}&=A\int_0^\infty\frac{E^{1/2}}{\mathrm{e}^{\beta E}-1}\,\mathrm{d}E\\&=A\beta^{-3/2}\Gamma(3/2)\zeta(3/2)\\&=\zeta(3/2)V\left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\end{aligned} \tag{11.38}$$

これは $T\to 0$ でゼロになる。

[5]

$$\zeta(3/2)\frac{V}{\hbar^3}\left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{c}}}{2\pi}\right)^{3/2}=N \tag{11.39}$$

$$T_{\mathrm{c}}=\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}}\left(\frac{1}{\zeta(3/2)}\frac{N}{V}\right)^{2/3} \tag{11.40}$$

[6]

$E>0$ に対する分布は $\mu=0$ とした $f_{\mathrm{BE}}(E)$ で与えられ、さらに $E=0$ の準位に $N-N_{\mathrm{t}}^{\max}$ 個の粒子がいる。

[7]

$$\begin{aligned}E&=A\int_0^\infty\frac{E^{3/2}}{\mathrm{e}^{\beta E}-1}\,\mathrm{d}E\\&=A\beta^{5/2}\mathit{\Gamma}(5/2)\zeta(5/2)\\&=\frac{3V}{2}\zeta(5/2)\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_{\mathrm{B}}T)^{5/2}\end{aligned} \tag{11.41}$$

$$C=\frac{15V}{4}\zeta(5/2)\left(\frac{mk_{\mathrm{B}}T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \tag{11.42}$$

[8]

$$\begin{aligned}T_{\mathrm{c}}/\mathrm{K}&=\frac{2\pi\hbar^2}{mk_{\mathrm{B}}}\left(\frac{1}{\zeta(3/2)}\frac{N}{V}\right)^{2/3}\\&=\frac{2\pi\times1.1^2}{6.7\times1.4}\times10^{-18}\times\left(\frac{1.5}{2.61\times6.7}\times10^{29}\right)^{2/3}\\&\approx 8^{2/3}=4\end{aligned} \tag{11.43}$$

(ちゃんと計算すると 3 なのだけど、計算機使わないと無理では?)

[9]

ヘリウム原子間の相互作用

第 3 問

[1]

屈折が起こらない条件を求めれば良い。光線が屈折角 θ' で屈折するとき、

$$\frac{k_0 n_2 \sin\theta}{k_0 n_1 \sin\theta'} = 1 \tag{11.44}$$

が成り立つ。このような $\sin\theta'$ が存在しない条件は、

$$\sin\theta' = \frac{\beta}{k_0 n_1} > 1 \tag{11.45}$$

よって β の取りうる範囲は、

$$k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2 \tag{11.46}$$

[2]

Maxwell 方程式から、

$$\mathrm{i}\beta E_y = -\mathrm{i}\mu_0 \omega H_x, \tag{11.47}$$

$$\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\mu_0\omega H_z, \tag{11.48}$$

$$\mathrm{i}\beta H_y = 0, \tag{11.49}$$

$$-\mathrm{i}\beta H_x - \frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}\epsilon_j \omega E_y, \tag{11.50}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_y}{\mathrm{d}x} = 0. \tag{11.51}$$

となる。整理すると、

$$\frac{\mathrm{d}E_y}{\mathrm{d}x} = -\mathrm{i}\mu_0\omega H_z \tag{11.52}$$

$$\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = \mathrm{i}\left(\frac{\beta^2}{\mu_0\omega} - \epsilon_j\omega\right) E_y \tag{11.53}$$

$$H_x = -\frac{\beta}{\mu_0\omega}E_y, \quad H_y = 0 \tag{11.54}$$

[3]

$H_z(x) = 0$ と仮定する。このとき領域 II で

$$E_y = \frac{\mu_0\omega}{\mathrm{i}(\beta^2 - \varepsilon_2\mu_0\omega^2)}\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = 0 \tag{11.55}$$

が成り立つ。ただし分母が

$$\beta^2 - \varepsilon_2\mu_0\omega^2 = \beta^2 - (k_0 n_2)^2 \neq 0 \tag{11.56}$$

となることに注意する。ここから $H_x = 0$ も言えるので、電磁場の全ての成分がゼロになってしまう。よって $H_z(x) \neq 0$

[4]

設問 [2] で求めた方程式から

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y}{\mathrm{d}x^2} = -\mathrm{i}\mu_0\omega\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = (\beta^2 - \epsilon_j\mu_0\omega^2)E_y \tag{11.57}$$

となるので、

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_y(x)}{\mathrm{d}x^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2)E_y(x) = 0, \quad j = \begin{cases} 1 & (|x| > d) \\ 2 & (|x| < d) \end{cases} \tag{11.58}$$

[5]

領域 $|x| < d$ における $E_y(x)$ を

$$E_y(x) = a\cos(kx), \quad k = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} \tag{11.59}$$

とおく。また $x > d$ における $E_y(x)$ を

$$E_y(x) = b\mathrm{e}^{-\kappa x}, \quad \kappa = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} \tag{11.60}$$

とおく。接続条件から

$$\begin{aligned} &a\cos(kd) = c\mathrm{e}^{-\kappa d} \\ &-ka\sin(kd) = -\kappa c\mathrm{e}^{-\kappa d} \end{aligned} \tag{11.61}$$

よって、

$$k\tan(kd) = \kappa \tag{11.62}$$

となる。よって

$$A(\beta) = kd = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}\, d, \quad B(\beta) = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_1^2}{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}} \tag{11.63}$$

[**6**]

$$F(\beta) = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}\, d - \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_1^2}{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}}\right) \tag{11.64}$$

である。$\beta \to k_0 n_1$ とすると

$$F(\beta) = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}\, k_0 d > 0 \tag{11.65}$$

となる。また $\beta \to k_0 n_2$ とすると

$$F(\beta) = -\frac{\pi}{2} < 0 \tag{11.66}$$

となる。よって、$F(\beta) = 0$ となる点が少なくとも 1 つ存在する。方程式を満たす β が一つだけ存在する条件は、

$$\sqrt{n_2^2 - n_2^2}\, k_0 d < \pi \tag{11.67}$$

である。このとき $E_y(x)$ の概形としては、山が一つでき、$|x| > d$ で減衰していく。

第 4 問

[1]

運動方程式は

$$m\ddot{u}_n = C_1(v_n - u_n) + C_2(v_{n-1} - u_n), \tag{11.68}$$
$$m\ddot{v}_n = C_2(u_{n+1} - v_n) + C_1(u_n - v_n). \tag{11.69}$$

解として

$$u_n = u\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kan},\ v_n = v\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}ka(n+1/2)} \tag{11.70}$$

を仮定すると、

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - C_1 - C_2 & C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka/2} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka/2} \\ C_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka/2} + C_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka/2} & m\omega^2 - C_1 - C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{11.71}$$

となる。この方程式が非自明な解をもつためには、

$$m\omega^2 = C_1 + C_2 \pm |C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka/2} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka/2}| \tag{11.72}$$

であればよい。計算上のテクニックとしては、Pauli 行列の線形結合

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha^* & 0 \end{pmatrix} \tag{11.73}$$

の固有値が $\pm|\alpha|$ であることを覚えておくと計算が簡便になる。よって、

$$\omega = \sqrt{\frac{C_1 + C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos(ka)}}{m}} \tag{11.74}$$

[2]

長波長での分散関係は、

$$\begin{aligned} m\omega^2 &= C_1 + C_2 \pm \sqrt{(C_1 + C_2)^2 - C_1C_2(ka)^2} \\ &= C_1 + C_2 \pm \left(C_1 + C_2 - \frac{C_1C_2(ka)^2}{2(C_1 + C_2)}\right) \end{aligned} \tag{11.75}$$

から、

$$\omega_\mathrm{a} = \sqrt{\frac{C_1C_2}{2m(C_1 + C_2)}}\,ak, \quad \omega_\mathrm{o} = \sqrt{\frac{2(C_1 + C_2)}{m}} - \frac{C_1C_2(ka)^2}{4\sqrt{m(C_1 + C_2)^3}} \tag{11.76}$$

ただし ω_a は音響フォノンを表し、ω_o は光学フォノンを表す。よって群速度は

$$\frac{\mathrm{d}\omega_\mathrm{a}}{\mathrm{d}k} = \sqrt{\frac{C_1C_2}{2m(C_1+C_2)}}\,a, \quad \frac{\mathrm{d}\omega_\mathrm{o}}{\mathrm{d}k} = -\frac{C_1C_2a^2}{2\sqrt{m(C_1+C_2)^3}}k \tag{11.77}$$

となる。

[3]

音響フォノンは u と v が同じ向きに振動し、光学フォノンは u と v が反対向きに振動する。

[4]

まず $\boldsymbol{K}_\mathrm{i}, \boldsymbol{K}_\mathrm{f}, \boldsymbol{q}_\mathrm{B}$ の関係は

$$\boldsymbol{K}_\mathrm{i} = \boldsymbol{K}_\mathrm{f} + \boldsymbol{q}_\mathrm{B} \tag{11.78}$$

で与えられる。$\omega_\mathrm{i} \gg \omega_\mathrm{B}$ のとき、$\omega_\mathrm{i} \approx \omega_\mathrm{f}$ から $|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}| \approx |\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|$ である。よって、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{q}_\mathrm{B}|^2 &= |\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|^2 + |\boldsymbol{K}_\mathrm{f}|^2 - 2|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}||\boldsymbol{K}_\mathrm{f}|\cos\theta \\ &\approx 2|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|^2(1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{11.79}$$

となる。よって主要な寄与をとると、

$$|\boldsymbol{q}_\mathrm{B}| = 2|\boldsymbol{K}_\mathrm{i}|\sin\frac{\theta}{2} \tag{11.80}$$

[5]

$$\frac{\omega_\mathrm{B}}{v_\mathrm{a}} = \frac{2n\omega_\mathrm{i}}{c}\sin\frac{\theta}{2} \tag{11.81}$$

[6]

$$\begin{aligned} v_\mathrm{a} &= \frac{c}{2n}\frac{\omega_\mathrm{B}}{\omega_\mathrm{i}} \\ &= \frac{c}{2n}\frac{\lambda_\mathrm{i}}{\lambda_\mathrm{B}} \\ &= \frac{3.0\times 680\times 3.0\times 10^{8-9-2}}{2\times 2.4} \\ &\approx 1.3\,\mathrm{m/s} \end{aligned} \tag{11.82}$$

[**7**]

$k = \pi/a$ のとき、

$$\omega_{\mathrm{a}} = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}, \quad \omega_{\mathrm{o}} = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \tag{11.83}$$

となる。エネルギー保存から、

$$\frac{\hbar}{2M_{\mathrm{n}}}\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{i}j}}\right)^2 - \frac{\hbar}{2M_{\mathrm{n}}}\left(\frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^2 = \sqrt{\frac{2C_j}{m}} \tag{11.84}$$

よって

$$C_j = \frac{2m\pi^4\hbar^2}{M_{\mathrm{n}}^2}\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{i}j}} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^2 \tag{11.85}$$

[**8**]

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{2m\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)} \\ &= \frac{M_{\mathrm{n}}}{\pi^2\hbar}\sqrt{\left(\frac{1}{\lambda_{\mathrm{i}1}} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^{-2} + \left(\frac{1}{\lambda_{2j}} - \frac{1}{\lambda_{\mathrm{f}}}\right)^{-2}} \end{aligned} \tag{11.86}$$

12　2011 年 (平成 23 年)

第 1 問

[1]

- (i) 糸が伸びない・たるまないため張力は仕事をしない。
- (ii) 張力の方向が原点 O ではなく点 Q を向いているため

[2]

$$\boldsymbol{r} = a\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} + (l_0 - a\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{12.1}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} - a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{pmatrix} - (l_0 - a\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix} \\ &= -(l_0 - a\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{12.2}$$

$$\begin{aligned}L = m\det(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) &= -m(l_0 - a\varphi)^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\det\begin{pmatrix}-\sin\varphi & \cos\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi\end{pmatrix} \\ &= m(l_0 - a\varphi)^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{12.3}$$

[3]

$$\boldsymbol{v}^2 = (l_0 - a\varphi)^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = v_0^2 \tag{12.4}$$

より、

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{v_0}{l_0 - a\varphi} \tag{12.5}$$

根号を取る際に $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t > 0$ から正符号を採用した。これを解くと、

$$\begin{aligned}&(l_0 - a\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = v_0\,\mathrm{d}t \\ &\frac{1}{2}a\varphi^2 - l_0\varphi + v_0 t + C = 0\end{aligned} \tag{12.6}$$

$t=0$ で $\varphi=0$ となることから $C=0$ であり、

$$\varphi=\frac{l_0}{a}-\sqrt{\frac{l_0^2}{a^2}-\frac{2v_0t}{a}} \tag{12.7}$$

となる。ただし $t=0$ のときに $\varphi=0$ となるように第 2 項の符号を決めた。

次に、$l_0-a\varphi=0$ となる時刻 τ は

$$\frac{l_0^2}{a^2}-\frac{2v_0\tau}{a}=0,\quad \tau=\frac{l_0^2}{2v_0a} \tag{12.8}$$

で与えられる。

[4]

質点に働く力は張力のみなので、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}&=m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=-v_0\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\\ &=-\frac{mv_0^2}{l_0-a\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{12.9}$$

[5]

モーメントは

$$\begin{aligned}N&=\det(\boldsymbol{r},\boldsymbol{T})=-\frac{mv_0^2a}{l_0-a\varphi}\det\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}\\ &=-\frac{mv_0^2a}{l_0-a\varphi}.\end{aligned} \tag{12.10}$$

一方

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mv_0(l_0-a\varphi)\right)=-mv_0a\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\frac{mv_0^2a}{l_0-a\varphi} \tag{12.11}$$

となって、$N=\mathrm{d}L/\mathrm{d}t$ が成り立つ。

第 2 問

[1.1]

散乱を受けてから t 経った後の電子の速度は

$$v = \frac{qE}{m}t \tag{12.12}$$

よって、

$$v_a = \frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau} \frac{qE}{m}t\,\mathrm{d}t = \frac{qE\tau}{m} \tag{12.13}$$

[1.2]

電流は、

$$IL = qv_a \cdot n\pi a^2 L \tag{12.14}$$

を満たすので、

$$I = \frac{\pi a^2 q^2 n\tau}{mL}V, \quad V = EL \tag{12.15}$$

となる。よって Ohm の法則が成り立つ。また

$$\frac{I}{\pi a^2} = \sigma E \tag{12.16}$$

から

$$\sigma = \frac{q^2 n\tau}{m} \tag{12.17}$$

[1.3]

Joule 熱は

$$J = \sigma E^2 = \frac{q^2 n\tau}{m}E^2 \tag{12.18}$$

である。一方電子が単位時間、単位体積あたりに失うエネルギーは

$$n \cdot \frac{1}{2\tau} \cdot \frac{1}{2}m\left(\frac{qE}{m}2\tau\right)^2 = \frac{q^2 n\tau}{m}E^2 \tag{12.19}$$

となって、両者は一致する。

[2.1]

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} \tag{12.20}$$

から、

$$2\pi r H(r) = \pi r^2 |\boldsymbol{j}| \tag{12.21}$$

よって、

$$H(r) = \frac{1}{2} r |\boldsymbol{j}| = \frac{1}{2} \sigma r E \tag{12.22}$$

となる。よって、

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{2} \sigma r E^2 \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\theta = -\frac{1}{2} \sigma r E^2 \boldsymbol{e}_r \tag{12.23}$$

となる。$I/\pi a^2 = \sigma E$ から、

$$\boldsymbol{S} = -\frac{I^2}{2\pi^2 a^4 \sigma} r \boldsymbol{e}_r \tag{12.24}$$

[2.2]

C に流入する Poynting ベクトルの総量は、

$$\frac{1}{2} \sigma r L^2 \cdot 2\pi r L = \pi r^2 L \sigma E^2 \tag{12.25}$$

一方、C 内での単位時間あたりの Joule 熱は、

$$\sigma E^2 = \pi r^2 L \tag{12.26}$$

よって両者は一致する。この系では流れ込んだエネルギーと同量のエネルギーが Joule 熱に変わる。したがって、Joule 熱を含めればエネルギー保存則が成り立っている。

[2.3]

$$j(r) = \sigma(r) E \tag{12.27}$$

$$I = \int_0^a \pi r j(r) \, \mathrm{d}r = \pi E \int_0^a r \sigma(r) \, \mathrm{d}r \tag{12.28}$$

より、

$$j(r) = \frac{\sigma(r) I}{\pi \int_0^a r\sigma(r)\,\mathrm{d}r} \tag{12.29}$$

次に、磁場は

$$H(r) = \frac{E}{2r} \int_0^r r' \sigma(r')\,\mathrm{d}r' \tag{12.30}$$

となるから、

$$|\boldsymbol{S}| = \frac{E^2}{2r} \int_0^r r' \sigma(r')\,\mathrm{d}r'\,. \tag{12.31}$$

C に流れ込むエネルギーの総量は、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{S}| \cdot 2\pi L &= 2\pi L \cdot \frac{E^2}{2r} \int_0^r r' \sigma(r')\,\mathrm{d}r' \\ &= \pi L E^2 \int_0^r r' \sigma(r')\,\mathrm{d}r' \end{aligned} \tag{12.32}$$

一方、Joule 熱は

$$L \cdot \pi \int_0^r r' \sigma(r')\,\mathrm{d}r' \tag{12.33}$$

となって両者は一致する。

物理学 II

第 1 問

[1]

　まず、

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{12.34}$$

である。また

$$J_+ = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.35}$$

より、

$$J_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{12.36}$$

[2]

　Hamiltonian を行列表示すると、

$$H_{\mathrm{M}} = -\gamma \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{B} = -\gamma\begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B \end{pmatrix} \tag{12.37}$$

となる。固有値は $0, \pm\gamma B$。

[3]

　x 軸方向に磁場 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{RF}} = (B_{\mathrm{RF}}\cos\omega t, 0, 0)$ を掛ける。ただし、$\hbar\omega = \gamma B$ とする。通常の相互作用表示の扱いだと、

$$\begin{aligned} H_I &= -\gamma B_{\mathrm{RF}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t J_z} J_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t J_z} \\ &= -\gamma B_{\mathrm{RF}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t\,\mathrm{ad}(J_z)} J_x \\ &= -\gamma B_{\mathrm{RF}}(\cos(\omega t)J_x + \sin(\omega t)J_y) \end{aligned} \tag{12.38}$$

だが、ここでは $\omega t \ll 1$ として、

$$H_I \approx H_{\mathrm{RF}} = -\gamma B_{\mathrm{RF}} J_x \tag{12.39}$$

と近似する。このとき相互作用表示の状態 $|\Psi(t)\rangle$ は、

$$|\Psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}H_I t}|\Psi(0)\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma B_{\mathrm{RF}} t J_x}|1_z\rangle \tag{12.40}$$

となる。ここで

$$\exp\left[\frac{\mathrm{i}\theta}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta+1 & \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta-1\\ \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta & 2\cos\theta & \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta\\ \cos\theta-1 & \sqrt{2}\,\mathrm{i}\sin\theta & \cos\theta+1\end{pmatrix} \tag{12.41}$$

より、

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{\cos(\gamma B_{\mathrm{RF}}t)+1}{2}|1_z\rangle + \frac{\mathrm{i}\sin(\gamma B_{\mathrm{RF}}t)}{\sqrt{2}}|0_z\rangle + \frac{\cos(\gamma B_{\mathrm{RF}}t)-1}{2}|{-1}_z\rangle \tag{12.42}$$

[4]

$$H_Q = A(3J_x^2 - J^2) = 3AJ_x^2 - 2A \tag{12.43}$$

と書ける。ここで、

$$J_x^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \tag{12.44}$$

から、

$$\langle 1|H_Q|1\rangle = -\frac{1}{2}A, \quad \langle 0|H_Q|0\rangle = 2A, \quad \langle -1|H_Q|-1\rangle = -\frac{1}{2}A \tag{12.45}$$

となる。

第 2 問

[1]

$$Z_A = (Z_{A1})^N \tag{12.46}$$

$$Z_{A1} = \frac{L}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m}\right) = \sqrt{\frac{m\mathrm{k}T}{2\pi\hbar^2}}\,L \tag{12.47}$$

$$Z_A = \left(\frac{L}{\lambda}\right)^N \tag{12.48}$$

[2]

$$F(T,L) = -\mathrm{k}T\ln Z_A = \mathrm{k}NT\ln\left(\frac{L}{\lambda}\right) \tag{12.49}$$

[3]

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial N} = -\mathrm{k}T\ln\left(\frac{L}{\lambda}\right) \tag{12.50}$$

[4]

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_{A1} = \frac{\mathrm{k}T}{2} \tag{12.51}$$

$$\exp\left(\frac{\mu - E}{\mathrm{k}T}\right) = \frac{\lambda}{L}\mathrm{e}^{-1/2} \ll 1 \tag{12.52}$$

よって

$$\frac{\lambda}{L} \ll 1 \tag{12.53}$$

であればよい。λ は長さの次元を持つ量で、ある温度における状態の典型的な波長を表す。

[**5**]

$$Z_B = \frac{1}{N!} Z_A(L - Nd) = \frac{1}{N!} \left(\frac{L - Nd}{\lambda} \right)^N \tag{12.54}$$

$$F = -N\mathrm{k}T \left[\ln \left(\frac{L - Nd}{\lambda} \right) - \ln N + 1 \right] \tag{12.55}$$

状態方程式は、

$$P = -\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{N\mathrm{k}T}{L - Nd} \tag{12.56}$$

となる。気体 A と違って $L \to Nd$ で圧力が発散するため、気体を Nd 以下に圧縮できない。

第 3 問

[1]

$$\frac{-n^2\omega^2}{c^2} + k_x^2 - \kappa_2^2 = 0 \tag{12.57}$$

$$\kappa_2 = \sqrt{k_x^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2}} \tag{12.58}$$

$$k_x > \frac{n^2\omega^2}{c^2} \tag{12.59}$$

[2]

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_1 = k_x E_{1,x} + k_1 E_{1,z} = 0 \tag{12.60}$$

また

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_1 = \omega\mu_0 \boldsymbol{H}_1 \tag{12.61}$$

から、

$$-k_x E_{1,z} + k_1 E_{1,x} = \omega\mu_0 H_{1,y} \tag{12.62}$$

となる。これらを連立して

$$\frac{k_x^2 + k_1^2}{k_1} E_{1,x} = \frac{n^2\omega^2/c^2}{k_1} E_{1,x} = \omega\mu_0 H_{1,y} \tag{12.63}$$

$$\frac{E_{1,x}}{H_{1,y}} = \frac{k_1 c^2 \mu_0}{n^2\omega} = \frac{k_1}{\epsilon_1\omega} \tag{12.64}$$

となる。つぎに同様の議論を媒質 2 について行えば、

$$\frac{E_{2,x}}{H_{2,y}} = \frac{k_2}{\epsilon_2\omega} \tag{12.65}$$

となる。

[3]

$$\epsilon_1\mu_0\omega^2 = k_x^2 - \kappa_1^2, \quad \epsilon_2\mu_0\omega^2 = k_x^2 - \kappa_2^2, \tag{12.66}$$

また境界条件

$$E_{1,x} = E_{2,x}, \quad H_{1,x} = H_{2,x} \tag{12.67}$$

$$\frac{\kappa_1}{\epsilon_1\omega} = \frac{\kappa_2}{\epsilon_2\omega} \tag{12.68}$$

$$\frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} = \frac{\epsilon_1^2}{\epsilon_2^2} = \frac{k_x^2 - \epsilon_1\mu_0\omega^2}{k_x^2 - \epsilon_2\mu_0\omega^2} \tag{12.69}$$

よって、

$$\begin{aligned} k_x &= \sqrt{\frac{-\epsilon_1^2\mu_0\omega^2/\epsilon_2 + \epsilon_1\mu_0\omega^2}{-\epsilon_1^2/\epsilon_2^2 + 1}} \\ &= \sqrt{\frac{\epsilon_1\epsilon_2\mu_0\omega^2}{\epsilon_2 + \epsilon_1}} \\ &= \sqrt{\frac{|\epsilon_2|\epsilon_0\mu_0\omega^2}{|\epsilon_2| - \epsilon_1}} \end{aligned} \tag{12.70}$$

[4]

プリズムと金属の間の真空領域では、[1] から電場は z 方向について指数関数的に減衰し、振動する電場成分は取り除かれる。これによって [3] の電場を励起することができる。

第 4 問

[1]

周期的境界条件から、

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}kMa} = 1, \quad k \in \frac{2\pi}{Ma}\mathbb{Z} \tag{12.71}$$

[2]

$$E(k) = \frac{1}{M}\left[M(E_A + 2\beta) + M\gamma(\mathrm{e}^{\mathrm{i}ka} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ka})\right] = E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka) \tag{12.72}$$

[3]

波数が小さい方がエネルギーも小さくなるので、$\gamma < 0$。また結晶の安定性から $\beta < 0$。

[4]

$$\frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = -\frac{2\gamma a^2}{\hbar^2}\cos(ka) \tag{12.73}$$

を用いると、電子と正孔の有効質量はそれぞれ、

$$m_e^* = \frac{\hbar^2}{-2\gamma a^2}, \quad m_h^* = \frac{\hbar^2}{2\gamma a^2} \tag{12.74}$$

[5]

ハミルトニアン

$$\langle \phi_A(j)|H|\phi_A(j)\rangle = E_A + 2\beta, \tag{12.75}$$
$$\langle \phi_A(j)|H|\phi_A(j\pm 1)\rangle = \gamma, \tag{12.76}$$
$$\langle \phi_B(j)|H|\phi_B(j)\rangle = E_B, \tag{12.77}$$
$$\langle \phi_A(j)|H|\phi_B(j)\rangle = 2\delta, \tag{12.78}$$

の対角化をすればよい。波動関数を

$$|\Psi_k\rangle = \sum_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}kja}\left(c_k|\phi_A(j)\rangle + d_k|\phi_B(j)\rangle\right) \tag{12.79}$$

とすると、c_k, d_k に対して

$$\begin{pmatrix} E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka) & 2\delta \\ 2\delta & E_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = E(k) \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} \tag{12.80}$$

が成り立つ。

[6]

まず $\delta = 0$ のとき、2 つのバンドの固有値は

$$E(k) = E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka), \quad E_B \tag{12.81}$$

となる。次に $\delta \neq 0$ のとき、

$$E(k) = \frac{E_A + E_B}{2} + \beta + \gamma\cos(ka) \pm \sqrt{\left(\frac{E_A - E_B}{2} + \beta + \gamma\cos(ka)\right)^2 + 4\delta^2} \tag{12.82}$$

となる。バンド図としては、$\delta = 0$ で 2 つのバンドが交わる点において、$\delta \neq 0$ では縮退が解ける。