物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

幾何と記号

円板の中心を原点 O、糸の固定端を $A=(a,0)$ とする。円板と糸の接点を Q とし、OQ が正の x 軸となす反時計回りの角を φ とする。糸が伸びず、円板に沿って巻きつくので、円板上の糸の長さは $a\varphi$ である。したがって、Q から質点までの自由な糸の長さは

$$\ell(\varphi)=\ell_0-a\varphi \tag{1}$$

となる。以下は衝突前の $\ell>0$ に対する議論である。半径方向と接線方向の単位ベクトルを

$$\boldsymbol{e}_r=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_\varphi=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix} \tag{2}$$

と定める。自由な糸は Q から $\boldsymbol{e}_\varphi$ の方向に伸び、張力はその逆方向に働く。

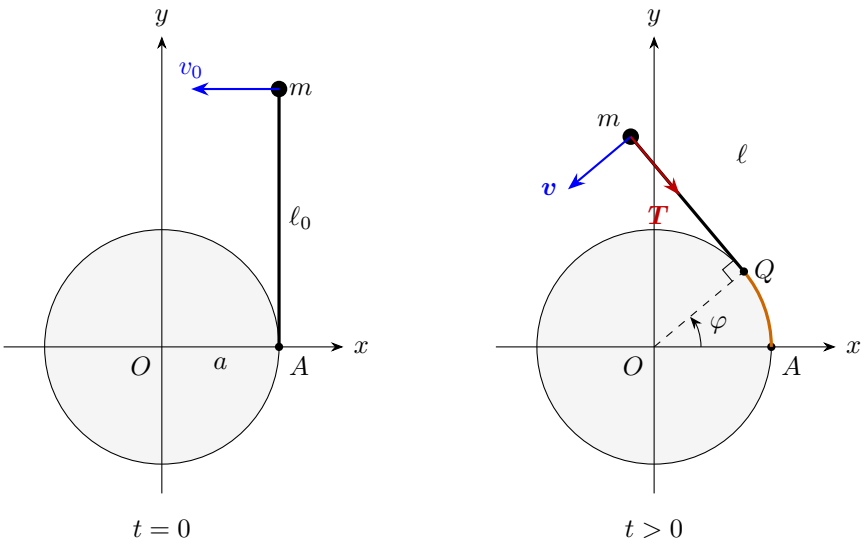


図 1: 左は初期状態、右は巻きつく途中の模式図。右の速度は $-\boldsymbol{e}_r$ 方向、張力は $-\boldsymbol{e}_\varphi$ 方向を向く。太い弧は巻きついた糸を表す。表示例では $\varphi=40°$、$\ell_0/a=2.2$ とし、寸法比の予測には用いない。

[1] エネルギーと角運動量の保存

位置は $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}_r+\ell\boldsymbol{e}_\varphi$ と表せる。$\dot\ell=-a\dot\varphi$、$\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$、$\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\dot\varphi\boldsymbol{e}_r$ を用いて微分すると、$a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ と $\dot\ell\boldsymbol{e}_\varphi=-a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$ が打ち消し合う。したがって速度は $\boldsymbol{v}=-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r$ である。張力は糸に沿うので $\boldsymbol{T}=-T\boldsymbol{e}_\varphi$ であり、速度と直交する。したがって張力の仕事率は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m}{2}|\boldsymbol{v}|^2\right)=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{3}$$

である。他に力は働かないため、運動エネルギーは保存する。

一方、張力の作用線は接線 Q–質点に沿い、原点 O を通らない。その作用線と O との距離は a であるため、O まわりのモーメントは時計回りの $N = -aT$ となり、ゼロではない。したがって O まわりの角運動量は保存しない。

[2] 位置、速度、角運動量

式(1)と接線の向きから、位置は

$$\boxed{\boldsymbol{r} = a\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + (\ell_0 - a\varphi)\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}.} \tag{4}$$

ここで

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi, \qquad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_\varphi}{\mathrm{d}t} = -\dot\varphi\boldsymbol{e}_r, \qquad \dot\ell = -a\dot\varphi \tag{5}$$

なので、

$$\boldsymbol{v} = a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi - a\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi - \ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r \tag{6}$$

$$= \boxed{-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r.} \tag{7}$$

接点 Q の移動による接線方向の成分が、自由な糸の短縮による成分と打ち消し合う。このため質点の速度は自由な糸と直交する。

$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\varphi$ の z 成分が 1 であることを用いると、

$$L = m(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})_z = m(a\boldsymbol{e}_r + \ell\boldsymbol{e}_\varphi)\times(-\ell\dot\varphi\boldsymbol{e}_r)\big|_z \tag{8}$$

$$= \boxed{m\ell^2\dot\varphi = m(\ell_0 - a\varphi)^2\dot\varphi.} \tag{9}$$

[3] 角度の時間発展と衝突時刻

エネルギー保存から $|\boldsymbol{v}| = \ell|\dot\varphi| = v_0$ である。$t = 0$ では $\varphi = 0$、速度は負の x 方向なので、$\boldsymbol{v}(0) = (-\ell_0\dot\varphi(0), 0) = (-v_0, 0)$ より $\dot\varphi(0) > 0$ である。衝突前には $\ell > 0$ かつ速さがゼロにならないため、$\dot\varphi$ の符号は変わらない。したがって、

$$\dot\varphi = \frac{v_0}{\ell_0 - a\varphi}. \tag{10}$$

$\varphi(0) = 0$ を使って積分すると

$$\int_0^{\varphi(t)} (\ell_0 - au)\,\mathrm{d}u = \int_0^t v_0\,\mathrm{d}s, \qquad \ell_0\varphi - \frac{a}{2}\varphi^2 = v_0 t. \tag{11}$$

二次方程式の二つの解のうち、$t = 0$ で $\varphi = 0$ となる枝を選べば、

$$\boxed{\varphi(t) = \frac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 - 2av_0t}}{a}.} \tag{12}$$

このとき $\ell(t) = \sqrt{\ell_0^2 - 2av_0t}$ である。糸が巻きつき終わるのは $\ell = 0$ のときなので、

$$\boxed{\tau = \frac{\ell_0^2}{2av_0}, \qquad \varphi(\tau) = \frac{\ell_0}{a}.} \tag{13}$$

運動と力の式の適用範囲は $0 \le t < \tau$ であり、τ は衝突前の運動から求めた終端時刻である。

[4] 張力と運動の物理的解釈

$\ell\dot{\varphi} = v_0$ を [2] の速度に代入すると、$\boldsymbol{v} = -v_0\boldsymbol{e}_r$ となる。これを時間微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -v_0\dot{\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi = -\frac{v_0^2}{\ell}\boldsymbol{e}_\varphi. \tag{14}$$

質点に働く力は張力だけなので、

$$\boxed{\boldsymbol{T} = -\frac{mv_0^2}{\ell_0 - a\varphi}\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}, \qquad |\boldsymbol{T}| = \frac{mv_0^2}{\ell_0 - a\varphi}.} \tag{15}$$

張力は質点から Q に向かい、速度と直交するため、速さを変えずに進行方向を曲げる。等速円運動の向心力 mv_0^2/R と比較すると、瞬間的な曲率半径は $R = \ell$ である。質点から加速度の方向に距離 ℓ 進んだ点が Q なので、微小時間では、Q を瞬間的な曲率中心とする半径 ℓ の等速円運動として解釈できる。ただし Q は円周上を動き、ℓ も短くなるため、全軌道は一つの固定された円にはならない。

$t \to \tau^-$ では $\ell \to 0$ となり、理想化した模型の張力は発散する。衝突後の運動はこの解の範囲に含めない。

[5] 張力のモーメントと角運動量の変化

$\boldsymbol{T} = -(mv_0^2/\ell)\boldsymbol{e}_\varphi$ より、

$$N = (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{T})_z \tag{16}$$

$$= \left[(a\boldsymbol{e}_r + \ell\boldsymbol{e}_\varphi)\times\left(-\frac{mv_0^2}{\ell}\boldsymbol{e}_\varphi\right)\right]_z \tag{17}$$

$$= \boxed{-\frac{mav_0^2}{\ell_0 - a\varphi}.} \tag{18}$$

一方、$L = m\ell^2\dot{\varphi} = mv_0\ell$ なので、

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = mv_0\dot{\ell} = -mav_0\dot{\varphi} = -\frac{mav_0^2}{\ell} = N. \tag{19}$$

初期値は $L(0) = mv_0\ell_0 > 0$、$N < 0$ であり、角運動量は減少する。また、mv_0^2/ℓ は力の単位、mav_0^2/ℓ はモーメントの単位になっている。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 電子の散乱模型

散乱直後から次の散乱までの時間を t とする。この間、電場を $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ と書けば、電子の電荷が符号付きの q であることから

$$m\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = qE, \qquad v_z(t) = \frac{qE}{m}t \quad (0 \le t < 2\tau). \tag{1}$$

散乱周期 2τ で平均すると

$$\boxed{v_a = \frac{1}{2\tau}\int_0^{2\tau} v_z(t)\,\mathrm{d}t = \frac{qE\tau}{m}.} \tag{2}$$

電子の数密度は n なので電流密度は $j_z = nqv_a$ であり、電荷の符号を含めて

$$\boldsymbol{j} = \frac{nq^2\tau}{m}\boldsymbol{E} = \sigma\boldsymbol{E}, \qquad \boxed{\sigma = \frac{nq^2\tau}{m}}. \tag{3}$$

円柱の断面積は πa^2 だから、$I = j_z\pi a^2$、電圧の大きさは $V = EL$ である。したがって

$$I = \frac{nq^2\tau\pi a^2}{mL}V = \frac{\sigma\pi a^2}{L}V, \tag{4}$$

となり、電流は電圧に比例する。

単位時間・単位体積あたりに電場が電子へ与える仕事は

$$J = \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E} = \sigma E^2 = \boxed{\frac{I^2}{\sigma\pi^2 a^4}}. \tag{5}$$

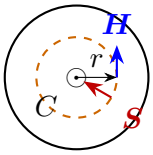
一方、電子 1 個は一周期の終わりに速さ $|qE|2\tau/m$ となり、その運動エネルギーを散乱ごとに失う。散乱頻度は $1/(2\tau)$ なので、単位体積・単位時間あたりの損失は

$$n\frac{1}{2\tau}\frac{m}{2}\left(\frac{2qE\tau}{m}\right)^2 = \frac{nq^2\tau}{m}E^2 = \sigma E^2 = J. \tag{6}$$

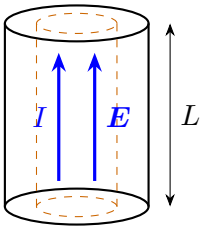
電場が電子にする仕事が、散乱で失われる運動エネルギーに変わる。

[2] 電磁場のエネルギー流

円柱軸を $+z$ 方向、横断面の極座標の方位角方向を $\boldsymbol{e}_\theta$ とする。問題の定常電流は $+z$ 向きである。長い導体の中央部を考え、端の影響を無視する。軸方向の電流に対して、局所オーム則 $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ から電場も軸方向となる。軸対称な定常場を $\boldsymbol{E} = E_z(r)\boldsymbol{e}_z$ と書けば、$\nabla\times\boldsymbol{E} = 0$ の方位角成分は $-\partial_r E_z = 0$ だから、電場の大きさは横断面で一定である。磁場はこの直線状の円柱電流が作る場であり、右ねじの向きの方位角方向を向く。その大きさを、以下でアンペールの法則から求める。



横断面（⊙: $+z$ 向き）



軸方向

図 1: 横断面で $+z$ 方向電流は紙面手前向き。磁場は方位角方向、エネルギー流は半径内向きである。軸方向図は導体と領域 C の同軸関係を示す。

[2.1] 一様な導体

半径 $r < a$ の円周を貫く電流は $I(r) = \sigma E \pi r^2$ である。アンペールの法則 $\oint \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = I(r)$ より

$$\boldsymbol{H}(r) = \frac{\sigma E r}{2} \boldsymbol{e}_\theta. \tag{7}$$

したがって $\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_\theta = -\boldsymbol{e}_r$ を使うと

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = -\frac{\sigma E^2 r}{2} \boldsymbol{e}_r, \qquad |\boldsymbol{S}| = \frac{\sigma E^2 r}{2}.} \tag{8}$$

エネルギーは導体表面から中心へ向かって流れる。

[2.2] 半径 r の円柱領域

領域 C の側面積は $2\pi r L$ である。両端面では $\boldsymbol{S}$ が面に平行なので流束はなく、側面を通って C へ入る電力は

$$P_{\mathrm{in}} = |\boldsymbol{S}| \, 2\pi r L = \pi r^2 L \sigma E^2. \tag{9}$$

体積 $\pi r^2 L$ の領域内で発生するジュール熱は

$$P_{\mathrm{J}} = \int_C \sigma E^2 \, \mathrm{d}V = \pi r^2 L \sigma E^2 = P_{\mathrm{in}}. \tag{10}$$

定常状態では領域内に電磁エネルギーが蓄積しないため、流入した電磁エネルギーが同じ領域内のジュール熱に変わる。

[2.3] 半径に依存する電気伝導率

定常場では磁束密度 $\boldsymbol{B}$ が時間に依存せず、$\partial \boldsymbol{B}/\partial t = 0$ なので、ファラデーの法則から $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ である。軸方向の場を $\boldsymbol{E} = E_z(r) \boldsymbol{e}_z$ と書くと、その方位角成分は

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})_\theta = -\frac{\partial E_z}{\partial r} = 0. \tag{11}$$

従って電場は半径にも依存しない。以下ではこの一様な値を E と書く。局所オーム則から

$$\boldsymbol{j}(r) = \sigma(r) E \boldsymbol{e}_z. \tag{12}$$

全電流を導体断面で積分すると

$$I = 2\pi E \int_0^a r' \sigma(r') \, \mathrm{d}r', \qquad \boxed{j(r) = \frac{\sigma(r) I}{2\pi \displaystyle\int_0^a r' \sigma(r') \, \mathrm{d}r'}.} \tag{13}$$

半径 r 以内を流れる電流は $I(r) = 2\pi E \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'$ だから、アンペールの法則から

$$H_\theta(r) = \frac{E}{r}\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r', \qquad \boldsymbol{S}(r) = -\frac{E^2}{r}\left(\int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'\right)\boldsymbol{e}_r. \tag{14}$$

側面を通じて領域 C に流入する電力は

$$P_{\mathrm{in}} = |\boldsymbol{S}(r)|\,2\pi r L = 2\pi L E^2 \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r'. \tag{15}$$

これに対し、C 内で発生するジュール熱は

$$P_{\mathrm{J}} = \int_C \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}\,\mathrm{d}V = 2\pi L E^2 \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' = P_{\mathrm{in}}. \tag{16}$$

よって導電率が半径方向に変わっても、電磁エネルギーの流入と局所的なジュール発熱は領域ごとに一致する。

半径依存の式は $0 < r < a$ で、示した積分が存在する範囲で成り立つ。中心での場の極限は $\sigma(r)$ の振る舞いにも依存する。例えば軸近傍で $0 \le \sigma(r) \le \sigma_{\max}$ と有界なら

$$0 \le \int_0^r r'\sigma(r')\,\mathrm{d}r' \le \frac{\sigma_{\max} r^2}{2}, \qquad |H_\theta(r)| \le \frac{|E|\sigma_{\max} r}{2}, \qquad |\boldsymbol{S}(r)| \le \frac{E^2\sigma_{\max} r}{2}. \tag{17}$$

従ってこの条件下では両者が $r \to 0$ で 0 に近づき、中心の方位角・半径方向が一意に定まらなくても場のベクトルは連続に 0 へ延長できる。一様導体もこの場合に含まれる。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

以下、計算基底を

$$\big(|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\big) \tag{1}$$

の順に並べる。原本 [3] の回転因子では $\hbar$ による除算が抜けている。指数を無次元にするため、以下では $J_z/\hbar$ を含む因子として読む。

[1] スピン角運動量の行列

昇降演算子の作用を $J=1$ に適用すると

$$J_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

$J_x = (J_+ + J_-)/2$、$J_y = (J_+ - J_-)/(2i)$、および $J_z|1,m\rangle = m\hbar|1,m\rangle$ から

$$\boxed{J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}. \tag{3}$$

これらは Hermite 行列であり、例えば $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$ を満たす。さらに $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = 2\hbar^2 I$ なので、全状態で $J^2 = 1(1+1)\hbar^2$ となる。

[2] 静磁場中のエネルギー準位

$\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{e}_z$ だから、

$$H_M = -\gamma B J_z = -\gamma B\hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

従って磁気量子数 m ごとの固有エネルギーは

$$\boxed{E_m = -\gamma B m\hbar \quad (m = 1, 0, -1)}. \tag{5}$$

順に $-\gamma B\hbar, 0, +\gamma B\hbar$ であり、最低状態は $|1,1\rangle$ である。隣り合う準位間隔は $\gamma B\hbar$ なので、共鳴条件は $\omega = \gamma B$。

[3] 共鳴交流磁場中の状態

問題が与える回転系の近似 Hamiltonian は $H_{\mathrm{RF}} = -\gamma B_{\mathrm{RF}} J_x$ である。原本の記号に従い、回転系の状態を $|\Psi(t)\rangle$、実験室系の状態を $|\phi(t)\rangle$ とする。原本 [3] の回転変換を次元の合う形に直

すと

$$|\Psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\omega t J_z\right)|\phi(t)\rangle. \tag{6}$$

以下で解くのは H_{RF} による回転系の状態 $|\Psi(t)\rangle$ である。$\Omega = \gamma B_{\mathrm{RF}}$、$\theta = \Omega t$ と置くと、時間発展演算子は

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}H_{\mathrm{RF}}t\right) = \exp\left(i\theta\frac{J_x}{\hbar}\right). \tag{7}$$

[1] の行列を掛けると $J_x^3 = \hbar^2 J_x$ となる。従って指数関数の級数で奇数次と偶数次の項をそれぞれまとめれば

$$U(t) = I + i\sin\theta\,\frac{J_x}{\hbar} + (\cos\theta - 1)\left(\frac{J_x}{\hbar}\right)^2. \tag{8}$$

最低状態 $|1,1\rangle$ はこの基底で $(1,0,0)^{\mathsf{T}}$ なので、

$$U(t)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(1+\cos\theta)/2\\ i\sin\theta/\sqrt{2}\\ (\cos\theta-1)/2\end{pmatrix}. \tag{9}$$

よって回転系の状態は

$$\boxed{|\Psi(t)\rangle = \frac{1+\cos\theta}{2}|1,1\rangle + \frac{i\sin\theta}{\sqrt{2}}|1,0\rangle + \frac{\cos\theta-1}{2}|1,-1\rangle.} \tag{10}$$

実験室系の状態は $|\phi(t)\rangle = \exp(i\omega t J_z/\hbar)|\Psi(t)\rangle$ から得る。回転変換は J_z と可換なので、J_z の期待値は両系で一致する。実際、回転系振幅の絶対値二乗は

$$\frac{(1+\cos\theta)^2}{4} + \frac{\sin^2\theta}{2} + \frac{(\cos\theta-1)^2}{4} = 1 \tag{11}$$

となる。各磁気量子数の確率はこの三項であり、J_z の期待値は

$$\langle J_z\rangle = \hbar\big(|c_1|^2 - |c_{-1}|^2\big) \tag{12}$$

$$= \boxed{\hbar\cos(\gamma B_{\mathrm{RF}}t)}. \tag{13}$$

初期値は $+\hbar$、周期は $2\pi/(\gamma B_{\mathrm{RF}})$ である。

[4] 相互作用による一次のエネルギー補正

演算子は

$$H_Q = A(2J_x^2 - J_y^2 - J_z^2) = A(3J_x^2 - J^2). \tag{14}$$

設問 [1] の行列から

$$J_x^2 = \frac{\hbar^2}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}, \qquad J^2 = 2\hbar^2 I, \tag{15}$$

従って

$$H_Q = A\hbar^2\begin{pmatrix}-1/2&0&3/2\\0&1&0\\3/2&0&-1/2\end{pmatrix}. \tag{16}$$

H_M は $B>0$ で非縮退なので、一次のエネルギー補正は各 $|1,m\rangle$ における対角成分である。

$$\Delta E_1 = -\frac{A\hbar^2}{2}, \qquad \Delta E_0 = A\hbar^2, \qquad \Delta E_{-1} = -\frac{A\hbar^2}{2}. \tag{17}$$

よって一次近似の準位は

$$\boxed{E_1 = -\gamma B\hbar - \frac{A\hbar^2}{2}, \quad E_0 = A\hbar^2, \quad E_{-1} = +\gamma B\hbar - \frac{A\hbar^2}{2}.} \tag{18}$$

問題の弱摂動条件 $A\hbar^2 \ll \gamma B\hbar$ のもとでは準位の順序は変わらない。

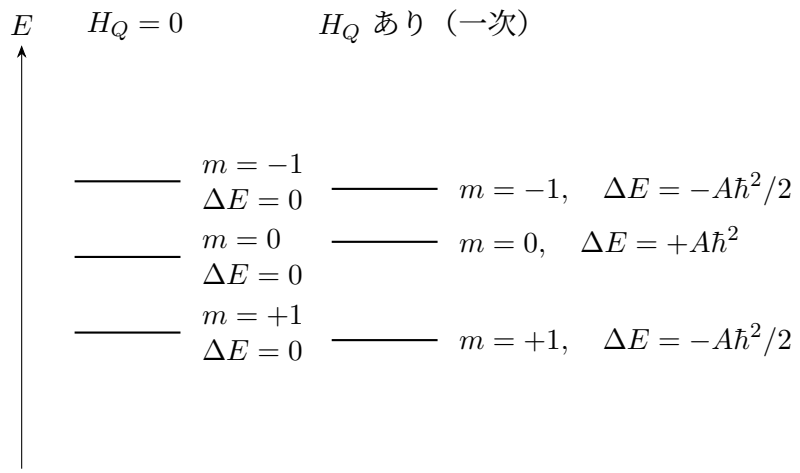


図 1: 未摂動準位と相互作用による一次の準位移動。縦軸は $\gamma B\hbar$ で規格化した模式図で、表示例は $A\hbar/(\gamma B) = 1/5$ とする。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 相互作用のない一次元気体

まず粒子 1 個の分配関数を求める。長さ L の一次元箱では状態数を位相空間体積 h ごとに数えるので、運動量積分から

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int_0^L \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}p\, \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_BT}\right) \tag{1}$$

$$= \frac{L}{h}\sqrt{2\pi m k_B T} = \frac{L}{\lambda}, \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_BT}}. \tag{2}$$

N 個は同種粒子なので、同じ配置を粒子ラベルの $N!$ 通りだけ重複して数えないようにする。従って気体 A の分配関数は

$$\boxed{Z_A = \frac{Z_1^N}{N!} = \frac{1}{N!}\left(\frac{L}{\lambda}\right)^N.} \tag{3}$$

[2] 自由エネルギー

Helmholtz 自由エネルギーは $F = -k_BT\ln Z_A$ だから

$$F(T,L) = -Nk_BT\ln\frac{L}{\lambda} + k_BT\ln N! \tag{4}$$

$$\simeq -Nk_BT\ln\frac{L}{\lambda} + Nk_BT\ln N - Nk_BT \tag{5}$$

$$= \boxed{Nk_BT\left[\ln\left(\frac{N\lambda}{L}\right) - 1\right].} \tag{6}$$

ここでは原本の $N \gg 1$ と Stirling 近似を用いた。

[3] 化学ポテンシャル

温度と長さを固定して粒子数で微分する。N は巨視的な系の連続変数として扱うため、

$$\boxed{\mu(T,L) = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,L} = k_BT\ln\left(\frac{N\lambda}{L}\right).} \tag{7}$$

[4] Boltzmann 統計の希薄条件

並進運動のエネルギーは $E = p^2/(2m) \geq 0$ であるため、Boltzmann 占有数は最も低いエネルギーで最大となる。基準を $E_0 = 0$ とすれば

$$\bar{n}_{\max} = \exp\left(\frac{\mu}{k_B T}\right) = \frac{N\lambda}{L}. \tag{8}$$

したがって全ての一粒子準位の占有数が十分小さいための条件は

$$\boxed{\frac{N\lambda}{L} \ll 1, \qquad \frac{L}{N} \gg \lambda.} \tag{9}$$

λ は長さの次元を持ち、温度 T における熱的 de Broglie 波長を表す。L/N は 1 粒子あたりの平均間隔なので、条件は粒子間隔が波長より十分大きいことを意味する。波動性が粒子の重なりに強く影響しない希薄な領域で、各量子状態の平均占有数を小さく保てる。

[5] 剛体斥力のある一次元気体

粒子中心を $x_1 < \cdots < x_N$ の順に並べる。壁との条件は $d/2 \leq x_1$、$x_N \leq L - d/2$、隣り合う粒子には $x_{i+1} - x_i \geq d$ を課す。隣接粒子ごとに重なる排除長を取り除く座標

$$y_i = x_i - (i-1)d \tag{10}$$

を導入すると、壁と粒子間の条件は $d/2 \leq y_1 \leq \cdots \leq y_N \leq L - Nd + d/2$ となる。この区間の長さは $L - Nd$ で、座標変換の Jacobian は 1 である。順序付き領域は長さ $L - Nd$ の直積領域の $1/N!$ を占めるので、配置積分は $(L - Nd)^N/N!$ となる。同じ順序を既に選んでいるため、さらに $N!$ で割ることはしない。運動量積分は気体 A と同じだから

$$\boxed{Z_B = \frac{1}{N!}\left(\frac{L - Nd}{\lambda}\right)^N.} \tag{11}$$

この結果から

$$F_B = -k_B T \ln Z_B \simeq N k_B T \left[\ln\left(\frac{N\lambda}{L - Nd}\right) - 1\right], \tag{12}$$

$$P = -\left(\frac{\partial F_B}{\partial L}\right)_{T,N} = \boxed{\frac{N k_B T}{L - Nd}}. \tag{13}$$

気体 A では $P_A = N k_B T/L$ である。斥力のある気体 B では使える長さが $L - Nd$ に減るため、同じ T, N, L でも圧力は大きい。得た古典的な剛体棒模型の式を設問の希薄条件 $L \gg Nd$ の外まで形式的に延ばすと、$L \to Nd + 0$ で圧力が発散する。ただしこの高密度極限では古典近似自体の適用も別途確かめる必要がある。$d \to 0$ の極限では気体 A の状態方程式を再現する。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

全設問で時間依存を $e^{-i\omega t}$ とする。$\boldsymbol{H}$ は y 成分のみを持ち、電場は x, z 成分を持つ TM 波である。媒質 j では $\boldsymbol{D} = \epsilon_j \boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$。

[1] 全反射と真空中の減衰波

電場は電荷のない一様媒質中で $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ を満たす。Faraday 則 $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\omega \boldsymbol{B}$ と Ampère 則 $\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -i\omega \boldsymbol{D}$ を用いると、

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \boldsymbol{E}) = i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \mu_0 \epsilon_j \omega^2 \boldsymbol{E}, \tag{1}$$

$$-\Delta \boldsymbol{E} = \mu_0 \epsilon_j \omega^2 \boldsymbol{E}. \tag{2}$$

よって平面波の波数は $k_x^2 + k_z^2 = \epsilon_j \mu_0 \omega^2$ に従う。媒質 1 では $\epsilon_1 \mu_0 = n^2/c^2$ だから、入射波の z 成分は

$$\boxed{k_1 = \sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2}}. \tag{3}$$

真空側の場 $e^{ik_x x - \kappa_2 z}$ を平面波の式に代入すると、z 波数は $i\kappa_2$ であるため

$$k_x^2 - \kappa_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}, \qquad \boxed{\kappa_2 = \sqrt{k_x^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}}. \tag{4}$$

入射側に伝播波があり $k_1 > 0$、透過側で減衰するため $\kappa_2 > 0$ でなければならない。従って

$$\boxed{\frac{\omega}{c} < k_x < \frac{n\omega}{c}}. \tag{5}$$

下端は真空側の減衰条件、上端は媒質 1 側の入射波の伝播条件から来る。端点ではそれぞれ $\kappa_2 = 0$ または $k_1 = 0$ となるので、指定された狭義の条件には含まれない。

[2] 媒質間の無反射透過

平面波 $e^{i(k_x x + k_j z)}$ では $\boldsymbol{k}_j = (k_x, 0, k_j)$ である。$\operatorname{div} \boldsymbol{D} = 0$ より

$$k_x E_{j,x} + k_j E_{j,z} = 0, \qquad E_{j,z} = -\frac{k_x}{k_j} E_{j,x}. \tag{6}$$

また $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$ の y 成分をとると

$$k_j E_{j,x} - k_x E_{j,z} = \omega\mu_0 H_{j,y}, \tag{7}$$

$$\omega\mu_0 H_{j,y} = \frac{k_x^2 + k_j^2}{k_j} E_{j,x} = \frac{\epsilon_j \mu_0 \omega^2}{k_j} E_{j,x}. \tag{8}$$

したがって各媒質の電場・磁場比は

$$\boxed{\zeta_j = \frac{E_{j,x}}{H_{j,y}} = \frac{k_j}{\epsilon_j \omega}}. \tag{9}$$

反射がないとき接線成分 E_x, H_y は界面で連続なので $\zeta_1 = \zeta_2$、すなわち $k_1/\epsilon_1 = k_2/\epsilon_2$ である。分散関係

$$k_1^2 = \epsilon_1 \mu_0 \omega^2 - k_x^2, \qquad k_2^2 = \epsilon_2 \mu_0 \omega^2 - k_x^2 \tag{10}$$

を用いると

$$\frac{\epsilon_1 \mu_0 \omega^2 - k_x^2}{\epsilon_1^2} = \frac{\epsilon_2 \mu_0 \omega^2 - k_x^2}{\epsilon_2^2}, \tag{11}$$

$$\boxed{k_x^2 = \frac{\mu_0 \omega^2 \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}, \qquad \boxed{k_x = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}}}. \tag{12}$$

この波数が入射側の伝播条件 $k_x^2 < \epsilon_1 \mu_0 \omega^2$ と透過側の条件 $k_x^2 < \epsilon_2 \mu_0 \omega^2$ を満たすことを確認できる。実際、$\epsilon_2 > \epsilon_1 > 0$ のとき比はそれぞれ $\epsilon_2/(\epsilon_1 + \epsilon_2) < 1$、$\epsilon_1/(\epsilon_1 + \epsilon_2) < 1$ であり、k_1, k_2 は正の実数となる。接線電場・磁場を同時に連続にするこの入射成分では、反射波の振幅はゼロとなる。

[3] 金属界面に束縛された波

$+x$ へ伝わる枝を選び、$k_x > 0$ とする。逆向きの枝は同じ分散を持つ $-k_x$ で表される。$z < 0$ の減衰因子は $e^{+\kappa_1 z} = e^{ik_{z,1} z}$ に対応し、$k_{z,1} = -i\kappa_1$。一方、$z > 0$ の因子 $e^{-\kappa_2 z}$ は $k_{z,2} = +i\kappa_2$ に対応する。各媒質の分散関係から

$$\kappa_1^2 = k_x^2 - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2, \qquad \kappa_2^2 = k_x^2 - \epsilon_2 \mu_0 \omega^2 = k_x^2 + |\epsilon_2| \mu_0 \omega^2. \tag{13}$$

[2] で導いた $E_x/H_y = k_z/(\epsilon\omega)$ を両側に適用し、界面で接線成分を連続にすると

$$-\frac{i\kappa_1}{\epsilon_0 \omega} = \frac{i\kappa_2}{\epsilon_2 \omega}, \qquad \boxed{\frac{\kappa_1}{\kappa_2} = \frac{\epsilon_0}{|\epsilon_2|}}. \tag{14}$$

この関係と分散関係を組み合わせれば

$$\frac{k_x^2 - \epsilon_0 \mu_0 \omega^2}{k_x^2 + |\epsilon_2| \mu_0 \omega^2} = \frac{\epsilon_0^2}{|\epsilon_2|^2}, \tag{15}$$

$$\boxed{k_x^2} = \frac{\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 |\epsilon_2|}{|\epsilon_2| - \epsilon_0}, \tag{16}$$

$$\boxed{k_x} = \omega \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0 |\epsilon_2|}{|\epsilon_2| - \epsilon_0}}. \tag{17}$$

$|\epsilon_2| > \epsilon_0$ なので

$$\boxed{k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{|\epsilon_2|}{|\epsilon_2| - \epsilon_0}} > \frac{\omega}{c}}. \tag{18}$$

この面内波数は真空中の伝播光の最大値 ω/c より大きい。したがってこのモードは界面に沿って進む一方、垂直方向には真空側・金属側の双方へ減衰する束縛波である。

[4] プリズムによる励起

真空中から金属表面へ直接入射する伝播光は、界面に平行な波数が $k_x \le \omega/c$ である。一方、[3] の表面波は $k_x > \omega/c$ を要するので、界面に平行な運動量が足りず、平坦な面では直接結合できない。

屈折率 $n_{\mathrm{p}} > 1$ のプリズムから界面の法線となす入射角 θ で光を入れると、界面に平行な波数は $k_x = n_{\mathrm{p}}(\omega/c)\sin\theta$ まで大きくなる。真空層との境界で全反射する角度を選べば、この高い面内波数を保ったエバネッセント場が真空ギャップへしみ出す。ギャップを金属表面の近くに狭く保つことで場が金属へ届き、さらに k_x を [3] の表面波波数に合わせればそのモードを励起できる。つまりプリズムは、全反射場を介して伝播光では得られない面内波数を供給し、金属界面の束縛モードとの運動量整合を可能にする。

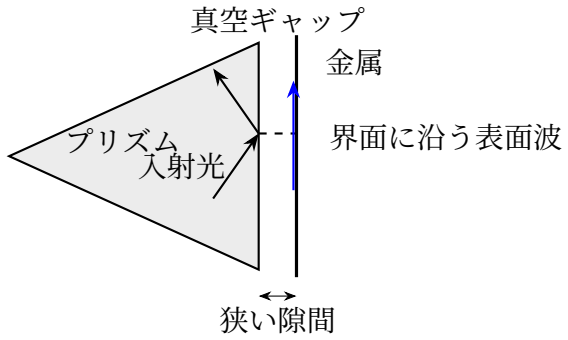


図 1: 全反射によるエバネッセント場を介したプリズム結合の模式図。点線はギャップ内にしみ出す場、青い矢印は金属界面に平行な表面波の進行方向を表す。入射角と長さは説明用で、臨界角や寸法を表さない。

物理工学専攻院試解答集
2012 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 周期境界条件

周期境界条件では、原子軌道の添字 j と $j+M$ を同一視する。したがって、同じ軌道に掛かる Bloch 係数も一致しなければならず、

$$e^{ik(j+M)a} = e^{ikja}, \qquad e^{ikMa} = 1 \tag{1}$$

となる。この条件の下で Bloch 和は $\psi_k(x+Ma) = \psi_k(x)$ を満たす。従って許される波数は

$$\boxed{k = \frac{2\pi l}{Ma} \quad (l \in \mathbb{Z})}. \tag{2}$$

第一ブリルアン領域内では隣り合う波数の間隔は $2\pi/(Ma)$ である。

[2] 単元素鎖のエネルギー分散

問題文のシュレーディンガー方程式 (1) に ψ_k を代入し、$\phi_A^*(x)$ を掛けて積分する。運動エネルギー演算子を $T = -\hbar^2\partial_x^2/(2m)$ と書く。孤立原子の方程式から $\langle\phi_A|T+u(x)|\phi_A\rangle = E_A$ となる。隣接する二つの A 原子イオンのポテンシャルはそれぞれ β を与え、オンサイトのエネルギーは $E_A + 2\beta$ である。

右隣の軌道については、その原子の孤立方程式と軌道の直交性から

$$\int \phi_A^*(x)[T+u(x-a)]\phi_A(x-a)\,dx = E_A \int \phi_A^*(x)\phi_A(x-a)\,dx = 0. \tag{3}$$

したがって全ポテンシャルのうち原点の $u(x)$ が残す行列要素が、問題で定義された γ である。左隣も同様に γ を与え、両者には Bloch 位相 e^{ika} と e^{-ika} が付く。列挙外の積分は無視できるので

$$E(k) = E_A + 2\beta + \gamma(e^{ika} + e^{-ika}) \tag{4}$$

$$= \boxed{E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka)}. \tag{5}$$

[3] 第一ブリルアン領域と安定性

孤立原子の準位 E_A は、真空準位を基準に束縛状態なら負である。隣接イオンの引力ポテンシャルによる対角シフト 2β も安定な結晶では一般に負となる。移動積分の符号はバンド底の位置を決める。安定な結合性の底端が $k=0$ にある場合は $\gamma < 0$ で、バンド底 $E_A + 2\beta + 2\gamma$ は上端 $E_A + 2\beta - 2\gamma$ より低い。バンド幅は $4|\gamma|$ である。

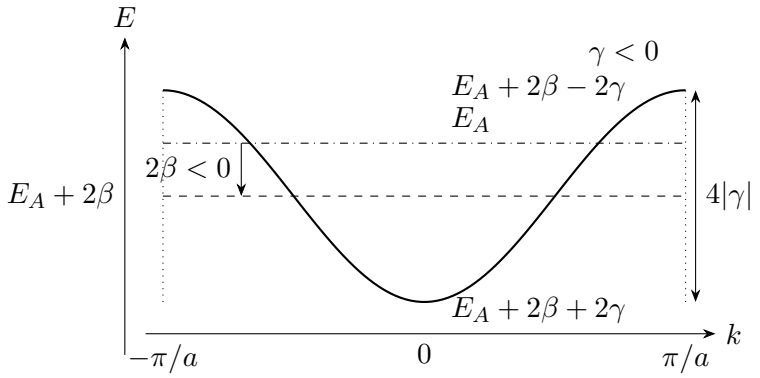


図 1: 単元素鎖の分散。縦方向は $|\gamma|$ を単位とする。表示例では $\gamma = -|\gamma|$ と $2\beta = -|\gamma|$ を選び、他のエネルギー比は示していない。

[4] 電子と正孔の有効質量

まず [3] の図と同じ $\gamma < 0$ の場合を考える。一つの軌道にスピンの異なる 2 個の電子を収容できるので、単位胞あたりの占有数 2 が満占有に対応する。バンド端近傍の曲率は

$$\frac{d^2E}{dk^2} = -2\gamma a^2 \cos(ka). \tag{6}$$

基底状態または低温の低エネルギーキャリアを考えると、平均占有数が 1 より十分小さいときの電子はバンド底 $k = 0$ の近くに入る。よって

$$\boxed{m_e^* = \frac{\hbar^2}{E''(0)} = \frac{\hbar^2}{-2\gamma a^2} > 0.} \tag{7}$$

同じ低エネルギー条件のもとで占有数が 2 に近いときは、バンド上端 $k = \pi/a$ 近くの空状態を正孔として扱う。電子の曲率は $E''(\pi/a) = 2\gamma a^2 < 0$ なので、正孔の質量はその負号付き逆数で

$$\boxed{m_h^* = -\frac{\hbar^2}{E''(\pi/a)} = -\frac{\hbar^2}{2\gamma a^2} > 0.} \tag{8}$$

この最近接余弦バンドでは両者の大きさが等しい。正孔質量の負号は、電子バンド頂の負曲率を正の正孔質量に変換するために必要である。$\gamma > 0$ ではバンド底と上端の位置が入れ替わり、電子は $k = \pi/a$、正孔は $k = 0$ の近くで評価する。したがって $\gamma \neq 0$ でのキャリア質量は、どちらも $\hbar^2/(2|\gamma|a^2)$ である。$\gamma = 0$ ではバンドが平坦となり、有限の曲率から質量を求めるこの式は使えない。

[5] 二原子分子鎖の固有値方程式

一単位胞の基底を ϕ_A, ϕ_B とする。原子 A の対角要素は $E_A + 2\beta$、隣の単位胞にある A 軌道との移動要素は [2] と Bloch 和により $2\gamma\cos(ka)$ となる。B 軌道の対角要素は E_B。A–B 間の要素にも運動エネルギーの寄与がある。[2] で定義した T を用い、同一分子内の軌道の重なりを $S_{AB} = \langle\phi_A|\phi_B\rangle$ と置く。原問では列挙されていない重なり積分を無視するので $S_{AB} \simeq 0$ である。孤立 A 原子の方程式 $(T + u)\phi_A = E_A\phi_A$ と Hermite 性から

$$\langle\phi_A|T + u|\phi_B\rangle = E_A S_{AB}, \tag{9}$$

$$\langle\phi_A|T + u + w|\phi_B\rangle = E_A S_{AB} + \langle\phi_A|w|\phi_B\rangle \simeq \delta. \tag{10}$$

孤立 B 原子の方程式から評価しても、同じ要素は $E_B S_{AB} + \langle \phi_A | u | \phi_B \rangle \simeq \delta$ となる。従って二つの等しいポテンシャル積分は、運動項を含む行列要素をそれぞれ評価するものである。係数 c_k, d_k は

$$\boxed{\begin{pmatrix} E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka) & \delta \\ \delta & E_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix} = E(k) \begin{pmatrix} c_k \\ d_k \end{pmatrix}.} \tag{11}$$

ここで行列は Hermite であり、固有値は実数となる。

[6] 混成バンド

$$\Delta = E_A - E_B + 2\beta \tag{12}$$

と置く。固有値方程式の行列式から

$$0 = [E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka) - E][E_B - E] - \delta^2. \tag{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_\pm(k) = {} & \frac{E_A + E_B}{2} + \beta + \gamma\cos(ka) \\ & \pm \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2} + \gamma\cos(ka)\right)^2 + \delta^2}. \end{aligned}} \tag{14}$$

まず $\delta = 0$ なら、A 由来の余弦バンド $E_A + 2\beta + 2\gamma\cos(ka)$ と、分散のない B 準位 E_B が交差する。交差条件は $\Delta + 2\gamma\cos(ka) = 0$ である。$|\Delta| \ll |\gamma|$ では交差点が第一ブリルアン領域内にあり、$\Delta = 0$ なら $ka = \pm\pi/2$。一方 $|\Delta| \gg |\gamma|$ では両バンドの中心エネルギー差が A バンドの半幅より十分大きく、交差しない。

$\delta \neq 0$ は A と B の混成を生む。交差点近傍では固有値が分裂し、直接ギャップは $2|\delta|$ となる。$|\Delta| \gg |\gamma|$ では未混成準位差 $|\Delta + 2\gamma\cos(ka)|$ が全波数で $|\delta|$ より十分大きい。固有値方程式の二行から

$$\delta d_k = [E(k) - E_A - 2\beta - 2\gamma\cos(ka)]c_k, \qquad \delta c_k = [E(k) - E_B]d_k \tag{15}$$

となる。B に近い枝では $|c_k/d_k| \simeq |\delta/(\Delta + 2\gamma\cos(ka))| \ll 1$、A に近い枝では同様に $|d_k/c_k| \ll 1$ だから、各枝は主に元の A または B 軌道の性質を保つ。また固有値のずれは

$$\sqrt{\frac{[\Delta + 2\gamma\cos(ka)]^2}{4} + \delta^2} - \frac{|\Delta + 2\gamma\cos(ka)|}{2} \simeq \frac{\delta^2}{|\Delta + 2\gamma\cos(ka)|} \tag{16}$$

と小さい。これは下図の大離調での弱い準位移動にも対応する。

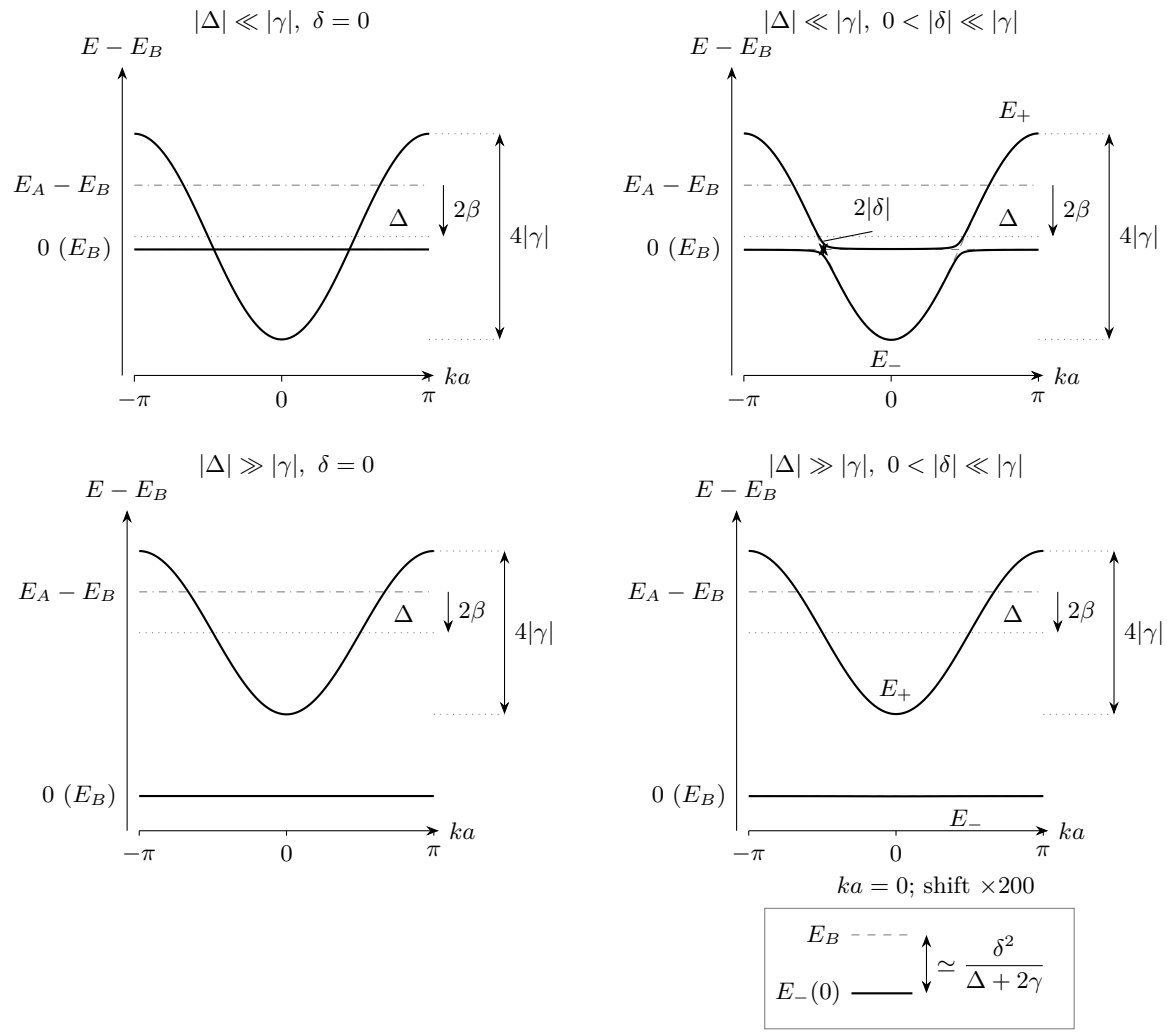


図 2: 混成の有無と離調の大小による分散。エネルギーは $|\gamma|$ を単位とし、E_B を基準とする。全図で $\gamma = -1$、$\beta = -0.5$、小離調は $\Delta = 0.25$、大離調は $\Delta = 4$ とした。有限混成の二図はともに $\delta = 0.12$。実線は固有エネルギー、破線は未混成 A バンドと B 準位、一点鎖線は孤立 A 準位、点線は A バンド中心を示す。矢印 2β は孤立 A 準位から中心への移動、$4|\gamma|$ は未混成 A バンドの幅である。右上は交差波数でのギャップ、右下の枠内は $ka = 0$ での B 由来準位の移動を縦に 200 倍拡大した図で、実線の位置は厳密な固有値から計算した。$\Delta < 0$ の大離調では上下のバンド順が逆になる。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 円柱 B にはたらく摩擦

円柱 B の中心を原点に取り、右向きを x 軸正方向とする。円柱 C から B が受ける接線摩擦力 F は接触点で左下向き、床からの摩擦力 F' は床面に沿って左向きである。C から B への法線力を T、床から B への法線力を N とすると、B に作用する力は次のようになる。

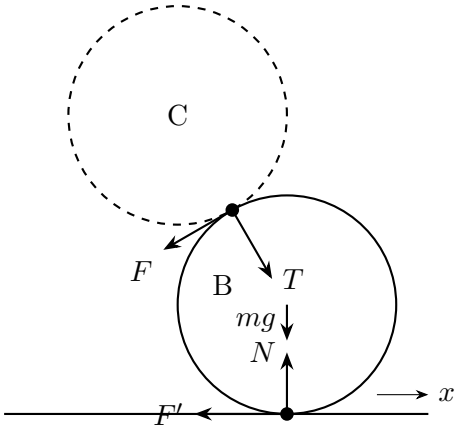


図 1: 円柱 B の自由物体図。摩擦力は各接触面の接線方向。

B の中心軸まわりでは、C との接触摩擦と床摩擦が腕の長さ a で逆向きのトルクを作る。静止しているので

$$\boxed{F = F'.} \tag{1}$$

[2] 静止に必要な摩擦係数

左右対称なので、C が A、B から受ける接触力の鉛直成分を合計すると

$$2\left(\frac{F}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}T\right) = mg, \qquad F + \sqrt{3}T = mg. \tag{2}$$

B の水平方向の釣合いは

$$-F' - \frac{\sqrt{3}}{2}F + \frac{1}{2}T = 0. \tag{3}$$

$F' = F$ と連立して

$$F = F' = \frac{2-\sqrt{3}}{2}mg, \qquad T = \frac{1}{2}mg. \tag{4}$$

B の鉛直釣合いから床の法線力は

$$N = mg + \frac{1}{2}F + \frac{\sqrt{3}}{2}T = \frac{3}{2}mg. \tag{5}$$

よって、円柱間と床面でそれぞれ静止摩擦力が最大静止摩擦力を越えないための条件は

$$\boxed{\mu \geq \frac{F}{T} = 2 - \sqrt{3}, \qquad \mu' \geq \frac{F'}{N} = \frac{2-\sqrt{3}}{3}.} \tag{6}$$

等号は最大静止摩擦力が働く限界の状態を表し、この場合も静止の条件に含まれる。

[3] 円柱の慣性モーメント

円柱の体積密度は $m/(\pi a^2 l)$。中心軸から距離 r の薄い円筒殻の質量は $2\pi r l\, dr$ に密度を掛けたものだから

$$I = \int_0^a r^2 \frac{m}{\pi a^2 l}(2\pi r l)\, dr = \frac{2m}{a^2}\int_0^a r^3\, dr \tag{7}$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}ma^2}. \tag{8}$$

[4] 位置 T までの運動

右向きを正、反時計回りを正とする。床接点の床に対する速度は $v+a\omega$ で、初期値は $v_0+a\omega_0 > 0$ である。この速度が初めて 0 になるまでは接点が右へ滑るので、動摩擦力は左向きで大きさ $\mu'' mg$ となる。以下の滑走中の式はこの区間に適用する。摩擦は並進速度を減らし、反時計回りの角速度も減らす。

$$m\dot{v} = -\mu'' mg, \qquad I\dot{\omega} = -a\mu'' mg. \tag{9}$$

$I = ma^2/2$ を使い初期条件を入れると

$$v(t) = v_0 - \mu'' g t, \qquad \omega(t) = \omega_0 - \frac{2\mu'' g}{a} t. \tag{10}$$

重心が一時停止する位置 T では $t_T = v_0/(\mu'' g)$ なので

$$\boxed{ST = v_0 t_T - \frac{1}{2}\mu'' g t_T^2 = \frac{v_0^2}{2\mu'' g}}, \qquad \boxed{\omega(T) = \omega_0 - \frac{2v_0}{a}}. \tag{11}$$

[5] 滑らずに転がり始める速さ

床との相対速度がゼロになる条件は、床接点の速度 $v + a\omega = 0$。滑走中

$$v(t) + a\omega(t) = v_0 + a\omega_0 - 3\mu'' g t \tag{12}$$

だから、転がり開始時刻は

$$t_R = \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g}. \tag{13}$$

そのときの符号付き重心速度は

$$v_R = v_0 - \mu'' g t_R = \frac{2v_0 - a\omega_0}{3}. \tag{14}$$

問題の [6] の状況では $t_R > t_T$ であり、$v_R < 0$。従って速さは

$$\boxed{|v_R| = \frac{a\omega_0 - 2v_0}{3}}. \tag{15}$$

[6] 位置 S へ戻る条件

転がり始めるのが T 通過より後であるには $t_R > t_T$。滑走だけを続けた場合に S へ戻る時刻は $t_S = 2v_0/(\mu'' g)$ であり、S に達する前に滑りが止まるには $t_R < t_S$。したがって

$$\frac{v_0}{\mu'' g} < \frac{v_0 + a\omega_0}{3\mu'' g} < \frac{2v_0}{\mu'' g}. \tag{16}$$

$v_0, \mu'', g, a > 0$ を用いて整理すると

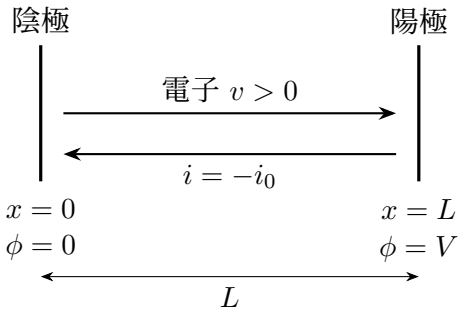
$$\boxed{\frac{2v_0}{a} < \omega_0 < \frac{5v_0}{a}}. \tag{17}$$

この範囲では T の後に左向きの無滑り運動へ移り、S までの距離を等速で戻る。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

陰極を $x=0$、陽極を $x=L$ とし、電位差を $V>0$ とする。電子は陰極から陽極へ進む一方、慣用電流は逆向きである。原本の装置を一次元で表すと次のようになる。



[1] 電子の速度

電子が陰極を出るときの運動エネルギーを無視できる。電荷 $-e$ の電位エネルギーは $-e\phi$ なので、陰極から x までのエネルギー保存は

$$\frac{1}{2}mv(x)^2 - e\phi(x) = 0. \tag{1}$$

従って陽極向きを正とする速度は

$$\boxed{v(x) = \sqrt{\frac{2e\phi(x)}{m}}}. \tag{2}$$

[2] 定常電流

電荷保存則は $\partial\rho/\partial t + \partial i/\partial x = 0$ である。定常状態では $\partial\rho/\partial t = 0$ だから $\partial i/\partial x = 0$、すなわち i は一定である。電子数密度を $n>0$、速度を $v>0$ とすると電子の電荷は $-e$ なので

$$i = -env = -i_0, \qquad i_0 > 0. \tag{3}$$

[3] 電位の微分方程式

定常電流から $n = i_0/(ev)$ であり、これを Poisson 方程式 $\epsilon_0\phi'' = en$ に代入すると

$$\phi''(x) = \frac{i_0}{\epsilon_0 v(x)} = \frac{i_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\,\phi(x)^{-1/2}. \tag{4}$$

従って

$$\boxed{A = \frac{i_0}{\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}, \qquad \alpha = -\frac{1}{2}.} \tag{5}$$

[4] 電位分布

$A>0$ であり、$x>0$ では ϕ は増加する。右辺の $\phi^{-1/2}$ は陰極端 $\phi=0$ で定義されないので、微分方程式は $x>0$ で積分し、$x\to 0^{+}$ で $\phi,\phi'\to 0$ を課して積分定数を定める。微分方程式に ϕ' を掛けると

$$\frac{1}{2}\bigl(\phi'(x)\bigr)^{2} = 2A\sqrt{\phi(x)}, \qquad \phi'(x) = 2\sqrt{A}\,\phi(x)^{1/4}. \tag{6}$$

この式をさらに積分して

$$\frac{4}{3}\phi(x)^{3/4} = 2\sqrt{A}\,x \tag{7}$$

を得る。よって陰極境界を満たす電位は

$$\boxed{\phi(x) = \left(\frac{9A}{4}\right)^{2/3} x^{4/3} = \left[\frac{9i_0}{4\epsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}\right]^{2/3} x^{4/3}.} \tag{8}$$

実際、この解は $\phi(0)=0$ および $\phi'(0)=0$ を満たし、$x>0$ で $\phi''>0$ となる。ただし $\phi''(x)=\frac{4}{9}(9A/4)^{2/3}x^{-2/3}$ は $x\to 0^{+}$ で発散する。したがって微分方程式は $x>0$ で用い、陰極での電位と電場の条件は $x\to 0^{+}$ の極限として課している。

[5] 電流電圧則

陽極で $\phi(L)=V$ とおくと、電位分布を i_0 について解いて

$$\boxed{i_0 = \frac{4}{9}\epsilon_0\sqrt{\frac{2e}{m}}\,\frac{V^{3/2}}{L^{2}}.} \tag{9}$$

これは平板真空ダイオードの空間電荷制限電流密度である。i_0 は電圧の $3/2$ 乗に比例し、電極間隔の二乗に反比例する。符号付き慣用電流は $i=-i_0$ である。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

生成・消滅演算子を用いると

$$\hat{X} = x_0(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}, \qquad \hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

[1] 双極子遷移

$\hat{\mu} = q\hat{X}$ だから、数状態間の行列要素は

$$\langle l|\hat{\mu}|n\rangle = qx_0 \left(\sqrt{n}\,\delta_{l,n-1} + \sqrt{n+1}\,\delta_{l,n+1}\right). \tag{2}$$

従って $n \geq 1$ なら $|n-1\rangle, |n+1\rangle$ へ遷移でき、基底状態 $|0\rangle$ からは $|1\rangle$ だけが許される。

[2] 四次摂動によるエネルギー補正

一次摂動論では $\Delta E_n = \langle n|\lambda\hat{X}^4|n\rangle$ である。$Q = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ とおき、問題文の昇降作用を 2 回用いると

$$Q^2|n\rangle = \sqrt{n(n-1)}|n-2\rangle + (2n+1)|n\rangle + \sqrt{(n+1)(n+2)}|n+2\rangle. \tag{3}$$

$n < 2$ のとき最初の項はなく、負の添字の状態は含めない。Q は Hermite であり、異なる数状態は直交するので、

$$\begin{aligned}\langle n|Q^4|n\rangle &= \|Q^2|n\rangle\|^2 &(4)\\ &= n(n-1) + (2n+1)^2 + (n+1)(n+2) &(5)\\ &= 6n^2 + 6n + 3. &(6)\end{aligned}$$

したがって

$$\boxed{\Delta E_n = 3\lambda(2n^2 + 2n + 1)\left(\frac{\hbar}{2m\omega_0}\right)^2.} \tag{7}$$

[3] 摂動後の双極子遷移

摂動を一次まで含む規格化固有状態は

$$|n\rangle' = |n\rangle + \frac{\lambda x_0^4}{\hbar\omega_0} \sum_{\substack{k\neq n \\ |k-n|\in\{2,4\}}} \frac{\langle k|Q^4|n\rangle}{n-k}|k\rangle + O(\lambda^2), \qquad Q = \hat{a} + \hat{a}^\dagger. \tag{8}$$

四次演算子は偶数準位だけを混ぜるので、$|8\rangle'$ と反対パリティの状態だけが双極子遷移の候補となる。さらに Q は準位を 1 つだけ変えるため、候補は $l = 3, 5, 7, 9, 11, 13$ である。ただし候

補範囲だけでは行列要素の非零性は決まらない。$Q_{lk} = \langle l|Q|k\rangle$ と書く。Q を 4 回作用させると、非対角行列要素は

$$(Q^4)_{n+2,n} = (4n+6)\sqrt{(n+1)(n+2)}, \tag{9}$$

$$(Q^4)_{n+4,n} = \sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \qquad (n \geq 0) \tag{10}$$

となる。準位を下げる行列要素は、これらの実行列要素の添字を交換して得られる。$\eta = \lambda x_0^4/(\hbar\omega_0)$ とすると、一次遷移振幅は

$$\frac{\langle l'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = Q_{l8} + \eta\left[\sum_{k\neq l}\frac{(Q^4)_{kl}Q_{k8}}{l-k} + \sum_{k\neq 8}\frac{Q_{lk}(Q^4)_{k8}}{8-k}\right] + O(\eta^2). \tag{11}$$

$l = 13$ では一次補正に寄与するのは、終状態の $|9\rangle$ 成分と初期状態の $|12\rangle$ 成分だけである。その二項は

$$\frac{\sqrt{13}\,(Q^4)_{12,8}}{4} + \frac{\sqrt{13}\,(Q^4)_{12,8}}{-4} = 0. \tag{12}$$

上の角括弧内の二つの総和へ行列要素を代入する。各行で左の加数が終状態の補正、右の加数が初期状態の補正からの寄与である。

$$l = 3: \quad -2\sqrt{105} + 2\sqrt{105} = 0, \tag{13}$$

$$l = 5: \quad -61\sqrt{21} + 65\sqrt{21} = 4\sqrt{21}, \tag{14}$$

$$l = 7: \quad -153\sqrt{8} + 105\sqrt{8} = -48\sqrt{8}, \tag{15}$$

$$l = 9: \quad 408 - 570 = -162, \tag{16}$$

$$l = 11: \quad 69\sqrt{110} - 66\sqrt{110} = 3\sqrt{110}. \tag{17}$$

従って $l = 3$ でも一次振幅が消える。残る 4 つの振幅は

$$\frac{\langle 5'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 4\sqrt{21}\,\eta + O(\eta^2), \qquad \frac{\langle 7'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = \sqrt{8}(1-48\eta) + O(\eta^2), \tag{18}$$

$$\frac{\langle 9'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 3(1-54\eta) + O(\eta^2), \qquad \frac{\langle 11'|q\hat{X}|8'\rangle}{qx_0} = 3\sqrt{110}\,\eta + O(\eta^2). \tag{19}$$

従って求める遷移先は

$$\boxed{|5\rangle',\ |7\rangle',\ |9\rangle',\ |11\rangle'.} \tag{20}$$

[4] Heisenberg 表示の位置演算子

$[\hat{H}_0, \hat{a}] = -\hbar\omega_0\hat{a}$、$[\hat{H}_0, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger$ より

$$\hat{a}(t) = e^{-i\omega_0 t}\hat{a}(0), \qquad \hat{a}^\dagger(t) = e^{i\omega_0 t}\hat{a}^\dagger(0). \tag{21}$$

従って

$$\hat{X}(t) = x_0\left(e^{-i\omega_0 t}\hat{a}(0) + e^{i\omega_0 t}\hat{a}^\dagger(0)\right) \tag{22}$$

$$= \boxed{\hat{X}(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{\hat{P}(0)}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t).} \tag{23}$$

[5] 位置の期待値

数状態では $\langle n|\hat{X}(0)|n\rangle = \langle n|\hat{P}(0)|n\rangle = 0$ なので

$$\boxed{\langle n|\hat{X}(t)|n\rangle = 0.} \tag{24}$$

有限振幅で振動する例は、$\hat{a}$ の固有状態である規格化コヒーレント状態

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \qquad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{25}$$

である。この状態では

$$\boxed{\langle\alpha|\hat{X}(t)|\alpha\rangle = 2x_0\,\mathrm{Re}\left(\alpha e^{-i\omega_0 t}\right),} \tag{26}$$

となり、$\alpha \neq 0$ なら有限の振幅で角振動数 ω_0 の正弦振動をする。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] Bose–Einstein 分布

エネルギー E の一粒子状態の平均占有数は

$$\boxed{f_{BE}(E) = \frac{1}{\exp[(E-\mu)/(k_B T)] - 1}.} \tag{1}$$

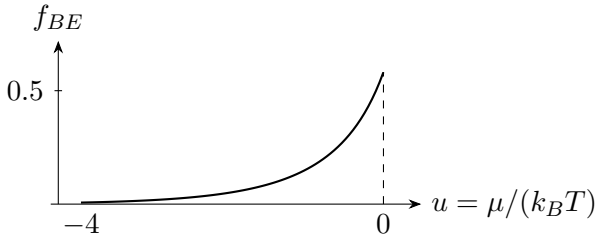
最低エネルギーを $E_0 = 0$ としたので、基底状態も含めて分母を正に保つには $\mu < 0$ が必要である。凝縮相の熱力学極限では $\mu \to 0^-$ を考え、励起状態 $E > 0$ の分布には $\mu = 0$ を用いる。この極限で基底状態の占有数は発散するため、凝縮粒子数は励起状態の分布と分けて数える。

[2] μ への依存

E と $T > 0$ を固定すると

$$\frac{\partial f_{BE}}{\partial \mu} = \frac{e^{(E-\mu)/(k_B T)}}{k_B T \left(e^{(E-\mu)/(k_B T)} - 1\right)^2} > 0, \tag{2}$$

なので f_{BE} は μ とともに単調に増加する。以下は例として $E > 0$ かつ $E/(k_B T) = 1$ の概形である。許される $\mu \leq 0$ では $\mu = 0$ に有限値で近づく。基底状態 $E = 0$ では $\mu \to 0^-$ で発散する。



[3] 状態密度

運動量空間でエネルギーが E 以下の領域は半径 $\sqrt{2mE}$ の球である。スピン縮退がなく、状態を位相空間体積 h^3 ごとに数えると

$$\mathcal{N}(E) = \frac{V}{h^3}\frac{4\pi}{3}(2mE)^{3/2} = \frac{V}{6\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{3/2}, \tag{3}$$

$$D(E) = \frac{d\mathcal{N}}{dE} = \boxed{\frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} E^{1/2}.} \tag{4}$$

[4] 励起粒子数の上限

固定した E で占有数は μ とともに増すから、励起状態の粒子数は $\mu = 0$ で最大となる。$\beta = 1/(k_B T)$ とし $x = \beta E$ と変数変換すると

$$N_t^{\max} = \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1}\,dx \tag{5}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{3/2}\Gamma(3/2)\zeta(3/2) \tag{6}$$

$$= \boxed{V\zeta(3/2)\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.} \tag{7}$$

従って $T \to 0$ で $N_t^{\max} \to 0$ となる。

[5] 臨界温度

臨界点では励起状態に全粒子を収容できる限界に達し、$N = N_t^{\max}(T_c)$ である。よって

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B}\left[\frac{N}{V\zeta(3/2)}\right]^{2/3}.} \tag{8}$$

[6] 凝縮成分

有限系での基底占有数は $N_0 = f_{BE}(0) = [\exp(-\mu/k_B T) - 1]^{-1}$ だから、$\mu = -k_B T \ln(1 + 1/N_0)$ である。$T < T_c$ では余剰粒子が基底状態を巨視的に占め、熱力学極限で $N_0 \to \infty$ とともに $\mu \to 0^-$ となる。この極限で励起状態の分布に $\mu = 0$ を代入すると、その粒子数は $N_t^{\max}(T)$ に飽和する。残り

$$N_0 = N - N_t^{\max}(T) \tag{9}$$

は $E = 0$ の基底状態を巨視的に占める。したがって $E > 0$ の連続状態の積分だけで凝縮粒子数を数えない。

[7] 全エネルギーと定積熱容量

基底状態のエネルギーを 0 とすると、全エネルギーは励起状態の寄与だけである。

$$U = \int_0^\infty E D(E) f_{BE}(E)\,dE \tag{10}$$

$$= \frac{V}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{5/2}\int_0^\infty \frac{x^{3/2}}{e^x - 1}\,dx \tag{11}$$

$$= \boxed{\frac{3}{2}V\zeta(5/2)\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_B T)^{5/2}.} \tag{12}$$

固定 N, V で微分する。凝縮相では $\mu = 0$ であり、励起状態の U は上式の温度依存だけを持つため

$$\boxed{C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{N,V} = \frac{15}{4}Vk_B\zeta(5/2)\left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}.} \tag{13}$$

[8] 液体 ^{4}He の数値評価

数密度を質量密度から求めると

$$n = \frac{N}{V} = \frac{1.5 \times 10^2}{6.7 \times 10^{-27}} = 2.24 \times 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}. \tag{14}$$

臨界温度は

$$T_c = \frac{2\pi(1.1 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s})^2}{(6.7 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg})(1.4 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K})} \left(\frac{2.24 \times 10^{28}\,\mathrm{m}^{-3}}{2.61}\right)^{2/3} = 3.40\ \mathrm{K}. \tag{15}$$

有効数字 1 桁では $\boxed{T_c \simeq 3\ \mathrm{K}}$ である。

[9] 理想気体模型との違い

実際の液体ヘリウムでは原子間相互作用を無視できず、相関のある液体となる。ここで用いた理想気体は相互作用を全く含まないため、その臨界温度は実験の超流動転移温度と一致する必要はない。

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

領域 II ($|x| < d$) の屈折率を n_2、領域 I・III ($|x| > d$) の屈折率を $n_1 < n_2$ とする。界面に平行な z 方向の波数を $\beta > 0$ とし、原本の位相因子 $e^{i(\omega t - \beta z)}$ を用いる。

[1] 閉じ込め条件

界面に沿う波数成分は境界で連続である。コア内の波数の大きさは $k_0 n_2$ なので $\beta = k_0 n_2 \sin\theta$ である。クラッドで x 方向に伝搬せず減衰するには、その媒質中の全波数 $k_0 n_1$ より界面平行成分が大きくなければならない。一方コア内では横方向に振動するので

$$\boxed{k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2.} \tag{1}$$

下端ではクラッドの減衰率が 0、上端ではコアの横波数が 0 となり、いずれも束縛モードの条件から外れる。

[2] Maxwell 方程式

媒質 j では $\epsilon_j = \epsilon_0 n_j^2$、$\mu = \mu_0$ とする。z 依存は $\partial/\partial z = -i\beta$ なので、$\nabla \times \boldsymbol{E} = -i\omega\mu_0 \boldsymbol{H}$ と $\nabla \times \boldsymbol{H} = i\omega\epsilon_j \boldsymbol{E}$ の成分比較から

$$E_y' = -i\mu_0\omega H_z, \qquad H_x = -\frac{\beta}{\mu_0\omega} E_y, \tag{2}$$

$$H_y = 0, \qquad H_z' = i\left(\frac{\beta^2}{\mu_0\omega} - \epsilon_j\omega\right) E_y. \tag{3}$$

ここで H_y は $\beta > 0$ による成分式から 0 であり、Maxwell 方程式の残りの成分とも整合する。

[3] H_z は恒等的にゼロにはならない

領域 II で H_z が恒等的にゼロであると仮定する。このとき $H_z' = 0$ なので、[2] の成分式より

$$0 = \frac{i}{\mu_0\omega}(\beta^2 - k_0^2 n_2^2) E_y. \tag{4}$$

[1] の $\beta < k_0 n_2$ より括弧内は非零であり、領域 II で E_y も恒等的にゼロとなる。さらに $H_x = -\beta E_y/(\mu_0\omega)$ と $H_y = 0$ より、同領域の電磁場はすべてゼロとなり、非自明な場が伝搬することに反する。従って

$$\boxed{H_z \not\equiv 0 \qquad (-d < x < d).} \tag{5}$$

[4] 電場の波動方程式

[2] の式を微分すると $E_y'' = -i\mu_0\omega H_z'$ であるから

$$\boxed{\frac{d^2E_y}{dx^2} + (k_0^2 n_j^2 - \beta^2)E_y = 0, \qquad j = \begin{cases} 1 & (|x| > d), \\ 2 & (|x| < d). \end{cases}} \tag{6}$$

コアでは $k = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} > 0$、クラッドでは $\kappa = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} > 0$ とおく。

[5] 偶対称固有モード

コア内の偶関数解と外側で減衰する解を

$$E_y(x) = \begin{cases} a\cos(kx), & |x| < d, \\ a\cos(kd)e^{-\kappa(|x|-d)}, & |x| \geq d \end{cases} \tag{7}$$

と置く。E_y の連続性は外側の振幅を上式のように定める。$x = d$ で微分も連続する条件は

$$-ak\sin(kd) = -a\kappa\cos(kd), \qquad k\tan(kd) = \kappa. \tag{8}$$

従って

$$\boxed{A(\beta) = kd = d\sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}, \qquad B(\beta) = \frac{\kappa}{k} = \sqrt{\frac{\beta^2 - k_0^2 n_1^2}{k_0^2 n_2^2 - \beta^2}}, \qquad \tan A = B.} \tag{9}$$

[6] 固有値と単一モード条件

$B > 0$ だから $\arctan B$ は $(-\pi/2, \pi/2)$ にあり、$\tan A = B$ は

$$F(\beta) = A(\beta) - \arctan B(\beta) = m\pi, \qquad m \in \mathbb{Z} \tag{10}$$

と同値である。許容区間 $k_0 n_1 < \beta < k_0 n_2$ で A は減少し、B は増加するため F は単調減少する。端点極限は

$$\lim_{\beta \to k_0 n_1 +} F(\beta) = A_{\max} = k_0 d\sqrt{n_2^2 - n_1^2} > 0, \tag{11}$$

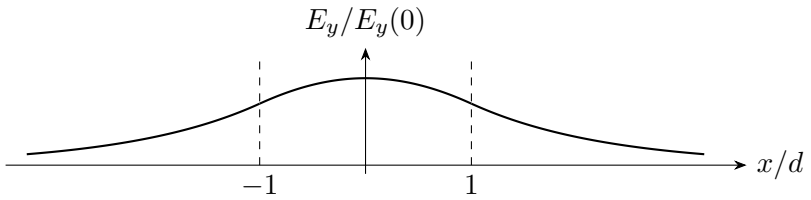
$$\lim_{\beta \to k_0 n_2 -} F(\beta) = -\frac{\pi}{2}. \tag{12}$$

よって $F = 0$ を満たす偶対称モードは必ず少なくとも 1 つある。F の値域に π が含まれるのは $A_{\max} > \pi$ のときで、その場合にはもう 1 つの偶モードが存在する。従って偶モードが 1 つだけとなる正確な条件は

$$\boxed{k_0 d\sqrt{n_2^2 - n_1^2} \leq \pi.} \tag{13}$$

等号では $F = \pi$ は $\beta = k_0 n_1$ という許容区間外の端でしか達しないため、追加の減衰束縛モードはない。

単一モード時はコア内に節のない偶関数形となり、両クラッドへ指数関数的に減衰する。図では横座標を x/d、縦座標を $E_y/E_y(0)$ とし、例として $kd = \kappa d = \pi/4$ を選ぶ。この組は界面条件 $k\tan(kd) = \kappa$ を満たし、上で定めた $A = kd = \pi/4$、$B = \kappa/k = 1$ に対応する（例えば $\beta d = 2$ とすれば、対応する屈折率比も $n_1 < n_2$ となる）。


$E_y/E_y(0)$
x/d
-1
1

物理工学専攻院試解答集
2013 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 二原子格子の分散関係

ばねの配置から、単位格子 n の変位は

$$m\ddot{u}_n = C_1(v_n - u_n) + C_2(v_{n-1} - u_n), \tag{1}$$
$$m\ddot{v}_n = C_1(u_n - v_n) + C_2(u_{n+1} - v_n). \tag{2}$$

Bloch 波を

$$u_n = ue^{i(kan-\omega t)}, \qquad v_n = ve^{i(ka(n+1/2)-\omega t)} \tag{3}$$

とおく。振幅の方程式は

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - C_1 - C_2 & C_1e^{ika/2} + C_2e^{-ika/2} \\ C_2e^{ika/2} + C_1e^{-ika/2} & m\omega^2 - C_1 - C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0. \tag{4}$$

非自明解には行列式が 0 であることが必要なので

$$\boxed{\omega_{\pm}^2(k) = \frac{C_1 + C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2\cos(ka)}}{m}}. \tag{5}$$

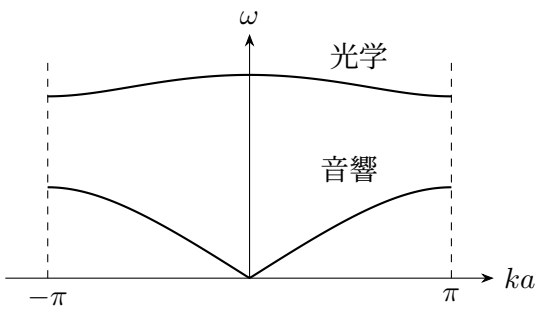
$\omega_-(k)$ が音響枝、$\omega_+(k)$ が光学枝である。

[2] 第一ブリルアン領域

第一ブリルアン領域は $-\pi/a \le k \le \pi/a$ である。端点と中心で

$$\omega_a(0) = 0, \qquad \omega_o(0) = \sqrt{\frac{2(C_1 + C_2)}{m}}, \tag{6}$$
$$\omega_a(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}, \qquad \omega_o(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \tag{7}$$

ここで $C_1 > C_2$ を用いた。図では $C_1 = 4, C_2 = 1, m = 1$ とし、横軸は ka で表す（ばね定数と質量は同じ単位系）。



音響枝の長波長極限は、$\cos(ka) \simeq 1 - (ka)^2/2$ を用いると

$$\omega_a(k) \simeq v_a|k|, \qquad \boxed{v_a = a\sqrt{\frac{C_1C_2}{2m(C_1+C_2)}}}. \tag{8}$$

光学枝は

$$\omega_o(k) \simeq \sqrt{\frac{2(C_1+C_2)}{m}} - \frac{C_1C_2a^2k^2}{4\sqrt{2m(C_1+C_2)^3}}. \tag{9}$$

したがって $k \to 0$ で、音響枝の群速度は v_a（$k < 0$ 側は $-v_a$）、光学枝の群速度は

$$v_{g,o} \simeq -\frac{C_1C_2a^2}{2\sqrt{2m(C_1+C_2)^3}}k \longrightarrow 0. \tag{10}$$

[3] 長波長での原子の振動

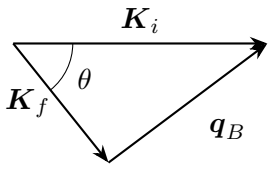
$k = 0$ で [1] の固有行列に音響枝の $\omega_a = 0$ を代入すると $-(C_1+C_2)u + (C_1+C_2)v = 0$、すなわち $u = v$ である。光学枝の $m\omega_o^2 = 2(C_1+C_2)$ を代入すると $(C_1+C_2)(u+v) = 0$、すなわち $u = -v$ となる。$k \to 0$ では Bloch 位相 $e^{ika/2} \to 1$ だから、この振幅関係が実変位 u_n, v_n の同位相・逆位相にそのまま対応する。従って音響枝では隣接原子がまとまって動き、光学枝では二つの基底原子が互いに逆向きに振動する。

[4] 光子の非弾性散乱

結晶へ渡る運動量は入射光子から散乱光子を引いた差であるため

$$\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{K}_f + \boldsymbol{q}_B. \tag{11}$$

三角形の頂点をつなぐと



である。$\omega_i \gg \omega_B$ なら $|\boldsymbol{K}_f| \simeq |\boldsymbol{K}_i|$ なので

$$|\boldsymbol{q}_B|^2 = |\boldsymbol{K}_i|^2 + |\boldsymbol{K}_f|^2 - 2|\boldsymbol{K}_i||\boldsymbol{K}_f|\cos\theta \tag{12}$$

$$\simeq 2|\boldsymbol{K}_i|^2(1-\cos\theta), \tag{13}$$

$$\boxed{|\boldsymbol{q}_B| \simeq 2|\boldsymbol{K}_i|\sin(\theta/2).} \tag{14}$$

[5] 音速と Brillouin 周波数

長波長音響フォノンでは $\omega_B = v_a|\boldsymbol{q}_B|$ である。媒質中の光子波数は $|\boldsymbol{K}_i| = n\omega_i/c$ だから

$$\boxed{\frac{\omega_B}{v_a} = \frac{2n\omega_i}{c}\sin(\theta/2).} \tag{15}$$

[6] 音速の数値

分光波数を $\tilde{\nu}_B = 1/\lambda_B = 3.0\,\mathrm{cm}^{-1} = 3.0\times10^2\,\mathrm{m}^{-1}$ とする。原本の $\hbar\omega_B = hc\tilde{\nu}_B$ と $h = 2\pi\hbar$ より $\omega_B = 2\pi c\tilde{\nu}_B$ である。また $\omega_i = 2\pi c/\lambda_i$ なので $\omega_B/\omega_i = \lambda_i\tilde{\nu}_B$。散乱角 180° では

$$v_a = \frac{c}{2n}\frac{\omega_B}{\omega_i} = \frac{c\lambda_i\tilde{\nu}_B}{2n} \tag{16}$$

$$= \frac{(3.0\times10^8)(680\times10^{-9})(3.0\times10^2)}{2(2.4)}\,\mathrm{m/s} \tag{17}$$

$$= 1.275\times10^4\,\mathrm{m/s} \simeq \boxed{1.3\times10^4\,\mathrm{m/s}} \quad (2\text{桁}). \tag{18}$$

[7] 中性子散乱からばね定数

$q = \pi/a$ では分散関係から

$$\omega_1 = \omega_o(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_1}{m}}, \qquad \omega_2 = \omega_a(\pi/a) = \sqrt{\frac{2C_2}{m}}. \tag{19}$$

中性子の運動エネルギー $E_n = \hbar^2K^2/(2M_n)$ と $K = 2\pi/\lambda$ を用いる。フォノンを生成するので

$$\frac{\hbar^2}{2M_n}\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda_{ij}}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{\lambda_f}\right)^2\right] = \hbar\omega_j, \qquad j = 1,2. \tag{20}$$

ここで $\lambda_{i1} < \lambda_{i2}$ なので、同一の λ_f に対して $j = 1$ のエネルギー移行が大きく、光学枝 C_1、$j = 2$ は音響枝 C_2 に対応する。$\Delta_j = \lambda_{ij}^{-2} - \lambda_f^{-2} > 0$ と置けば

$$\boxed{C_j = \frac{2m\pi^4\hbar^2}{M_n^2}\Delta_j^2, \qquad j = 1,2.} \tag{21}$$

[8] 格子定数

音響速度の式を a について解くと

$$a = v_a\sqrt{2m\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}. \tag{22}$$

ばね定数の表式を代入して

$$\boxed{a = \frac{v_aM_n}{\pi^2\hbar}\sqrt{\frac{1}{\Delta_1^2} + \frac{1}{\Delta_2^2}}}, \qquad \Delta_j = \frac{1}{\lambda_{ij}^2} - \frac{1}{\lambda_f^2}. \tag{23}$$

この式は長さの次元を持ち、音速因子 v_a を含む。

物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 重心運動と相対運動

全質量を $M = m_1 + m_2$ とすると、定義から

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{R} - \frac{m_2}{M}\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{R} + \frac{m_1}{M}\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

従って運動エネルギーは

$$\frac{1}{2}m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2^2 = \frac{1}{2}m_1\left(\dot{\boldsymbol{R}} - \frac{m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{m_1}{M}\dot{\boldsymbol{r}}\right)^2 \tag{2}$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{\boldsymbol{r}}^2. \tag{3}$$

交差項 $\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}$ の係数は $-m_1m_2/M + m_2m_1/M = 0$ なので相殺する。よって

$$\boxed{\mathcal{L} = \frac{1}{2}M\dot{\boldsymbol{R}}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{\boldsymbol{r}}^2 - U(\boldsymbol{r}), \qquad M = m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}.} \tag{4}$$

重心座標と相対座標の運動は独立に分離された。

以下では $U = U(r)$ とし、相対運動だけを考える。

[2] 極座標でのラグランジアン

平面極座標 $\boldsymbol{r} = (r\cos\phi, r\sin\phi, 0)$ の速度の大きさの二乗は

$$\dot{\boldsymbol{r}}^{\,2} = \dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}. \tag{5}$$

従って

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\mu(\dot{r}^{\,2} + r^2\dot{\phi}^{\,2}) - U(r).} \tag{6}$$

[3] 角運動量と有効ポテンシャル

L は ϕ に陽に依存しないので ϕ は循環座標である。Euler–Lagrange 方程式より

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = \frac{d}{dt}(\mu r^2\dot{\phi}) = 0, \qquad \boxed{l = \mu r^2\dot{\phi} = \text{一定}.} \tag{7}$$

r に関する方程式は

$$\mu\ddot{r} = \mu r\dot{\phi}^{\,2} - \frac{dU}{dr} = \frac{l^2}{\mu r^3} - \frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2}\right). \tag{8}$$

したがって半径方向の運動は、有効ポテンシャル

$$U_{\rm eff}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} \tag{9}$$

中の一次元運動と同じである。$l \neq 0$ のとき第二項は角運動量による遠心障壁と呼ばれ、半径方向の運動方程式に外向きの力 $l^2/(\mu r^3)$ を加える。

[4] エネルギー保存

半径方向の運動方程式に $\dot{r}$ を掛けると

$$\mu \dot{r}\ddot{r} = -\frac{dU_{\rm eff}}{dr}\dot{r} = -\frac{dU_{\rm eff}}{dt}. \tag{10}$$

よって

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^{\,2} + U(r) + \frac{l^2}{2\mu r^2} = \text{一定}.} \tag{11}$$

[5] Laplace–Runge–Lenz ベクトル

$U(r) = -k/r$（$k > 0$）の運動方程式は $\ddot{\boldsymbol{r}} = -k\hat{\boldsymbol{r}}/(\mu r^2)$、ただし $\hat{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}/r$ である。角運動量 $\boldsymbol{l} = \mu \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ は一定。原本で与えられたベクトルを

$$\boldsymbol{A} = \mu \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \hat{\boldsymbol{r}} \tag{12}$$

と書く。

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \mu \ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{13}$$

$$= -\frac{k}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} - \mu k \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = 0, \tag{14}$$

ここでは、$\dot{r} = \hat{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}$ として

$$\hat{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l} = \mu \hat{\boldsymbol{r}} \times (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \mu r(\dot{r}\hat{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{r}}) = -\mu r^2 \dot{\hat{\boldsymbol{r}}} \tag{15}$$

を用いた。最後の等号は $\dot{\hat{\boldsymbol{r}}} = (\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{r}\hat{\boldsymbol{r}})/r$ による。したがって $\boldsymbol{A}$ も保存する。

ベクトル積 $\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{r}$ はともに $\boldsymbol{l}$ と垂直なので

$$\boxed{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{l} = 0.} \tag{16}$$

またスカラー三重積を使うと

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = \mu(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{r} - \mu k r \tag{17}$$

$$= \mu \boldsymbol{l} \cdot (\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) - \mu k r = l^2 - \mu k r. \tag{18}$$

$A = |\boldsymbol{A}|$ とする。$l \neq 0$、$A \neq 0$ の場合には、$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角 α を使って $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r} = Ar\cos\alpha$ と等置し、

$$\boxed{\frac{1}{r} = \frac{\mu k}{l^2}\left(1 + \frac{A}{\mu k}\cos\alpha\right), \qquad A = |\boldsymbol{A}|.} \tag{19}$$

を得る。これは焦点を中心力の中心に持つ円錐曲線の極座標表示である。

$A = 0$ の円軌道では α は定義できないが、上の内積恒等式から直接 $r = l^2/(\mu k)$ が得られる。一方、$l = 0$ の直線軌道では l^2 で除算できないため、この軌道式を使わず、半径方向の運動方程式 $\mu \ddot{r} = -k/r^2$（$r > 0$）で扱う。

物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

以下、真空中を考える。

[1] 電流が作る磁場

[1.1] 円環電流

円環の各電流要素から軸上の点までの距離は $\sqrt{a^2+z^2}$ である。対称性により横成分は相殺し、軸成分だけが加わる。Biot–Savart 則から

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2\,d\theta}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}}. \tag{1}$$

図 1 の電流方向へ右手の指を曲げると、親指が $+z$ を向く。

[1.2] 有限長ソレノイドの中心磁場

巻数が長さ方向に一様に分布するとし、単位長さあたりの巻数を $n = N/l$ とする。軸方向位置 z' にある幅 dz' の巻線は $n\,dz'$ 回の円電流に相当する。その中心への寄与を [1.1] に重ねると

$$B_z(0) = \frac{\mu_0 n I a^2}{2}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{dz'}{(a^2+z'^2)^{3/2}} \tag{2}$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{2\sqrt{a^2+(l/2)^2}} = \boxed{\frac{\mu_0 N I}{\sqrt{l^2+4a^2}}}. \tag{3}$$

中心磁場はソレノイド軸方向である。有限長の結果であり、$l \gg a$ の極限では $B_z(0) \simeq \mu_0 N I/l$ となる。

[1.3] 自己インダクタンス

自己インダクタンスの計算では $l \gg a$ とし、内部磁場を一様とみなす。各巻線を貫く磁束は

$$\Phi = B\pi a^2 \simeq \frac{\mu_0 N I}{l}\pi a^2. \tag{4}$$

全磁束鎖交数は $N\Phi = LI$ だから

$$\boxed{L = \frac{N\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 \pi a^2}{l}.} \tag{5}$$

[2] 交流コンデンサー間の電磁場

極板間隔 $d \ll b$ として端効果を無視し、極板半径が交流の波長に比べて十分小さい準静的近似を用いる。その条件は $\omega_0 b\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \ll 1$ であり、電磁波の伝播に伴う電場の空間変化を無視する。極板間の電場を $+z$ 方向に正として選ぶと

$$\boldsymbol{E}(t) = \frac{v_0}{d}\sin(\omega_0 t)\,\boldsymbol{e}_z. \tag{6}$$

端効果を無視し、半径 $r < b$ の円周を囲む積分路に Maxwell–Ampère 則を適用する。電束は $\pi r^2 E_z$ なので

$$2\pi r B_\phi = \mu_0\varepsilon_0 \frac{d}{dt}(\pi r^2 E_z), \qquad \boxed{\boldsymbol{B}(r,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0\omega_0 v_0 r}{2d}\cos(\omega_0 t)\,\boldsymbol{e}_\phi.} \tag{7}$$

$\cos(\omega_0 t) > 0$ のとき $\boldsymbol{B}$ は $+z$ 軸から見て反時計回り、$\cos(\omega_0 t) < 0$ では時計回りである。電場の時間変化に対する右ねじの向きであり、$\cos = 0$ では磁場は瞬間的にゼロとなる。

[3] LC 回路

[3.1] 電流の時間変化

最初にコンデンサーに蓄えられた電荷を $q(0) = CV$ とする。i の正方向をコンデンサーが放電するときの向きに取れば $i = -\dot{q}$ で、初期電流は $i(0) = 0$ である。回路の電圧則は

$$\frac{q}{C} = L\frac{di}{dt} = -L\frac{d^2 q}{dt^2}, \qquad \ddot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \tag{8}$$

角振動数 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ の解は

$$\boxed{q(t) = CV\cos(\omega t), \qquad i(t) = -\dot{q} = CV\omega\sin(\omega t).} \tag{9}$$

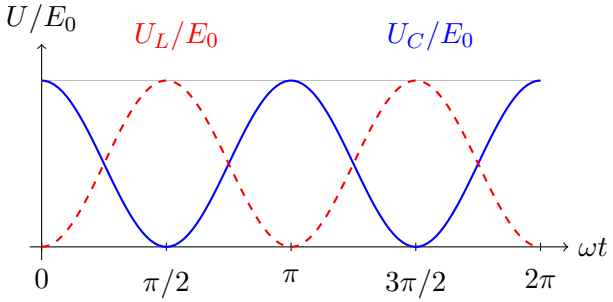
電流は最初ゼロから増え、コンデンサーが空になる $t = \pi/(2\omega)$ で最大となる。

[3.2] 電場・磁場エネルギー

コンデンサーとソレノイドのエネルギーは

$$U_C(t) = \frac{q^2}{2C} = E_0\cos^2(\omega t), \qquad U_L(t) = \frac{1}{2}Li^2 = E_0\sin^2(\omega t), \qquad E_0 = \frac{1}{2}CV^2. \tag{10}$$

したがって $U_C + U_L = E_0$ は一定である。$t = 0$ では全エネルギーが電場にあり、$t = \pi/(2\omega)$ では磁場に移り、$t = \pi/\omega$ では再び電場に戻る。この交換が繰り返される。横軸を ωt、縦軸を U/E_0 とした同一図に示す。



[3.3] 極板間隔を $2d$ にした場合

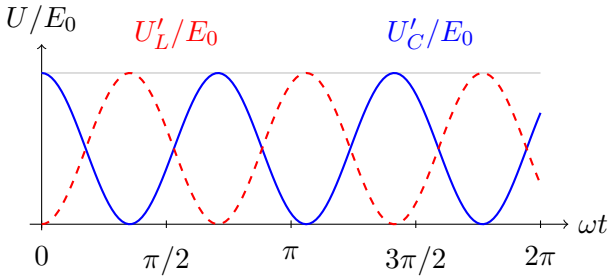
スイッチをつなぐ前に極板を引き離す間、漏れがないため電荷 $Q = CV$ は一定である。平行板容量が $C' = C/2$ となり、電圧は $V' = Q/C' = 2V$ に上がる。従って接続直後の全エネルギーと固有角振動数は

$$U_0' = \frac{Q^2}{2C'} = CV^2 = 2E_0, \qquad \omega' = \frac{1}{\sqrt{LC'}} = \sqrt{2}\,\omega. \tag{11}$$

以後 $q(0) = Q$, $i(0) = 0$ なので

$$U_C'(t) = 2E_0 \cos^2(\sqrt{2}\omega t), \qquad U_L'(t) = 2E_0 \sin^2(\sqrt{2}\omega t). \tag{12}$$

同じ規格化 U/E_0 と横軸 ωt で描くと、エネルギー振幅が 2 倍、振動数が $\sqrt{2}$ 倍になる。



極板間隔を増すには、極板間の引力に逆らって外力が仕事をする必要がある。理想的な容量モデルで損失を無視し、極板を静止させた前後の状態を比べると、外力の仕事は電気エネルギーの増加 $U_0' - E_0 = Q^2/(2C') - Q^2/(2C) = E_0$ に等しい。接続後はその増えた全エネルギーがコンデンサーとソレノイドの間を移る。

物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] Pauli 行列の固有状態

$|\alpha\rangle = (1,0)^T$, $|\beta\rangle = (0,1)^T$ を σ_z の固有値 $+1, -1$ の状態とする。行列の作用を直接計算すると

$$\sigma_x \frac{|\alpha\rangle + |\beta\rangle}{\sqrt{2}} = +\frac{|\alpha\rangle + |\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_x \frac{|\alpha\rangle - |\beta\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|\alpha\rangle - |\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \tag{1}$$

$$\sigma_y \frac{|\alpha\rangle + i|\beta\rangle}{\sqrt{2}} = +\frac{|\alpha\rangle + i|\beta\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad \sigma_y \frac{|\alpha\rangle - i|\beta\rangle}{\sqrt{2}} = -\frac{|\alpha\rangle - i|\beta\rangle}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

したがって $|\pm x\rangle = (|\alpha\rangle \pm |\beta\rangle)/\sqrt{2}$、$|\pm y\rangle = (|\alpha\rangle \pm i|\beta\rangle)/\sqrt{2}$ がそれぞれ固有値 ± 1 の規格化固有状態である。

[2] 電場中の一次元運動

[2.1] ハミルトニアン

$\boldsymbol{p} = p_x \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{e}_z$ なので $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} = -p_x E \boldsymbol{e}_y$。従って

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + H_{\mathrm{SO}} = \boxed{\frac{p_x^2}{2m} - \frac{\gamma E}{\hbar} p_x \sigma_y}. \tag{3}$$

[2.2] 分散とスピン

平面波 $\phi_k(x) = e^{ikx}$ では $p_x = \hbar k$ だから

$$H(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \gamma E k \sigma_y. \tag{4}$$

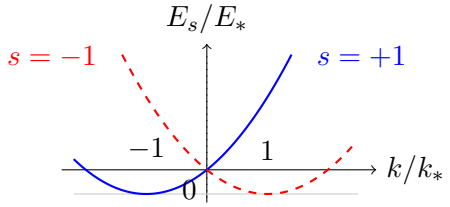
σ_y 固有値を $s = \pm 1$ とし、$|y, +1\rangle = |+y\rangle$、$|y, -1\rangle = |-y\rangle$ と書くと、固有関数と固有エネルギーは

$$\psi_{k,s}(x) = e^{ikx}|y, s\rangle, \tag{5}$$

$$E_s(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - s\gamma E k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k - \frac{sm\gamma E}{\hbar^2}\right)^2 - \frac{m\gamma^2 E^2}{2\hbar^2}. \tag{6}$$

二本は $k = 0$ で交差する放物線で、それぞれの固有枝ではスピンは一定の $s\boldsymbol{e}_y$ を向く。$\gamma < 0$ のため、各 $k \neq 0$ で低い方の枝は $s = \mathrm{sgn}(\gamma k) = -\mathrm{sgn}(k)$ である。つまり最低エネルギー状態を $k < 0$ から $k > 0$ へ移るとスピンは $+y$ から $-y$ へ反転する。交差点 $k = 0$ では縮退しており、スピン方向は一意に定まらない。

$k_* = |m\gamma E|/\hbar^2$、$E_* = m\gamma^2 E^2/(2\hbar^2)$、$x = k/k_*$ と置けば $E_s/E_* = x^2 + 2sx$ である。分散を図示する。



青実線と赤破線は σ_y の固有値 $+1,-1$ に対応する。放物線の頂点はそれぞれ $k/k_*=-1,+1$ にあり、エネルギーは $-E_*$ である。

[2.3] Zeeman 場を加えた場合

$\Delta=g\mu_B B/2>0$ とおくと、Zeeman 項を含む運動量表示ハミルトニアンは

$$H(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\Delta\sigma_x-\gamma Ek\sigma_y=\frac{\hbar^2k^2}{2m}+\boldsymbol{h}(k)\cdot\boldsymbol{\sigma},\qquad \boldsymbol{h}(k)=(\Delta,-\gamma Ek,0). \tag{7}$$

Pauli 行列の反交換関係から $(\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma})^2=|\boldsymbol{h}|^2 I$ となり、$\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ の固有値は $\pm|\boldsymbol{h}|$ である。従って

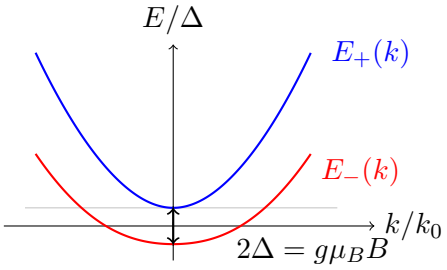
$$\boxed{E_\pm(k)=\frac{\hbar^2k^2}{2m}\pm\sqrt{\Delta^2+(\gamma Ek)^2}}. \tag{8}$$

$k=0$ の準位差は $2\Delta=g\mu_B B$ で、電場のみの交差が有限の間隔を持つ反交差となる。その規格化固有状態で $\{\sigma_j,\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{\sigma}\}=2h_jI$ の期待値を取ると、$2(\pm|\boldsymbol{h}|)\langle\sigma_j\rangle_\pm=2h_j$（$j=x,y,z$）である。従ってスピン期待値は

$$\boxed{\langle\boldsymbol{\sigma}\rangle_\pm=\pm\frac{(\Delta,-\gamma Ek,0)}{\sqrt{\Delta^2+(\gamma Ek)^2}}}. \tag{9}$$

よって $k=0$ では上枝が $+x$、下枝が $-x$ を向く。$\gamma<0$ なら $h_y=-\gamma Ek$ は k と同じ符号を持つ。$|k|$ が大きくなるにつれて、上枝のスピンは有効場 $\boldsymbol{h}(k)$ と平行、下枝のスピンは反平行のまま連続的に回る。十分大きな正の k では上枝が $+y$、負の k では上枝が $-y$ に近づき、下枝は反対向きとなる。

固有エネルギーの概略は次のようになる。$q=k/k_0$, $k_0=\Delta/(|\gamma|E)$ とし、二次項の無次元係数 $c=\hbar^2k_0^2/(2m\Delta)$ を表示例として $c=1$ に選ぶ。したがって曲線は $E_\pm/\Delta=q^2\pm\sqrt{1+q^2}$ で、$q=0$ のギャップは $2\Delta=g\mu_B B$ である。曲率は c に依存する。



物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 速度空間でのミクロカノニカル分布

$N = 2$ の全運動エネルギーは

$$E = \frac{m}{2}(v_{x,1}^2 + v_{y,1}^2 + v_{x,2}^2 + v_{y,2}^2). \tag{1}$$

したがって 4 成分を座標とする速度空間では、許される点は原点中心、半径

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2E}{m}}} \tag{2}$$

の 3 次元球面上にある。ミクロカノニカル分布では、等しい微小エネルギー幅の殻に含まれる位相空間体積を等重みに数える。速度球面の面積要素を dS、半径方向の厚さを dR とすると、殻の体積は $dS\,dR$ である。$E = mR^2/2$ を微分すれば

$$dE = mR\,dR, \qquad dS\,dR = \frac{dS\,dE}{mR}. \tag{3}$$

同じ球面上では mR が一定なので、固定したエネルギー幅に対する重みは dS に比例する。位置積分は速度方向に依存しない共通因子となり、ミクロカノニカル分布はこの球面に一様である。

[2] d 次元球面の表面積

半径 r の球面を、最初の $d-1$ 座標 $q_1, \ldots, q_{d-1}$ で表すと

$$q_d = \pm\sqrt{r^2 - q_1^2 - \cdots - q_{d-1}^2}. \tag{4}$$

各半球の面積要素はグラフ面積の公式から

$$dS = \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{d-1}\left(\frac{\partial q_d}{\partial q_j}\right)^2}\, dq_1 \cdots dq_{d-1} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - \sum_{j=1}^{d-1} q_j^2}}\, dq_1 \cdots dq_{d-1}. \tag{5}$$

上下二つの半球を足し、各変数が残りの半径以内を動く積分にすると、問題文の式が得られる。たとえば

$$S_2(r) = \int_{-r}^{r} dq_1\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2}}, \tag{6}$$

$$S_3(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2}}, \tag{7}$$

$$S_4(r) = \int_{-r}^{r} dq_1 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2}} dq_2 \int_{-\sqrt{r^2-q_1^2-q_2^2}}^{\sqrt{r^2-q_1^2-q_2^2}} dq_3\, \frac{2r}{\sqrt{r^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}}. \tag{8}$$

同じ構成を $d-1$ 重積分へ拡張できる。

[3] $N = 2$ の粒子 1 の速さ

速度ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が平面内で速さ v_1 と角度 θ を持つとする。エネルギー一定面上で粒子 2 の速さは

$$s = |\boldsymbol{v}_2| = \sqrt{R^2 - v_1^2}. \tag{9}$$

各 $\boldsymbol{v}_1$ に対し、残る 2 成分 $(v_{x,2}, v_{y,2})$ は半径 s の円周上を動く。エネルギーのデルタ関数を用いてその寄与を書くと

$$P(v_1)\,dv_1 \propto \underbrace{2\pi v_1\,dv_1}_{\boldsymbol{v}_1 \text{ の円環面積}} \int_{\mathbb{R}^2} d^2v_2\,\delta\Big(E - \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2)\Big) \tag{10}$$

$$\propto 2\pi v_1\,dv_1\,\frac{S_2(s)}{ms}. \tag{11}$$

$0 < v_1 < R$ で粒子 2 の速さを積分変数 u とすると、デルタ関数の引数が 0 となるのは $u = s$ で、その微分の絶対値は ms である。したがって上の殻積分は

$$\int_0^\infty 2\pi u\,du\,\delta\Big(E - \frac{m}{2}(v_1^2 + u^2)\Big) = \frac{2\pi s}{ms} = \frac{S_2(s)}{ms} = \frac{2\pi}{m}. \tag{12}$$

ここで $S_2(s) = 2\pi s$ は円周長であり、この殻積分は v_1 に依存しない。したがって速さの確率密度は

$$\boxed{P(v_1) \propto v_1 \quad (0 < v_1 < R), \qquad P(v_1) = 0 \quad (v_1 > R).} \tag{13}$$

半径 v_1 の円環面積に比例するため、平面速度ベクトルの密度と速さの密度は異なる。

[4] 一般の N に対する速さ分布

全エネルギー $E = N\epsilon$ のとき、$2N$ 次元速度球面の半径は

$$R = \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}. \tag{14}$$

粒子 1 の二成分を固定すると、残る $2N-2$ 成分の速度空間は半径 $s = \sqrt{R^2 - v_1^2}$ の球面上にある。前問と同じエネルギー殻積分から

$$P(v_1)\,dv_1 \propto 2\pi v_1\,dv_1\,\frac{S_{2N-2}(s)}{ms}. \tag{15}$$

d 次元球面の表面積は半径の $d-1$ 乗に比例するので $S_{2N-2}(s) \propto s^{2N-3}$。従って

$$\boxed{P(v_1) \propto v_1\left(\frac{2N\epsilon}{m} - v_1^2\right)^{N-2}, \qquad 0 < v_1 < \sqrt{\frac{2N\epsilon}{m}}.} \tag{16}$$

それより大きい速さでは $P(v_1) = 0$ である。

[5] Maxwell 速さ分布への極限

v_1 を固定して $N \to \infty$ とする。v_1 に依らない係数を比例定数へまとめると

$$P(v_1) \propto v_1\left(1 - \frac{mv_1^2}{2N\epsilon}\right)^{N-2} \tag{17}$$

$$\longrightarrow v_1 \exp\left(-\frac{mv_1^2}{2\epsilon}\right). \tag{18}$$

これは二次元での Maxwell 速さ分布であり、先頭の v_1 は二次元の円環面積要素に由来する。

[6] 温度

温度 T の二次元 Maxwell 速さ分布は $P(v_1) \propto v_1 \exp[-mv_1^2/(2k_BT)]$ である。指数を [5] と比べると

$$\boxed{T = \frac{\epsilon}{k_B}.} \tag{19}$$

これは各粒子に二つの並進自由度があり、平均運動エネルギーが $2(k_BT/2) = k_BT$ であることとも一致する。

物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 電束密度

球の全電荷は $Q = 4\pi a^2\sigma$ である。Gauss 則を半径 $r > a$ の球面に適用すると

$$\boxed{\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \sigma\frac{a^2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad D(r,t) = |\sigma|\left(\frac{a}{r}\right)^2.} \tag{1}$$

ここでは球中心を原点とする瞬間座標を用いた。

[2] 移動電荷の磁場

速度が c より十分小さいとき、動く微小電荷 dq による磁場は $d\boldsymbol{H} = (dq/4\pi)\,\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{R}}/R^2$ である。電束密度への寄与は $d\boldsymbol{D} = (dq/4\pi)\hat{\boldsymbol{R}}/R^2$ なので、重ね合わせれば球外で

$$\boxed{\boldsymbol{H} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}.} \tag{2}$$

移動する場は $\partial_t\boldsymbol{D} = -(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{D}$ を満たし、外部では $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = 0$ である。一定ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{D} = \partial_t\boldsymbol{D}$ となり、Maxwell–Ampère 則とも整合する。

[3] 円 C に沿う積分

$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_x$ とし、θ を $\boldsymbol{r}$ と $+x$ 軸のなす角とする。球面座標の方位方向を $\boldsymbol{e}_\phi$ とすると

$$\boldsymbol{H} = H_\phi\boldsymbol{e}_\phi, \qquad H_\phi = \frac{\sigma a^2 v\sin\theta}{r^2}. \tag{3}$$

円 C の半径は $d = r\sin\theta$ で、$\boldsymbol{H}$ は円周に接する。周回方向を $\boldsymbol{e}_\phi$ とする。積分面 S は、瞬間的な球中心を中心とする半径 $r > a$ の球面上で、極角 $0 \le \vartheta \le \theta$ の球冠とし、法線を外向きに選ぶ。その境界は円 C であり、正の周回方向は $\boldsymbol{e}_\phi$ となる。この面は球殻を横切らないので

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{\ell} = 2\pi d H_\phi \tag{4}$$

$$= \int_S \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \boxed{\frac{2\pi\sigma a^2 v\sin^2\theta}{r}}. \tag{5}$$

円周積分と面積分を結ぶ等号は Maxwell–Ampère 則の積分形である。S 上には伝導電流がなく、変位電流だけが寄与する。

[4] 円 C を縁とする面を貫く電束の変化

基準時刻に [3] の球冠面 S を選び、その後は実験室に固定して電束の時間変化を求める。球冠面上では $\boldsymbol{D} = \sigma a^2 \boldsymbol{e}_r / r^2$ なので、基準時刻の電束は

$$\Psi = \int_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \sigma a^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} \sin\vartheta \, d\vartheta = 2\pi\sigma a^2 (1 - \cos\theta). \tag{6}$$

微分するときに球冠面を球と一緒に動かしてはならない。実験室に固定した点では球中心からの位置が $\partial_t \boldsymbol{r} = -v\boldsymbol{e}_x$ と変わる。その長さの時間微分は $\partial_t r = \boldsymbol{e}_r \cdot \partial_t \boldsymbol{r} = -v\cos\vartheta$ である。$\boldsymbol{D} = \sigma a^2 \boldsymbol{r}/r^3$ に積の微分を適用すると

$$\partial_t \boldsymbol{D} = \sigma a^2 \left(\frac{\partial_t \boldsymbol{r}}{r^3} - \frac{3\boldsymbol{r}}{r^4} \partial_t r \right) \tag{7}$$

$$= \frac{\sigma a^2 v}{r^3} \left(3\cos\vartheta \, \boldsymbol{e}_r - \boldsymbol{e}_x \right), \tag{8}$$

$$\partial_t \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{e}_r = \frac{2\sigma a^2 v \cos\vartheta}{r^3}. \tag{9}$$

従って、固定面を貫く電束の時間変化は

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int_S \partial_t \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{10}$$

$$= \frac{2\sigma a^2 v}{r^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta} r^2 \cos\vartheta \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^2\theta}{r}. \tag{11}$$

よって Δt の一次までで

$$\boxed{\Delta\Psi = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^2\theta}{r} \Delta t = \frac{2\pi\sigma a^2 v \sin^3\theta}{d} \Delta t.} \tag{12}$$

この面の選び方なら、$r > a$ の全ての極角で導出できる。円 C の平面円板を選ぶと球殻を横切る場合があり、その場合は伝導電流も含める必要がある。軸上の $\theta = 0, \pi$ では円が縮み、上の値は 0 となる。

[5] 磁場の大きさ

[3] の円周積分を $2\pi d$ で割るか、[4] の電束変化率を使う。ここで割り算は円が縮まない $0 < \theta < \pi$ で行い、軸上は連続極限で評価すると

$$\boxed{H(r,t) = \frac{|\Delta\Psi|}{2\pi d \Delta t} = \frac{|\sigma| a^2 v \sin\theta}{r^2}.} \tag{13}$$

磁場は $\sigma > 0$ なら $+\boldsymbol{e}_\phi$、$\sigma < 0$ なら $-\boldsymbol{e}_\phi$ を向く。軸上では上式の極限が $H = 0$ を与える。

[6] 磁気エネルギー密度

真空中では $\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$ なので

$$\boxed{u(\boldsymbol{r},t) = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\mu_0 H^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \frac{\sin^2\theta}{r^4}.} \tag{14}$$

[7] 球外の磁気エネルギー

球外 $r > a$ の全空間で積分する。体積要素は $r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ なので

$$U_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \int_a^\infty \frac{dr}{r^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3\theta \, d\theta \tag{15}$$

$$= \frac{1}{2}\mu_0 \sigma^2 a^4 v^2 \left(\frac{1}{a}\right)(2\pi)\left(\frac{4}{3}\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}\mu_0 \sigma^2 a^3 v^2}. \tag{16}$$

[8] 運動に伴う全エネルギー

磁気エネルギーを運動エネルギーに加えると

$$\boxed{E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2}m_0 v^2 + U_{\mathrm{mag}} = \frac{1}{2}\left(m_0 + \frac{8\pi}{3}\mu_0 \sigma^2 a^3\right) v^2.} \tag{17}$$

したがって、この近似で運動に伴う有効質量は $m_{\mathrm{eff}} = m_0 + 8\pi\mu_0\sigma^2 a^3/3$ と書ける。

球が動くと電束密度の時間変化が磁場を作り、その磁場はエネルギーを持つ。この磁気エネルギーは速さの二乗に比例するので、運動エネルギーへ加えると質量の増加分として表せる。外力は物質の球だけでなく、運動に伴う磁場も作る仕事をする。ここで扱うのは運動に伴うエネルギーであり、電気的自己エネルギーは含めない。

物理工学専攻院試解答集
2014 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 低周波の状態密度

d 次元の波数空間で、半径 k の球（円）に含まれる状態数は体積に比例し、$N(k) \propto k^d$ である。線形分散 $\omega = vk$ から $k = \omega/v$ なので

$$D(\omega) = \frac{dN}{d\omega} \propto \omega^{d-1}. \tag{1}$$

従って 3 次元立方格子では $p = 2$、2 次元正方格子では $p = 1$ である。

[2] 低温比熱

低周波の状態密度を $D(\omega) = A\omega^p$ と書く。Debye 近似では、このべき則を有限個のモード数に合う上限角周波数 ω_D まで延長する。この近似での内部エネルギーは

$$U = \int_0^{\omega_D} d\omega\, D(\omega) \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_B T)} - 1}. \tag{2}$$

十分低温では寄与する周波数は $k_B T/\hbar \ll \omega_D$ であり、上限を無限大まで延ばせる。$x = \hbar\omega/(k_B T)$ と置換すると

$$U \propto T^{p+2} \int_0^{\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1}\, dx, \qquad C_V = \frac{dU}{dT} \propto T^{p+1}. \tag{3}$$

よって 3 次元では $q = 3$、2 次元では $q = 2$ となる。

[3] 層状系の伝搬方向

図 3(i) の帯域幅は ω_a、(ii) は ω_b であり、$\omega_a \ll \omega_b$ である。面内では結合が強いため復元力と音速が大きく、面内方向の分散は広い帯域を持つ。従って (ii) が面内、分散の狭い (i) が弱く結合した面間方向である。

[4] 等エネルギー面

面内波数を $k_\parallel = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$、面間波数を k_z とする。両方向で線形分散が成り立つ $\omega_0 \ll \omega_a$ では、長波長の音響分散は

$$\omega^2 \simeq v_\parallel^2 k_\parallel^2 + v_\perp^2 k_z^2. \tag{4}$$

従って $\omega = \omega_0$ 面は

$$v_\parallel^2 (k_x^2 + k_y^2) + v_\perp^2 k_z^2 = \omega_0^2, \tag{5}$$

すなわち異方的な楕円体である。

$\omega_a \ll \omega_0 \ll \omega_b$ では、面内分散は線形の範囲にある。弱い面間方向の分散は k_z に依存するが、その ω^2 への寄与を $f(k_z)$ と書けば、通常の弱結合近似では $0 \le f(k_z) \lesssim \omega_a^2 \ll \omega_0^2$ である。したがって主項では

$$v_\parallel^2(k_x^2 + k_y^2) = \omega_0^2 - f(k_z) \simeq \omega_0^2. \tag{6}$$

面内波数の大きさは $k_\parallel \simeq \omega_0/v_\parallel$ でほぼ一定となり、等エネルギー面は k_z 方向に第一ブリルアン領域全体へ延びる円筒面に近い。

[5] 層状系の状態密度

低周波では楕円体の体積が ω^3 に比例する。状態数 $N(\omega) \propto \omega^3$ を微分すれば

$$D(\omega) \propto \omega^2, \qquad r = 2 \quad (\omega \ll \omega_a). \tag{7}$$

中間域の円筒では、面間方向の波数幅はほぼ一定で、囲まれる状態数は面内円の面積に比例する。主項の半径は $k_\parallel \simeq \omega/v_\parallel$ なので、$\omega \gg \omega_a$ では $N(\omega) \propto \omega^2$、従って

$$D(\omega) \propto \omega, \qquad r = 1 \quad (\omega_a \ll \omega \ll \omega_b). \tag{8}$$

[6] 層状系の比熱

熱的に寄与する周波数域全体で状態密度を $D(\omega) \propto \omega^r$ と近似できる場合、比熱積分で $x = \hbar\omega/(k_B T)$ と置けば

$$C_V \propto T^{r+1} \int_0^\infty dx\, x^{r+2} \frac{e^x}{(e^x - 1)^2}. \tag{9}$$

この積分は温度によらない。$k_B T \ll \hbar\omega_a$ では熱的周波数域が低周波の $D(\omega) \propto \omega^2$ に収まるので $s = 3$ となる。

中間温度 $\hbar\omega_a \ll k_B T \ll \hbar\omega_b$ では、$D(\omega) \propto \omega$ が成り立つ領域の寄与は主項として

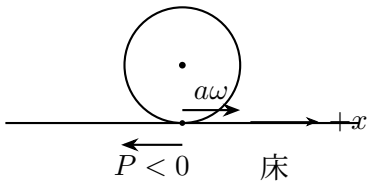
$$C_{V,\mathrm{mid}} \propto T^2 \int_{\hbar\omega_a/(k_B T)}^{\hbar\omega_b/(k_B T)} dx\, x^3 \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} \tag{10}$$

である。下端を 0 へ延ばす相対誤差は、被積分関数が $x \to 0$ で x に近づくため $O((\hbar\omega_a/k_B T)^2)$ となる。ただし実際の低周波モードをこの延長で置き換えたわけではない。[4] の非負で有界な面間寄与をもつ分散では、$\omega \lesssim \omega_a$ の状態数は面内半径 $\omega_a/v_\parallel$ の円筒内の状態数以下であり、熱的半径 $k_B T/(\hbar v_\parallel)$ の状態数に比べて $O((\hbar\omega_a/k_B T)^2)$ である。低周波の各モードの比熱は高々 k_B なので、この部分も主項には影響しない。上端側は熱的占有の指数因子で抑えられる。従って面内線形分散が熱的周波数域で有効なこの温度範囲では $C_V \propto T^2$、すなわち $s = 2$ である。$\hbar\omega_b \ll k_B T$ では全フォノンモードが古典極限に入り、各モードの比熱は温度によらず一定なので $s = 0$ となる。

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

図の $+x$ 方向を右向きとし、$\omega > 0$ は球底面の点が球中心に対して $+x$ 方向へ動く回転とする。球に働く床からの水平力積は符号付きで $P < 0$ である。



[1] 慣性モーメント

球の一様密度は $\rho = 3m/(4\pi a^3)$ である。回転軸から距離 $r\sin\theta$ にある体積要素を積分すると

$$I = \rho \int_0^a r^4\,dr \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin^3\theta\,d\theta \tag{1}$$

$$= \frac{3m}{4\pi a^3} \cdot \frac{a^5}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{5}ma^2}. \tag{2}$$

[2] 衝突直後の滑りなし条件

接触点の速度は、球中心の並進速度 v' と回転による速度 $a\omega'$ の和である。この符号規約では

$$\boxed{v' + a\omega' = 0}. \tag{3}$$

[3] 1 回の衝突

衝突前の水平方向速度は 0 である。床から球への力積が P なので、水平運動量の式は

$$mv' = P. \tag{4}$$

球底面に働く左向き力積は正回転を弱める。球中心まわりの角運動量変化は

$$I(\omega' - \omega) = aP. \tag{5}$$

$P = mv'$ と $v' = -a\omega'$ を代入し、$I = 2ma^2/5$ を使うと

$$\frac{2}{5}ma^2(\omega' - \omega) = -ma^2\omega', \tag{6}$$

$$\boxed{\omega' = \frac{2}{7}\omega}, \qquad \boxed{v' = -\frac{2}{7}a\omega}. \tag{7}$$

[4] 反跳ごとの保存量

n 回目の衝突について、床からの水平力積を符号付きで P_n とすると

$$m(v_n - v_{n-1}) = P_n, \qquad I(\omega_n - \omega_{n-1}) = aP_n. \tag{8}$$

ここで $l_n = I\omega_n - amv_n$ と置く。従って

$$l_n - l_{n-1} = I(\omega_n - \omega_{n-1}) - am(v_n - v_{n-1}) \tag{9}$$

$$= aP_n - aP_n = 0. \tag{10}$$

よって

$$\boxed{l = I\omega_n - amv_n \quad \text{は反跳回数} n \text{ によらず一定.}} \tag{11}$$

[5] 最終的な転がり速度

反跳が終わると接触点速度が 0 なので $v_F = -a\omega_F$ である。従って保存量は

$$l = I\omega_F - amv_F = -\left(\frac{I}{a} + am\right) v_F = -\frac{7}{5}mav_F, \tag{12}$$

最後の等号では $I = 2ma^2/5$ を使った。従って

$$\boxed{v_F = -\frac{5l}{7ma}}. \tag{13}$$

初期値 $l = I\omega_0 - amv_0$ と等置すると

$$\boxed{v_F = \frac{5}{7}v_0 - \frac{2}{7}a\omega_0}. \tag{14}$$

したがって反跳終了時に並進しない条件は

$$\boxed{v_F = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v_0 = \frac{2}{5}a\omega_0}. \tag{15}$$

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 無限直線電荷

線電荷から距離 r の同軸円筒をガウス面に選ぶ。長さ l の円筒面を貫く電束は $2\pi rlE(r)$ で、内部電荷は λl だから

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\boldsymbol{e}_r, \qquad E(r) = \frac{|\lambda|}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{1}$$

r_0 を基準に $E_r = -d\phi/dr$ を積分すると

$$\phi(r) - \phi(r_0) = -\int_{r_0}^{r} E_r(r')\,dr' = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r}{r_0}. \tag{2}$$

よって $\phi(r_0) = 0$ とすれば、原問の式を得る。

[2] 平行な二本の線電荷

点 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ から $(a,0),(b,0)$ までの距離をそれぞれ r_a, r_b とすると

$$r_a^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta, \qquad r_b^2 = b^2 + r^2 - 2br\cos\theta. \tag{3}$$

[1] のポテンシャルを重ね合わせて

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_b}{r_a} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b^2 + r^2 - 2br\cos\theta}{a^2 + r^2 - 2ar\cos\theta}.} \tag{4}$$

[3] 鏡像電荷と境界条件

線電荷 $+\lambda$ を $(d,0)$、鏡像線電荷 $-\lambda$ を $(D,0)$ に置くと、全ポテンシャルは

$$\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D^2 + r^2 - 2Dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}. \tag{5}$$

$r = R$ でこの比が θ に依存しないためには、分子・分母の $\cos\theta$ 係数で割った定数項が等しくなければならない。従って

$$\frac{D^2 + R^2}{2DR} = \frac{d^2 + R^2}{2dR}, \qquad (D-d)(dD - R^2) = 0. \tag{6}$$

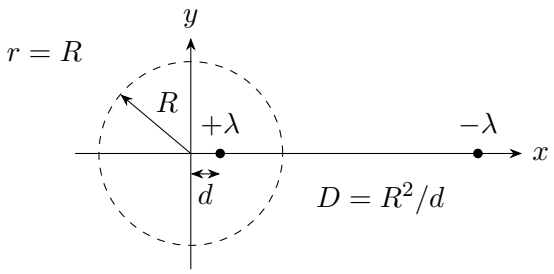
像電荷は空洞外にあるので $D > R > d$、従って

$$\boxed{D = \frac{R^2}{d}}. \tag{7}$$

この鏡像電荷対だけのポテンシャルは $r = R$ で $\lambda \ln(R/d)/(2\pi\varepsilon_0)$ となる。接地条件 $\phi(R,\theta) = 0$ を満たすため、この定数を引く。$D = R^2/d$ を代入してまとめると、空洞内 $(r < R)$ のポテンシャルは

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{d^2 r^2/R^2 + R^2 - 2dr\cos\theta}{d^2 + r^2 - 2dr\cos\theta}\right].} \tag{8}$$

$r = R$ では分子と分母が等しく、対数の中身が 1 となるため、接地条件を満たす。加えた定数は電場および誘導面電荷密度には影響しない。



[4] 誘導面電荷密度

境界では原問の法線規約により $\sigma(\theta) = \varepsilon_0 \partial_r \phi|_{r=R}$ である。上のポテンシャルを微分し、$D = R^2/d$ を代入すると

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda}{4\pi}\left[\frac{2d^2/R - 2d\cos\theta}{d^2 + R^2 - 2dR\cos\theta} - \frac{2R - 2d\cos\theta}{d^2 + R^2 - 2dR\cos\theta}\right] \tag{9}$$

$$= \boxed{-\frac{\lambda(R^2 - d^2)}{2\pi R(R^2 + d^2 - 2Rd\cos\theta)}}. \tag{10}$$

正の線電荷に対して誘起面電荷は全周で負であり、最も近い $\theta = 0$ 側で絶対値が最大となる。

[5] 誘起電荷の全量

$a = d/R < 1$ と置くと

$$\sigma(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi R}\frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta\right). \tag{11}$$

各余弦の一周積分は 0 なので、円筒内側面の単位長さ当たり電荷は

$$\boxed{R\int_0^{2\pi} \sigma(\theta)\, d\theta = -\lambda}. \tag{12}$$

[6] 面密度測定から位置を求める

線電荷の角度が ψ の場合、[4] の式は

$$\sigma(\theta) = -\frac{\lambda}{2\pi R}\left[1 + 2\frac{d}{R}\cos(\theta - \psi)\right] + O\big((d/R)^2\big) \tag{13}$$

となる。以下の対向点の和・差と位置の復元も d/R の一次までであり、対向点で和と差を取れば定数項と反対称な成分を分離できる。

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -\frac{2\lambda d}{\pi R^2}\cos\psi, \qquad \sigma_1 + \sigma_3 = -\frac{\lambda}{\pi R}, \tag{14}$$

$$\sigma_2 - \sigma_4 = -\frac{2\lambda d}{\pi R^2}\sin\psi, \qquad \sigma_2 + \sigma_4 = -\frac{\lambda}{\pi R}. \tag{15}$$

従って、$x_0 = d\cos\psi$, $y_0 = d\sin\psi$ より

$$\boxed{x_0 = \frac{R}{2}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}, \qquad y_0 = \frac{R}{2}\frac{\sigma_2 - \sigma_4}{\sigma_2 + \sigma_4}.} \tag{16}$$

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 1 粒子状態のエネルギー

図の ψ_S は節を持たない対称状態、ψ_A は節を 1 つ持つ反対称状態である。一次元束縛状態では節の少ない状態ほどエネルギーが低いので

$$E_S = -J, \qquad E_A = +J. \tag{1}$$

[2] 局在基底

規格直交する ψ_S, ψ_A より

$$\langle \psi_L | \psi_R \rangle = \frac{1}{2}(\langle \psi_S | \psi_S \rangle - \langle \psi_A | \psi_A \rangle) = 0. \tag{2}$$

また $H\psi_S = -J\psi_S$, $H\psi_A = J\psi_A$ だから、$\{\psi_L, \psi_R\}$ 基底の行列要素は

$$\boxed{H_1 = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix}.} \tag{3}$$

[3] 1 粒子のトンネル確率

左井戸状態 $|L\rangle$ からの時間発展は

$$e^{-iH_1 t/\hbar}|L\rangle = \cos\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|L\rangle + i\sin\left(\frac{Jt}{\hbar}\right)|R\rangle. \tag{4}$$

従って右井戸にある確率は

$$\boxed{P_R(t) = \sin^2\left(\frac{Jt}{\hbar}\right).} \tag{5}$$

[4] 相互作用のない 2 粒子系

[4.1] ハミルトニアン

対称化された規格化状態は

$$|0\rangle = |LL\rangle, \qquad |1\rangle = \frac{|LR\rangle + |RL\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |2\rangle = |RR\rangle. \tag{6}$$

一体トンネル項 $-J(|L\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L|)$ を各粒子に作用させると

$$H|0\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle, \quad H|1\rangle = -\sqrt{2}J(|0\rangle + |2\rangle), \quad H|2\rangle = -\sqrt{2}J|1\rangle. \tag{7}$$

従って

$$\boxed{H_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & 0 \end{pmatrix}.} \tag{8}$$

[4.2] 固有エネルギー

反対称な端状態 $(|0\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ の固有値は 0。対称な端状態 $(|0\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$ と $|1\rangle$ に対して、上の行列の制限は $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -2J \\ -2J & 0 \end{smallmatrix}\right)$ となる。この二次元ブロックの固有値は $\pm 2J$ なので

$$\boxed{E = -2J,\ 0,\ 2J.} \tag{9}$$

[4.3] 粒子数確率

初期状態 $|LL\rangle$ は、独立に左右へ移る 2 粒子の積状態である。$x = Jt/\hbar$ とすると

$$P_0(t) = \cos^4 x, \tag{10}$$

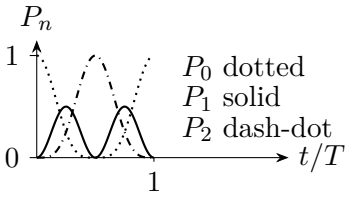
$$P_1(t) = 2\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{2}\sin^2(2x), \tag{11}$$

$$P_2(t) = \sin^4 x. \tag{12}$$

各時刻で和は 1。原図の選択肢では図 2(a) に対応し、点線が P_0、実線が P_1、一点鎖線が P_2 を表す。確率の共通周期は

$$\boxed{T = \frac{\pi\hbar}{J}}. \tag{13}$$

一周期の概形は次のとおりである。



[5] 強い引力相互作用

[5.1] ハミルトニアン

同一井戸に 2 粒子がある状態のエネルギーを $-A$ だけ下げると、

$$\boxed{H_{-A} = \begin{pmatrix} -A & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & -A \end{pmatrix}.} \tag{14}$$

[5.2] 固有エネルギー

反対称端状態のエネルギーは $-A$。対称端状態と $|1\rangle$ の部分行列は $\begin{pmatrix} -A & -2J \\ -2J & 0 \end{pmatrix}$ である。従って

$$E = -A, \qquad E_\pm = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 + 16J^2}}{2}. \tag{15}$$

$A \gg J$ で展開すると

$$\boxed{E_- = -A - \frac{4J^2}{A} + O(J^4/A^3), \quad E_a = -A, \quad E_+ = \frac{4J^2}{A} + O(J^4/A^3).} \tag{16}$$

[5.3] 引力の場合の粒子数確率

有限の A に対する確率を求める。同一井戸状態の相互作用エネルギーを一般の符号付き u とし、そのハミルトニアンを $H(u)$ と書く。引力の場合は $u = -A$ である。端状態の対称・反対称な組合せを

$$|s\rangle = \frac{|0\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}, \qquad |a\rangle = \frac{|0\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}} \tag{17}$$

と置く。[5.2] と同じ分解により、基底 $(|s\rangle, |1\rangle)$ での部分行列は

$$H_s(u) = \begin{pmatrix} u & -2J \\ -2J & 0 \end{pmatrix}, \qquad H(u)|a\rangle = u|a\rangle \tag{18}$$

である。準位差を $\Delta = \sqrt{u^2 + 16J^2}$ とすると、2 次元の単位行列 $\mathbf{I}$ に対して

$$\left(H_s(u) - \frac{u}{2}\mathbf{I}\right)^2 = \frac{\Delta^2}{4}\mathbf{I}. \tag{19}$$

従って行列指数の偶数べきと奇数べきをまとめれば時間発展を求められる。この小節では $x = \Delta t/(2\hbar)$、$y = ut/(2\hbar)$ と置く。初期状態 $|0\rangle = (|s\rangle + |a\rangle)/\sqrt{2}$ から

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{e^{-iy}}{\sqrt{2}}\left[\left(\cos x - i\frac{u}{\Delta}\sin x\right)|s\rangle + i\frac{4J}{\Delta}\sin x\,|1\rangle\right] \tag{20}$$

$$+ \frac{e^{-2iy}}{\sqrt{2}}|a\rangle. \tag{21}$$

各占有状態へ射影して振幅の絶対値二乗を取ると

$$P_0(t) = \frac{1}{4}\left|e^{-iy}\left(\cos x - i\frac{u}{\Delta}\sin x\right) + e^{-2iy}\right|^2, \tag{22}$$

$$P_1(t) = \frac{8J^2}{\Delta^2}\sin^2 x, \tag{23}$$

$$P_2(t) = \frac{1}{4}\left|e^{-iy}\left(\cos x - i\frac{u}{\Delta}\sin x\right) - e^{-2iy}\right|^2. \tag{24}$$

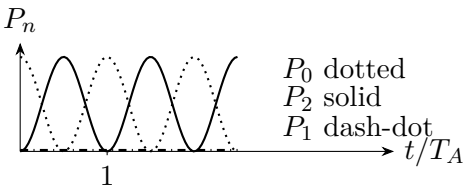
従って有限 A では中間状態 $|1\rangle$ も一般に占有される。$A/J \gg 1$ ではその振幅は小さく、主要な時間変化は二つの同一井戸状態間の遅いペア移動となる。初期状態 $|0\rangle$ は対称状態 $|s\rangle$ と反対称状態 $|a\rangle$ を等重みで含む。$|s\rangle$ を主成分とする低エネルギー固有状態と $|a\rangle$ のエネルギー差は $4J^2/A$ であり、その相対位相から

$$P_0(t) \simeq \cos^2\!\left(\frac{2J^2 t}{A\hbar}\right), \qquad P_2(t) \simeq \sin^2\!\left(\frac{2J^2 t}{A\hbar}\right), \qquad P_1 \ll 1. \tag{25}$$

ペア移動の周期は

$$\boxed{T_A = \frac{2\pi\hbar}{4J^2/A} = \frac{\pi\hbar A}{2J^2}}. \tag{26}$$

図 2(b) に対応する概形は次のとおりである。点線が P_0、実線が P_2、一点鎖線が小さい P_1 である。



[6] 強い斥力相互作用

同じ井戸に 2 粒子があるときのエネルギーを B だけ上げると

$$H_{+B} = \begin{pmatrix} B & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & B \end{pmatrix}, \qquad E = B, \quad E_{\pm} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 + 16J^2}}{2}. \tag{27}$$

$B \gg J$ では $E_- = -4J^2/B + O(J^4/B^3)$、$E_a = B$、$E_+ = B + 4J^2/B + O(J^4/B^3)$。従って近接する端状態間の遅いペア移動も同じ形であり

$$P_0(t) \simeq \cos^2\!\left(\frac{2J^2 t}{B\hbar}\right), \qquad P_2(t) \simeq \sin^2\!\left(\frac{2J^2 t}{B\hbar}\right), \qquad P_1 \ll 1. \tag{28}$$

原図では同じく図 2(b) で、周期は

$$\boxed{T_B = \frac{\pi\hbar B}{2J^2}}. \tag{29}$$

ここでも有限 B では $P_1(t)$ は厳密にはゼロでなく、[5.3] の厳密式に $u = B$ を入れる。

[7] 引力と斥力の比較

引力 $u = -A$ と斥力 $u = +B$ のどちらでも、同じ絶対値 $|u|$ なら厳密な確率式は同じである。行列

$$H(u) = \begin{pmatrix} u & -\sqrt{2}J & 0 \\ -\sqrt{2}J & 0 & -\sqrt{2}J \\ 0 & -\sqrt{2}J & u \end{pmatrix} \tag{30}$$

に $S = \mathrm{diag}(1, -1, 1)$ を使うと $H(-u) = -SH(u)S$。$H(u)$ は実行列で $S|0\rangle = |0\rangle$ だから、時間発展は

$$e^{-iH(-u)t/\hbar}|0\rangle = S\big[e^{-iH(u)t/\hbar}|0\rangle\big]^*. \tag{31}$$

S は各占有振幅に符号 ± 1 を掛けるだけなので、複素共役後の絶対値二乗も元と同じである。従って各占有数確率と確率グラフの概形は符号反転で変化しない。違うのは同一井戸の対状態が他状態より低いか高いかというエネルギー準位の順序である。

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

$\beta = 1/(k_B T)$ とする。粒子は古典 Boltzmann 統計に従い、$N!$ で割って同種粒子の重複計数を除く。

[1] 理想気体の分配関数

一粒子の並進分配関数は位置積分と三つの運動量積分の積であり

$$z_1 = \frac{1}{h^3}\int_V d^3r \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\, e^{-\beta p^2/(2m)} \tag{1}$$

$$= \frac{V}{h^3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta p_x^2/(2m)} dp_x\right)^3 = V\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}. \tag{2}$$

ここで $h = 2\pi\hbar$ とガウス積分を用いた。従って

$$\boxed{Z_0(T,V,N) = \frac{z_1^N}{N!} = \frac{V^N}{N!}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}.} \tag{3}$$

[2] 内部エネルギーと定積比熱

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_0 = \boxed{\frac{3}{2}Nk_BT}, \qquad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{V,N} = \boxed{\frac{3}{2}Nk_B}. \tag{4}$$

[3] 理想気体の状態方程式

$F_0 = -k_BT\ln Z_0$ であり、V に依存する項は $-Nk_BT\ln V$ だけなので

$$P = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)_{T,N} = k_BT\frac{\partial \ln Z_0}{\partial V} = \frac{Nk_BT}{V}. \tag{5}$$

従って

$$\boxed{PV = Nk_BT.} \tag{6}$$

[4] 引力と排除体積

原問の一粒子エネルギーは $p^2/(2m) - \alpha N/V$ である。従って全ポテンシャルエネルギーは $-\alpha N^2/V$、Boltzmann 因子は $\exp(\beta\alpha N^2/V)$ となる。短距離斥力によって配置空間体積は $V - Nb$ となるから

$$\boxed{Z(T,V,N) = \frac{(V-Nb)^N}{N!}\left(\frac{mk_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3N/2}\exp\left(\frac{\alpha N^2}{Vk_BT}\right).} \tag{7}$$

Helmholtz 自由エネルギーは

$$F = -k_B T \ln Z = F_{\rm kin}(T, N) - N k_B T \ln(V - Nb) - \frac{\alpha N^2}{V}, \tag{8}$$

ここで $F_{\rm kin}$ は V に依存しない。よって

$$\boxed{P = -F_V = \frac{N k_B T}{V - Nb} - \frac{\alpha N^2}{V^2}}, \qquad \boxed{\left(P + \frac{\alpha N^2}{V^2}\right)(V - Nb) = N k_B T.} \tag{9}$$

[5] 自由エネルギー最小と安定性

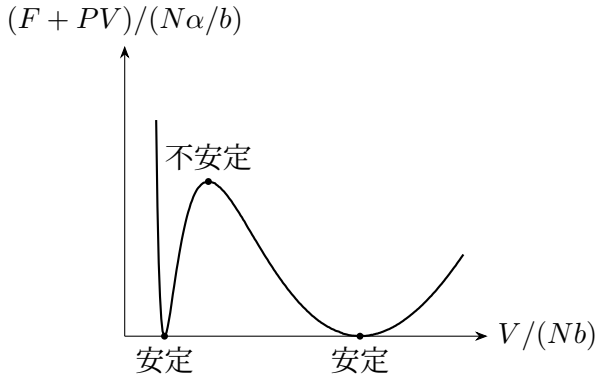
固定した T, N, P に対して $A(V) = F(T, N, V) + PV$ とする。停留点では

$$A'(V) = F_V + P = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P = -F_V, \tag{10}$$

右辺の $P(V) = -F_V$ は均一状態の圧力であり、固定した外圧 P と停留点で一致する。さらに

$$A''(V) = F_{VV} = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T,N}. \tag{11}$$

局所安定な熱平衡は $A'' > 0$ の極小なので $\partial P/\partial V < 0$。$A'' < 0$ の極大は不安定である。$A'' = 0$ では二階微分だけで安定性を判定できず、この等温線で安定枝が終わる点は限界点となる。図 1 では左右の等しい最小値が同じ Gibbs 自由エネルギーを持つ共存状態、中央の極大が不安定状態である。



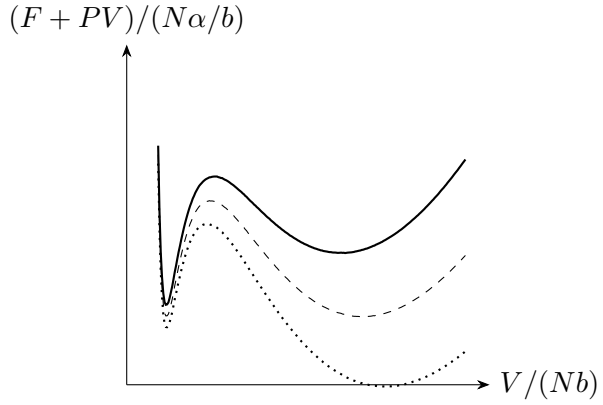
図では $k_B T b/\alpha = 1/4$ の例を用いた。共存圧力は $P_{\rm coex} b^2/\alpha \simeq 0.01808161$ であり、二つの極小の高さが等しくなるように求めた。自由エネルギー図の縦軸は、体積によらない項と共存時の極小値を差し引いて示した。

[6] 圧力による傾きの変化

圧力を $P + \delta P$ に変えると

$$A_{P+\delta P}(V) = A_P(V) + \delta P\, V. \tag{12}$$

したがって $\delta P > 0$ では大体積側ほど自由エネルギーが余分に上がり、小体積側の極小がより低くなる。圧力を下げると逆に大体積側の極小が選ばれる。これは外圧を上げると圧縮が進み、外圧を下げると膨張・気化が進むことに対応する。



破線は共存圧力、実線は圧力増加、点線は圧力減少を表す。圧力変化は $\delta P b^2/\alpha = \pm 0.001$ とし、同じ自由エネルギーに δPV を加えて描いた。

[7] 状態方程式と平衡等温線

状態方程式 $P(V) = Nk_BT/(V-Nb) - \alpha N^2/V^2$ をこの温度で描くと、図 1 に二つの極小がある条件では S 字状の van der Waals ループを持つ。中間枝は $\partial P/\partial V > 0$ であり、均一な状態として不安定である。共存圧力 $P_{\rm coex}$ では、小体積相と大体積相の Gibbs 自由エネルギーが等しい。全 N 個の粒子がそれぞれの均一相にあるときの体積を V_l, V_g と書き、$V_l < V_g$ とする。$F(V) = F(T,N,V)$ と略記すると、二つの大域最小の高さが等しい条件は

$$F(V_g) - F(V_l) = -P_{\rm coex}(V_g - V_l) \tag{13}$$

である。

中間の全体積では、二つの相が共存し、各相に属する粒子の割合が変わる。熱力学極限で界面の自由エネルギーを無視し、各相の体積と自由エネルギーを加える。大体積相に属する粒子の割合を x（$0 \le x \le 1$）とすると、自由エネルギーの示量性から

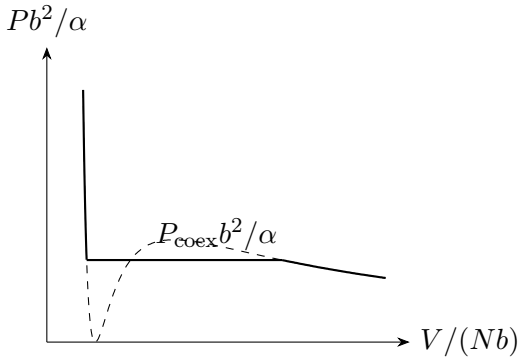
$$V = (1-x)V_l + xV_g, \tag{14}$$

$$F_{\rm mix}(V) = (1-x)F(V_l) + xF(V_g). \tag{15}$$

従ってこの混合状態の圧力は

$$-\frac{dF_{\rm mix}}{dV} = -\frac{F(V_g)-F(V_l)}{V_g - V_l} = P_{\rm coex}. \tag{16}$$

このため平衡等温線は $V_l \le V \le V_g$ で水平となる。均一状態の S 字曲線と、二相の割合が変わる平衡状態を同じ図に示す。



破線は状態方程式の全枝、実線は平衡等温線である。共存区間は一定圧力の直線で結び、区間外では実線と状態方程式が一致する。

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

原問の時間依存を $e^{-i\omega t}$ とし、媒質は $z>0$、波の伝播方向を $+z$ とする。電場は x 方向で、複素波数 $\widetilde{k}=k_1+ik_2$ を用いて

$$\boldsymbol{E}(z,t)=\mathrm{Re}\Big[\widetilde{E}_0\,\boldsymbol{e}_x e^{i(\widetilde{k}z-\omega t)}\Big]=|\widetilde{E}_0|e^{-k_2 z}\cos(k_1 z-\omega t+\delta)\,\boldsymbol{e}_x \tag{1}$$

と書く（$\delta=\arg\widetilde{E}_0$）。媒質中で減衰する解を選ぶので $k_2>0$ である。

[1] 分散関係と位相速度

波動方程式に $e^{i(\widetilde{k}z-\omega t)}$ を代入すると

$$-\widetilde{k}^2+\epsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega=0,\qquad \boxed{\widetilde{k}^2=\epsilon\mu\omega^2+i\mu\sigma\omega}. \tag{2}$$

位相一定条件 $k_1 z-\omega t+\delta=\text{const.}$ から、位相速度は振幅減衰を決める k_2 ではなく

$$\boxed{v_{\mathrm{ph}}=\frac{\omega}{k_1}}. \tag{3}$$

[2] 振幅減衰距離

振幅は z とともに $e^{-k_2 z}$ 倍される。$e^{-k_2 d}=e^{-1}$ より

$$\boxed{d=\frac{1}{k_2}}. \tag{4}$$

これは振幅の $1/e$ 距離であり、時間平均二乗場や強度の $1/e$ 距離は $1/(2k_2)$ である。

[3] 実部・虚部

$(k_1+ik_2)^2=(k_1^2-k_2^2)+2ik_1k_2=\mu\omega(\epsilon\omega+i\sigma)$. よって $k_1^2-k_2^2=\epsilon\mu\omega^2$、$2k_1k_2=\mu\sigma\omega$。$k_1,k_2>0$ の減衰・前進波の枝を選ぶと

$$k_1=\boxed{\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}+\epsilon\omega\right)}}, \tag{5}$$

$$k_2=\boxed{\sqrt{\frac{\mu\omega}{2}\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega\right)}}. \tag{6}$$

[4] 伝導率による減衰距離

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\omega\left(\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega\right)}}. \tag{7}$$

高伝導率 $\sigma \gg \epsilon\omega$ では平方根の内側の根号を σ と近似できるため

$$\boxed{d \simeq \sqrt{\frac{2}{\mu\sigma\omega}} \propto \sigma^{-1/2}}. \tag{8}$$

低伝導率 $\sigma \ll \epsilon\omega$ では $\sqrt{\epsilon^2\omega^2+\sigma^2}-\epsilon\omega \simeq \sigma^2/(2\epsilon\omega)$ なので

$$\boxed{d \simeq \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \propto \sigma^{-1}}. \tag{9}$$

[5] 電場・磁場の位相差

Faraday 則から複素振幅は

$$\widetilde{\boldsymbol{B}}(z) = \frac{\widetilde{k}}{\omega}\boldsymbol{e}_z \times \widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = \frac{\widetilde{k}}{\omega}\widetilde{E}_0\boldsymbol{e}_y e^{i\widetilde{k}z}. \tag{10}$$

位相 $\Theta = k_1 z - \omega t + \delta$ と書くと、実電場は $E_x \propto \cos\Theta$、実磁束密度は $B_y \propto \cos(\Theta+\phi)$ である。同じ山に注目すれば磁束密度の山は電場より ϕ/ω だけ遅い時刻に現れる。従って磁束密度は電場に対して $\widetilde{k}$ の偏角だけ遅れ、

$$\boxed{\phi = \arg(k_1+ik_2) = \tan^{-1}\left(\frac{k_2}{k_1}\right)}, \qquad 0<\phi<\frac{\pi}{2}. \tag{11}$$

高伝導率極限では $k_1/k_2 \to 1$ より $\boxed{\phi \to \pi/4}$。低伝導率極限では $k_2/k_1 \to 0$ より $\boxed{\phi \to 0}$。

[6] 平均ポインティング流束

$z=0$ で $\widetilde{\boldsymbol{B}}_0 = (\widetilde{k}/\omega)\widetilde{E}_0\boldsymbol{e}_y$ である。実場の時間平均を複素振幅で計算すると

$$\langle \boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2\mu}\,\mathrm{Re}\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}_0 \times \widetilde{\boldsymbol{B}}_0^{\,*}\right) = \frac{|\widetilde{E}_0|^2}{2\mu\omega}\,\mathrm{Re}(\widetilde{k}^{\,*})\boldsymbol{e}_z \tag{12}$$

$$= \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega}\boldsymbol{e}_z. \tag{13}$$

従って

$$\boxed{|\langle \boldsymbol{S}\rangle| = \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = \frac{|\widetilde{E}_0|^2}{2}\sqrt{\frac{\epsilon}{2\mu}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\epsilon^2\omega^2}}+1\right)}}. \tag{14}$$

流束は媒質内へ向かう $+z$ 方向である。

[7] 媒質に及ぼす単位体積あたりの仕事率

電磁場が電荷にする仕事率密度は電流密度との内積である。オーム則を用いれば

$$\boxed{Q(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \sigma|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|^2 \geq 0}. \tag{15}$$

電場は x 方向なのでここでの絶対値二乗は実場の成分の二乗を表す。

[8] Joule 熱と侵入エネルギー

媒質中の電場振幅が $|\widetilde{E}_0|e^{-k_2 z}$ であるから

$$\langle Q(z,t)\rangle = \frac{\sigma}{2}|\widetilde{E}_0|^2 e^{-2k_2 z}. \tag{16}$$

従って単位界面面積あたり、単位時間に媒質内で消費される平均仕事は

$$\int_0^{+\infty}\langle Q(z,t)\rangle dz = \frac{\sigma|\widetilde{E}_0|^2}{4k_2} = \frac{|\widetilde{E}_0|^2 k_1}{2\mu\omega} = |\langle \boldsymbol{S}(0)\rangle|, \tag{17}$$

ここで $2k_1k_2 = \mu\sigma\omega$ を用いた。媒質の奥では流束がゼロに減衰するため、境界から流入した平均電磁エネルギーは全て媒質内の Joule 熱に変わる。

物理工学専攻院試解答集
2015 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 逆格子と第一ブリュアン域

逆格子の定義は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$ である。$\boldsymbol{b}_1 = (u, v)$ とすると

$$\frac{\sqrt{3}a}{2}u + \frac{a}{2}v = 2\pi, \qquad -\frac{\sqrt{3}a}{2}u + \frac{a}{2}v = 0.$$

和と差から $v = 2\pi/a$, $u = 2\pi/(\sqrt{3}a)$ を得る。同様に

$$\boxed{\boldsymbol{b}_1 = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{3}a}, \frac{1}{a}\right), \qquad \boldsymbol{b}_2 = 2\pi\left(-\frac{1}{\sqrt{3}a}, \frac{1}{a}\right).} \tag{1}$$

第一ブリュアン域は、原点と最短の逆格子点との垂直二等分線に囲まれた領域である。最短の 6 点は $\pm\boldsymbol{b}_1, \pm\boldsymbol{b}_2, \pm(\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2)$。各境界は $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{G} = |\boldsymbol{G}|^2/2$ を満たす。$\boldsymbol{G} = \boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{b}_2$ の境界は $k_x = 2\pi/(\sqrt{3}a)$。$\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ の境界の交点は $k_x = 0$, $k_y = 4\pi/(3a)$ なので

$$\boxed{P = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, 0\right), \qquad Q = \left(0, \frac{4\pi}{3a}\right).} \tag{2}$$

得られる領域は図の正六角形である。図中の O は波数原点を表す。

[2] スピンを含めた自由電子の状態数

単位胞の面積を s、系全体の面積を S とすると

$$s = |\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2| = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2, \qquad \text{電子数} = \frac{2S}{s}.$$

波数空間で単位面積あたりの状態数は $S/(2\pi)^2$。スピン 2 重を含めて円内の状態を数えると

$$2\frac{S}{(2\pi)^2}\pi k_F^2 = \frac{2S}{s}, \qquad \boxed{k_F = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{8\pi}{\sqrt{3}}}.} \tag{3}$$

[3] フェルミ面と第一域の関係

円の面積は $\pi k_F^2 = (2\pi)^2/s$ で、第一ブリュアン域の面積に等しい。ただし形は円と六角形で異なる。六角形の内接半径 r_{in} と外接半径 r_{out} は

$$r_{\text{in}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}a}, \qquad r_{\text{out}} = \frac{4\pi}{3a}, \qquad r_{\text{in}} < k_F < r_{\text{out}}.$$

したがってフェルミ面は各辺を横切るが、六角形の頂点には届かない。自由電子のフェルミ面は第一域の外にも続く円である。

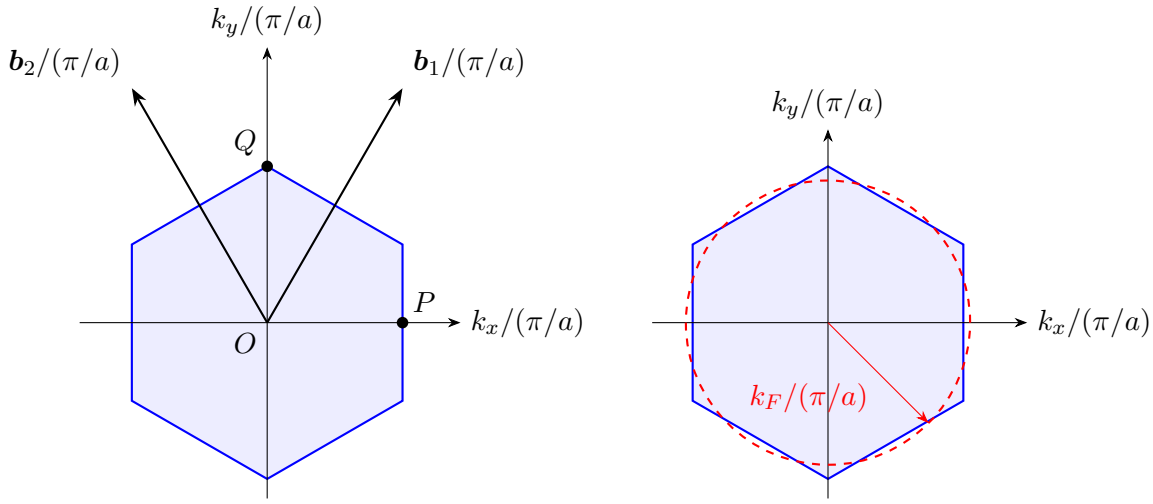


図 1: 左: 逆格子と第一域。座標の単位は π/a。右: 同じ縮尺の第一域（青線）と自由電子のフェルミ面（赤破線）。

[4] 原子軌道への射影

原問の図 2 の配置に従って、A から最近接 B への変位を

$$\boldsymbol{\delta}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1 + 2\boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3}, \quad \boldsymbol{\delta}_3 = \frac{-2\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2}{3} \tag{4}$$

と選ぶ。どれも長さ $a/\sqrt{3}$ である。最近接位相の和を

$$f(\boldsymbol{k}) = \sum_{j=1}^{3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_j}$$

と定義する。以下 $\lambda^A = \lambda^A_{\boldsymbol{k}}$, $\lambda^B = \lambda^B_{\boldsymbol{k}}$ と略記する。A 軌道への固有方程式の射影は、規格化積分と最近接行列要素だけを残して

$$\int \phi_A(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i^A)\mathcal{H}\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^A}[\epsilon_A\lambda^A + \tau f(\boldsymbol{k})\lambda^B], \tag{5}$$

$$E(\boldsymbol{k})\int \phi_A(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i^A)\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r} = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_i^A}E(\boldsymbol{k})\lambda^A. \tag{6}$$

B から A への最近接変位は $-\boldsymbol{\delta}_j$ なので、B への射影には f^* が現れる。共通の位相を除くと

$$\boxed{\begin{pmatrix} \epsilon_A & \tau f(\boldsymbol{k}) \\ \tau f(\boldsymbol{k})^* & \epsilon_B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda^A \\ \lambda^B \end{pmatrix} = E(\boldsymbol{k})\begin{pmatrix} \lambda^A \\ \lambda^B \end{pmatrix}.} \tag{7}$$

これは係数に対する固有値方程式である。

[5] 二本のエネルギー帯

行列式がゼロになる条件は

$$(E - \epsilon_A)(E - \epsilon_B) - \tau^2|f(\boldsymbol{k})|^2 = 0.$$

したがって上帯を E_+、下帯を E_- とすると

$$\boxed{E_\pm(\boldsymbol{k}) = \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} \pm \sqrt{\frac{(\epsilon_A - \epsilon_B)^2}{4} + \tau^2|f(\boldsymbol{k})|^2}.} \tag{8}$$

位相の和の絶対値の二乗は

$$|f|^2 = 3 + 2\sum_{i<j} \cos[\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{\delta}_i - \boldsymbol{\delta}_j)] \tag{9}$$

$$= 3 + 4\cos\left(\frac{\sqrt{3}ak_x}{2}\right)\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 2\cos(ak_y). \tag{10}$$

よってこの最後の式を代入すれば k_x, k_y の明示的な関数になる。

[6] 占有状態と最小ギャップ

各エネルギー帯は単位胞あたりスピン込みで 2 個の電子を収容する。電子が単位胞あたり 2 個なら下帯は満たされ、上帯は空である。$f = 0$ で下帯が最大、上帯が最小となる。$k_x = 0$ では

$$|f|^2 = 1 + 4\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) + 4\cos^2\left(\frac{ak_y}{2}\right) = \left[1 + 2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right)\right]^2.$$

ゼロになるのは $\cos(ak_y/2) = -1/2$。第一域にある点は

$$\boxed{X = \left(0, \pm\frac{4\pi}{3a}\right), \qquad E_1 = \epsilon_B, \quad E_2 = \epsilon_A, \quad E_g = \epsilon_A - \epsilon_B.} \tag{11}$$

これらは図の上・下の頂点に当たる。以下では $X = (0, 4\pi/(3a))$ を選ぶ。

[7] X 近傍の曲率と有効質量

$k_y = 4\pi/(3a) + q$ とおき、$|aq| \ll 1$ で展開すると

$$1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{aq}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}a}{2}q + O(q^2).$$

$E_g > 0$ なので平方根を展開できる。原問の $E_g \gg |\tau|$ の範囲では

$$E_+(q) = \epsilon_A + \frac{3a^2\tau^2}{4E_g}q^2 + O(q^3), \tag{12}$$

$$E_-(q) = \epsilon_B - \frac{3a^2\tau^2}{4E_g}q^2 + O(q^3). \tag{13}$$

電子の有効質量を $1/m^* = (1/\hbar^2)\,\partial^2 E/\partial k_y^2$ で定義すると

$$\boxed{m_+^* = \frac{2\hbar^2 E_g}{3a^2\tau^2}, \qquad m_-^* = -\frac{2\hbar^2 E_g}{3a^2\tau^2}.} \tag{14}$$

上帯は極小なので正、下帯は極大なので負である。下帯のホールを用いる場合は、電子の符号付き曲率質量とは別に $m_{\mathrm{hole}}^* = |m_-^*|$ となる。

[8] すべて同じ原子にした場合

$\epsilon_B = \epsilon_A$ とするとギャップは消え、$k_x = 0$ で

$$E_{\pm}(k_y) = \epsilon_A \pm |\tau| \left| 1 + 2\cos\left(\frac{ak_y}{2}\right) \right|.$$

よって X 近傍では

$$\boxed{E_{\pm}(q) = \epsilon_A \pm \frac{\sqrt{3}a|\tau|}{2}|q| + O(q^2), \qquad E_g = 0.} \tag{15}$$

上下のエネルギーを大小で並べると $|q|$ を含む直線的な交差になる。[7] の放物的な有効質量の式を、ギャップが消える場合にそのまま用いることはできない。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 単振り子の運動方程式

角度 θ_1 を鉛直下向きから測る。支点まわりの重力のモーメントは $-m_1 g l_1 \sin\theta_1$、慣性モーメントは $m_1 l_1^2$ なので、

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \sin\theta_1, \qquad \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1}\sin\theta_1 = 0. \tag{1}$$

小振幅では $\sin\theta_1 \simeq \theta_1$ だから、

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0, \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}}. \tag{2}$$

[2] 質量の影響

運動方程式では慣性項と重力による復元項の両方が m_1 に比例するため、質量を約すと固有角周波数には m_1 が残らない。一方、平衡位置で同じ大きさの水平撃力 J を加えると、角運動量の変化から角速度の初期値は $\dot{\theta}_1 = J/(m_1 l_1)$ となる。小振幅での角振幅はこの初期角速度を ω_0 で割った

$$\theta_{\max} \simeq \frac{J}{m_1\sqrt{g l_1}}. \tag{3}$$

したがって同じ撃力なら、質量が大きいほど振幅は小さいが、振動の角周波数は変わらない。

[3] 水平力を受けるときの平衡

第 2 棒の鉛直下向きからの絶対角を $\phi = \theta_1 + \theta_2$ とする。質点の位置は

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1\sin\theta_1 \\ -l_1\cos\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \begin{pmatrix} l_2\sin\phi \\ -l_2\cos\phi \end{pmatrix}. \tag{4}$$

独立な一般化座標を (θ_1, ϕ) とし、θ_1 の仮想変位では ϕ を固定する。仮想変位に対する外力と重力の仕事がゼロとなる条件を用いる。θ_1 の変位は両質点の高さを変え、ϕ の変位は質点 m_2 の位置だけを変えるので、

$$F_x l_1 \cos\theta_1 - (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0, \tag{5}$$

$$F_x l_2 \cos\phi - m_2 g l_2 \sin\phi = 0. \tag{6}$$

図 2 のように各棒が鉛直下向きから $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にある平衡枝では、

$$\boxed{\theta_1 = \arctan\frac{F_x}{(m_1+m_2)g}}, \qquad \boxed{\phi = \arctan\frac{F_x}{m_2 g}}, \qquad \boxed{\theta_2 = \phi - \theta_1}. \tag{7}$$

[4] 等質量・等長二重振り子のラグランジアン

以後 $m_1 = m_2 = m$、$l_1 = l_2 = l$、$F_x = 0$ とする。θ_1 は第 1 棒の角度、θ_2 は第 1 棒に対する第 2 棒の相対角であり、$\phi = \theta_1 + \theta_2$ は第 2 棒の絶対角である。位置は

$$\boldsymbol{r}_1 = l\begin{pmatrix}\sin\theta_1\\ -\cos\theta_1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = l\begin{pmatrix}\sin\theta_1 + \sin\phi\\ -\cos\theta_1 - \cos\phi\end{pmatrix}. \tag{8}$$

時間微分すると、質点 2 の速さの二乗に交差項が生じる。

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2 + \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 \tag{9}$$

$$= \frac{ml^2}{2}\left[2\dot\theta_1^2 + \dot\phi^2 + 2\cos\theta_2\,\dot\theta_1\dot\phi\right], \tag{10}$$

$$U = mg(y_1 + y_2) = -mgl\,(2\cos\theta_1 + \cos\phi)\,. \tag{11}$$

よって $L = T - U$ は

$$\boxed{L = \frac{ml^2}{2}\left[2\dot\theta_1^2 + (\dot\theta_1 + \dot\theta_2)^2 + 2\cos\theta_2\,\dot\theta_1(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\right] + mgl\,[2\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]\,.} \tag{12}$$

第 2 質点の重力位置エネルギーにも第 1 棒による高さ $-l\cos\theta_1$ が含まれるため、$2\cos\theta_1$ の項が現れる。

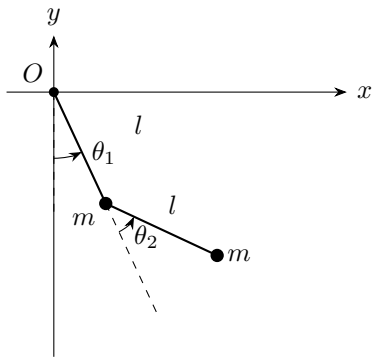


図 1: 等質量・等長二重振り子。θ_2 は第 1 棒から測る相対角である。

[5] 小振幅の運動方程式

小さい θ_1, θ_2 に対して、速度項の $\cos\theta_2$ を 1、ポテンシャルの余弦を 2 次まで展開する。ラグランジアンの定数を除けば

$$L^{(2)} = \frac{ml^2}{2}\begin{pmatrix}\dot\theta_1 & \dot\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{pmatrix} - \frac{mgl}{2}\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}. \tag{13}$$

したがって、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\boxed{\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{pmatrix} + \frac{g}{l}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \mathbf{0}.} \tag{14}$$

[6] 基準振動

$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{A}e^{i\omega t}$ とおく。$\lambda = \omega^2/(g/l)$ とすると、非自明な振幅ベクトルがある条件は

$$0 = \det\left[\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right] = (3-5\lambda)(1-\lambda) - (1-2\lambda)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 2. \tag{15}$$

よって $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ であり、正の二つの固有角周波数は

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2\pm\sqrt{2}} = \omega_0\sqrt{2\pm\sqrt{2}}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.} \tag{16}$$

固有値 λ は無次元で、g/l は角周波数の二乗の次元をもつ。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] リングを貫く磁束

リングの中心を $(X,0,0)$、面内の中心からの座標を (u,v) とする。円盤上では $x=X+u$、$z=0$ であり、面積要素の法線を $+z$ 向きにとると、

$$\Phi(X) = \int_{u^2+v^2\le a^2} B_0[1+\alpha(X+u)]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{1}$$

$$= B_0(1+\alpha X)\pi a^2 + B_0\alpha \int_{u^2+v^2\le a^2} u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2}$$

$$= \boxed{\pi a^2 B_0(1+\alpha X)}. \tag{3}$$

円盤は $u\mapsto -u$ で対称なので、積分中の奇関数 u の項はゼロである。

[2] 一定速度で運動するときの電流

正の面法線を $+z$ にとると、正の周回方向は反時計回りである。X が速度 $V>0$ で増えるため、$+z$ 向きの磁束が増加する。ファラデーの法則

$$IR = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

の負号は誘導電流が磁束の増加を妨げることを表す。よって符号付き電流は

$$\boxed{I = -\frac{\pi a^2 B_0 \alpha V}{R}}. \tag{5}$$

負号は、実際の電流が図の正方向と逆の時計回りであることを示す。

[3] 一定速度を保つための力

電流が流れるリングに働く磁気力は、周回方向の電流要素と磁場とのローレンツ力から求まる。円周上の角度を ϑ とすると、正の周回方向の電流要素は $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0)\,\mathrm{d}\vartheta$ である。リング上では $z=0$、$x=X+a\cos\vartheta$ なので、$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ より

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{mag},x} = IaB_0\cos\vartheta[1+\alpha(X+a\cos\vartheta)]\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{6}$$

$$F_{\mathrm{mag},x} = IaB_0\int_0^{2\pi}[(1+\alpha X)\cos\vartheta + \alpha a\cos^2\vartheta]\,\mathrm{d}\vartheta = I\pi a^2 B_0\alpha. \tag{7}$$

ここで B_z の一様部分の寄与は一周積分で相殺し、x に比例する部分だけが残る。したがって一定速度では、加えた外力がこの磁気抵抗力とつり合う。外力の大きさは

$$\boxed{F = \frac{(\pi a^2 B_0\alpha)^2}{R}V}. \tag{8}$$

この結果は電力でも確認できる。外力の仕事率 FV は RI^2 に等しい。

[4] 時間変化する磁場と運動方程式

磁束は

$$\Phi(X,t) = \pi a^2 B_0 b(t)(1+\alpha X) \tag{9}$$

である。正の電流を反時計回りとする規約を保つと、起電力と電流は

$$IR = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 B_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]. \tag{10}$$

角度 ϑ の電流要素を $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)\,\mathrm{d}\vartheta$ とすると、$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ である。$x = X + a\cos\vartheta$ を代入して一周積分すると、x 成分は

$$F_{\mathrm{mag},x} = I\pi a^2 B_0 \alpha b(t), \tag{11}$$

となる。運動方程式 $m\ddot{X} = F_{\mathrm{mag},x}$ に式(10)を代入すると

$$m\ddot{X} = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2 \alpha}{R} b(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]. \tag{12}$$

したがって問題文の形では

$$\boxed{\alpha\ddot{X} = -\lambda b(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]}, \qquad \boxed{\lambda = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2}{mR}}. \tag{13}$$

λ の次元は時間の逆数である。

[5] べき級数の初期係数

$0 \le t < \tau$ では $b(t) = t/\tau$ だから、運動方程式は

$$\alpha\ddot{X} = -\frac{\lambda t}{\tau^2}\left(1 + \alpha X + \alpha t\dot{X}\right). \tag{14}$$

初期条件 $X(0) = 0$、$\dot{X}(0) = 0$ を $X = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ に適用すると、$a_0 = a_1 = 0$ である。式(14)の t^0 の係数を比べると、左辺は $2\alpha a_2$、右辺はゼロなので、$a_2 = 0$ となる。

[6] 短時間近似での速度

式(14)の t^1 の係数を比べ、$a_0 = 0$ を使うと

$$6\alpha a_3 = -\frac{\lambda}{\tau^2}, \qquad \boxed{a_3 = -\frac{\lambda}{6\alpha\tau^2}}. \tag{15}$$

問題文の $\tau \ll 1/\lambda$ の近似では $X \simeq a_3 t^3$ なので、$t = \tau$ での速度は

$$\boxed{V_0 = \dot{X}(\tau) \simeq 3a_3\tau^2 = -\frac{\lambda}{2\alpha}}. \tag{16}$$

負号はリングが初期位置から $-x$ 方向へ動くことを表す。

[7] 最終位置

$t \geq \tau$ では $b(t) = 1$ であり、運動方程式は

$$\ddot{X} + \lambda \dot{X} = 0. \tag{17}$$

したがって速度は $\dot{X}(t) = V_0 e^{-\lambda(t-\tau)}$ と減衰し、無限時間後の変位は V_0/λ である。設問 [6]–[7] で指定された三次近似 $X \simeq a_3 t^3$ を用いると、

$$X(\tau) \simeq -\frac{\lambda\tau}{6\alpha}, \qquad V_0 \simeq -\frac{\lambda}{2\alpha}. \tag{18}$$

従って、この指定された近似の下での答えは

$$\boxed{X(\infty) \simeq X(\tau) + \frac{V_0}{\lambda} = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\lambda\tau}{6\alpha}}. \tag{19}$$

この三次近似の結果と、運動方程式の漸近展開の精度は区別する必要がある。$\epsilon = \lambda\tau$、$u = t/\tau$、$y = \alpha X$ と置くと、$0 \leq u \leq 1$ で式(14)は

$$y''(u) = -\epsilon u[1 + y(u) + u y'(u)], \qquad y(0) = y'(0) = 0 \tag{20}$$

となる。この有限区間の線形初期値問題を ϵ で順に展開すると

$$y(u) = -\frac{\epsilon u^3}{6} + \frac{\epsilon^2 u^6}{45} + O(\epsilon^3), \qquad y'(u) = -\frac{\epsilon u^2}{2} + \frac{2\epsilon^2 u^5}{15} + O(\epsilon^3) \tag{21}$$

を得る。従って $X(\tau) = y(1)/\alpha$、$V_0/\lambda = y'(1)/(\alpha\epsilon)$ を足した漸近展開は

$$X(\infty) = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\lambda\tau}{30\alpha} + O\left(\frac{(\lambda\tau)^2}{\alpha}\right). \tag{22}$$

三次近似だけで得た箱内の一次係数 $-1/6$ は、V_0 の次の補正を含めないため、この漸近展開の一次係数とは異なる。

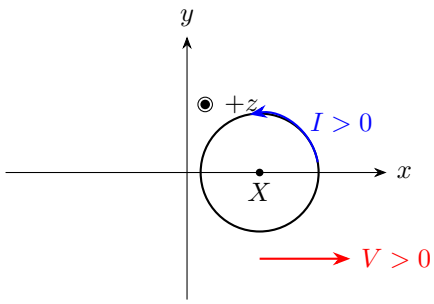


図 1: 磁束と電流の符号規約。紙面の手前が $+z$、正電流はその向きから見て反時計回り。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 数演算子と消滅演算子

交換子の積の公式 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ を用いると

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a}. \tag{1}$$

このため

$$\hat{N}(\hat{a}|n+1\rangle) = \hat{a}\hat{N}|n+1\rangle - \hat{a}|n+1\rangle = n\hat{a}|n+1\rangle. \tag{2}$$

従って $\hat{a}|n+1\rangle$ は固有値 n の固有状態に比例する。規格化された固有状態の位相を適当に選び、$\hat{a}|n+1\rangle = c_n|n\rangle$（$c_n \geq 0$）と書く。係数はノルムの二乗から

$$c_n^2 = \langle n+1|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n+1\rangle = n+1 \tag{3}$$

なので、

$$\boxed{\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle.} \tag{4}$$

同様に

$$\|\hat{a}|0\rangle\|^2 = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = 0 \tag{5}$$

だから $\boxed{\hat{a}|0\rangle = 0}$ である。

[2] コヒーレント状態の固有値

互いに直交規格化された数状態を使うと

$$\langle \Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1. \tag{6}$$

消滅演算子を級数に作用させ、[1] を使って添字をずらすと

$$\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{7}$$

$$= \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle = \boxed{\alpha|\Psi(\alpha)\rangle}. \tag{8}$$

[3] エネルギー期待値

[2] の固有値式と規格化を、$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の期待値に用いると

$$\langle \hat{N} \rangle = \|\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle\|^2 = |\alpha|^2 \langle \Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = |\alpha|^2. \tag{9}$$

従って

$$\boxed{\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right).} \tag{10}$$

[4] 平均値と不確定性

生成・消滅演算子の定義を足し引きすると

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \tag{11}$$

固有状態の性質から $\langle\hat{a}\rangle = \alpha$、$\langle\hat{a}^\dagger\rangle = \alpha^*$ なので

$$\boxed{\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\Re\alpha}, \qquad \boxed{\langle\hat{p}\rangle = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\Im\alpha}. \tag{12}$$

また $\langle\hat{a}^2\rangle = \alpha^2$、$\langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle = (\alpha^*)^2$、$\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = |\alpha|^2$、$\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle = |\alpha|^2 + 1$ より

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1\right], \tag{13}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left[(\alpha - \alpha^*)^2 - 1\right]. \tag{14}$$

平均値の二乗をそれぞれ引くと、

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}, \qquad \boxed{\Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}}, \qquad \boxed{\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}}. \tag{15}$$

各標準偏差は正であり、積はハイゼンベルクの下限に等しい。

[5] 時間発展

数状態ごとの時間発展は

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n\rangle = e^{-i\omega t(n+1/2)}|n\rangle. \tag{16}$$

これを状態の級数に適用すると

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(\alpha_0)\rangle = e^{-i\omega t/2}e^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{17}$$

$$= e^{-i\omega t/2}|\Psi(\alpha_0 e^{-i\omega t})\rangle. \tag{18}$$

従って

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} = Ae^{i(\theta - \omega t)}}. \tag{19}$$

前の因子 $e^{-i\omega t/2}$ は全ての数状態に共通する全体位相であり、期待値には影響しない。

[6] 古典的な運動と準古典状態

時刻 t で $\alpha(t) = Ae^{i(\theta-\omega t)}$ を位置・運動量の平均式に代入すると

$$\boxed{\langle\hat{x}\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}A\cos(\omega t - \theta)}, \tag{20}$$

$$\boxed{\langle\hat{p}\rangle_t = -\sqrt{2m\hbar\omega}A\sin(\omega t - \theta)}. \tag{21}$$

これらは古典調和振動子の位置・運動量の時間変化そのものである。振幅は A に比例する一方、Δx と Δp は A に依存しない。それぞれの振動振幅に対する標準偏差の比は $1/(2A)$ であり、$A \gg 1$ では波束の広がりが古典軌道の振幅より十分小さくなる。この意味で準古典状態と呼ばれる。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 可逆断熱膨張

エントロピーを P,T の関数とみると、全微分は

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \mathrm{d}T. \tag{1}$$

マクスウェル関係と $C_P = T(\partial S/\partial T)_P$、熱膨張率 $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_P$ を使うと

$$\mathrm{d}S = -\alpha V\,\mathrm{d}P + \frac{C_P}{T}\,\mathrm{d}T. \tag{2}$$

可逆断熱過程では $\mathrm{d}S = 0$ だから、

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{TV\alpha}{C_P}}. \tag{3}$$

理想気体は $V = RT/P$ なので、一定圧力で $\partial V/\partial T = R/P = V/T$ となり

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{ideal}} = \frac{1}{T}}. \tag{4}$$

[2] ジュール・トムソン膨張のエンタルピー

多孔栓を通る定常流を、栓の両側を含む断熱制御体積として考える。外部との熱交換はなく、軸仕事もなく、流速と高さの変化による運動・位置エネルギーの差を無視する。入口側が流体を押す圧力仕事は P_1V_1、出口側で流体がする仕事は P_2V_2 なので、単位モル当たりの第一法則は $U_2 - U_1 = P_1V_1 - P_2V_2$ となる。従って $H = U + PV$ とおけば入口・出口で

$$H_1 = H_2 \tag{5}$$

となる。これは等エンタルピー条件であり、栓を通る過程を等エントロピーとする主張ではない。断熱でも、不可逆過程ではエントロピーは生成されうる。

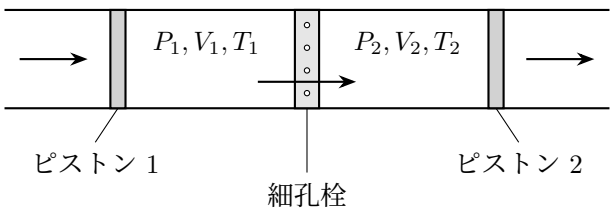


図 1: 断熱された細孔栓の入口・出口状態。

[3] ジュール・トムソン係数

エンタルピーを P,T の関数として微分する。

$$\mathrm{d}H = C_P\,\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P. \tag{6}$$

$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P$ とマクスウェル関係から $(\partial H/\partial P)_T = V - T(\partial V/\partial T)_P = V(1-T\alpha)$。従って等エンタルピー条件 $\mathrm{d}H = 0$ では

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V(T\alpha - 1)}{C_P}}. \tag{7}$$

[1] の係数との差は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H - \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = -\frac{V}{C_P} < 0, \tag{8}$$

ここで $V > 0, C_P > 0$ を用いた。理想気体では $T\alpha = 1$ なので、

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{H,\mathrm{ideal}} = 0}. \tag{9}$$

[4] 低密度での状態方程式

この小問で用いる van der Waals の状態方程式は

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \tag{10}$$

これを P について解くと

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \qquad PV = \frac{RT}{1 - b/V} - \frac{a}{V}. \tag{11}$$

$b/V \ll 1$ で $1/(1-b/V) \simeq 1 + b/V$ と展開する。

$$PV \simeq RT + \frac{RTb - a}{V} \tag{12}$$

$$= RT\left[1 + \left(1 - \frac{a}{bRT}\right)\frac{b}{V}\right]. \tag{13}$$

従って

$$\boxed{B(T) = 1 - \frac{a}{bRT}}. \tag{14}$$

ボイル温度 $T_B = a/(Rb)$ では $B(T_B) = 0$ となり、低密度での一次の非理想補正が消える。これは密度の一次の範囲で理想気体に近づくという意味である。

[5] 逆転温度

ここでも原問題の $V \gg b$、$T \geq T_B$ の範囲で近似を用いる。与えられた近似を T で微分すると

$$V \simeq \frac{RT}{P} + b - \frac{a}{RT}, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \simeq \frac{R}{P} + \frac{a}{RT^2}. \tag{15}$$

一般式 $\mu_{\rm JT} = [T(\partial V/\partial T)_P - V]/C_P$ に代入して

$$\boxed{\mu_{\rm JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H \simeq \frac{1}{C_P}\left(\frac{2a}{RT} - b\right)}. \tag{16}$$

係数がゼロとなる逆転温度は

$$\boxed{T_{\rm inv} = \frac{2a}{Rb} = 2T_B}. \tag{17}$$

この近似の範囲で、$T_B \le T < T_{\rm inv}$ では $\mu_{\rm JT} > 0$ なので減圧時に冷え、$T > T_{\rm inv}$ では $\mu_{\rm JT} < 0$ なので減圧時に温まる。

[6] 排除体積だけがある場合

a の寄与を無視したとき、相互作用は排除体積だけであり、粒子間ポテンシャルエネルギーは温度に依存しない定数として扱える。従って内部エネルギー U は運動エネルギーで決まり、温度だけに依存する。一方、状態方程式は $P(V-b) = RT$ なので

$$H = U + PV = U + RT\frac{V}{V-b} = U + RT\left(1 + \frac{b}{V-b}\right). \tag{18}$$

温度を固定して体積を増やすと $V/(V-b) = 1 + b/(V-b)$ は減少する。$C_V = (\partial U/\partial T)_V > 0$ を用いて H の全微分を取ると

$$dH = \left(C_V + \frac{RV}{V-b}\right)dT - \frac{RTb}{(V-b)^2}dV. \tag{19}$$

したがってジュール・トムソン過程の $dH = 0$ で $dV > 0$ なら $dT > 0$ となる。これは $\mu_{\rm JT} = -b/C_P < 0$ と減圧時の $\mathrm{d}P < 0$ から $\mathrm{d}T > 0$ となることにも一致する。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 束縛電子の運動

電子の電荷は $-e$ なので、電場による力は $-e\boldsymbol{E}$ である。共振振動数 ω_0 の調和復元力も加えると、

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{x}} = -m\omega_0^2\boldsymbol{x} - e\boldsymbol{E}.} \tag{1}$$

[2] 分極の運動方程式

数密度 N の電子による分極は $\boldsymbol{P} = -eN\boldsymbol{x}$ である。これを時間で 2 回微分し、[1] を使うと

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{P}} + \omega_0^2\boldsymbol{P} = \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E}.} \tag{2}$$

右辺の符号が正なのは、$\boldsymbol{P}$ と電子変位 $\boldsymbol{x}$ が反対向きだからである。

[3] 誘電率

電場と分極が角周波数 ω で振動するので、$\ddot{P} = -\omega^2 P$ である。従って

$$(\omega_0^2 - \omega^2)P = \frac{Ne^2}{m}E, \qquad \boxed{P = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}E}. \tag{3}$$

マクロな関係 $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon(\omega)E$ より

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{4}$$

[4] 誘電体中の分散関係

問題文の波動方程式 (3) に平面波を代入すると $-k^2E + \varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2 E = 0$ だから

$$\boxed{k^2 = \mu_0\varepsilon(\omega)\omega^2}. \tag{5}$$

プラズマ角周波数を $\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$、$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ とおく。真空中の光速 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ を使えば

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{6}$$

[5] 誘電体の実部・虚部

正の角周波数に対して、分子と分母の符号を比べる。$+z$ 方向へ進む波には、伝搬域で $\mathrm{Re}\,k>0$、非伝搬域で $\mathrm{Im}\,k>0$ となる枝を選ぶ。

周波数域	$\mathrm{Re}\,k$	$\mathrm{Im}\,k$
$0<\omega<\omega_0$	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$	0
$\omega_0<\omega<\omega_1$	0	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}}$
$\omega>\omega_1$	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega^2-\omega_0^2}}$	0

(7)

誘電体の非伝搬帯では $k=i\kappa$（$\kappa>0$）を選ぶ。位相因子は $e^{ikz}=e^{-\kappa z}$ となり、$+z$ 方向へ進むと振幅が減衰する。これはエバネッセント場の空間的減衰であり、この無減衰模型での吸収損失を意味しない。共振 ω_0 では理想化した無減衰模型の k が発散し、ω_1 では $k=0$ となる。

図の例では $\Omega=\omega/\omega_0$、$K=ck/\omega_0$ と規格化し、$\omega_1/\omega_0=2$ を選ぶ。従って $\omega_p/\omega_0=\sqrt{3}$ であり、実部・虚部の枝は直前の分散式から

$$\mathrm{Re}\,K=\begin{cases}\Omega\sqrt{\dfrac{4-\Omega^2}{1-\Omega^2}}, & 0<\Omega<1,\\ 0, & 1<\Omega<2,\\ \Omega\sqrt{\dfrac{\Omega^2-4}{\Omega^2-1}}, & \Omega>2,\end{cases}\qquad \mathrm{Im}\,K=\begin{cases}\Omega\sqrt{\dfrac{4-\Omega^2}{\Omega^2-1}}, & 1<\Omega<2,\\ 0, & 0<\Omega<1 \text{ または} \Omega>2.\end{cases} \tag{8}$$

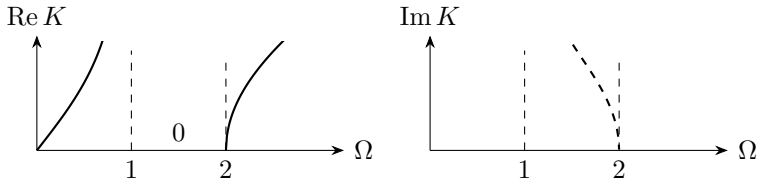


図 1: 誘電体の規格化波数 K の実部（実線）と虚部（破線）。共振近傍で発散する枝は枠外へ続く。

[6] 金属中の自由電子

金属中の電子には束縛復元力がない。磁気力を無視すると、電場による運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{x}}=-e\boldsymbol{E}.} \tag{9}$$

分極 $\boldsymbol{P}=-en_e\boldsymbol{x}$ を導入すれば、調和応答では

$$P=-\frac{n_e e^2}{m\omega^2}E,\qquad \varepsilon_m(\omega)=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2}\right),\qquad \omega_{pm}^2=\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}. \tag{10}$$

[7] 金属の実部・虚部

分散関係は

$$k^2=\mu_0\varepsilon_0(\omega^2-\omega_{pm}^2)=\frac{\omega^2-\omega_{pm}^2}{c^2}. \tag{11}$$

ここでは $\Omega = \omega/\omega_{pm}$、$K = ck/\omega_{pm}$ とおくと、正周波数で

$$\operatorname{Re} K = \begin{cases} 0, & 0 < \Omega < 1, \\ \sqrt{\Omega^2 - 1}, & \Omega > 1, \end{cases} \qquad \operatorname{Im} K = \begin{cases} \sqrt{1 - \Omega^2}, & 0 < \Omega < 1, \\ 0, & \Omega > 1. \end{cases} \tag{12}$$

となる。従って正の角周波数では

$$\boxed{\begin{aligned} 0 < \omega < \omega_{pm}: \quad & \operatorname{Re} k = 0, \quad \operatorname{Im} k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega_{pm}^2 - \omega^2}, \\ \omega > \omega_{pm}: \quad & \operatorname{Re} k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{pm}^2}, \quad \operatorname{Im} k = 0. \end{aligned}} \tag{13}$$

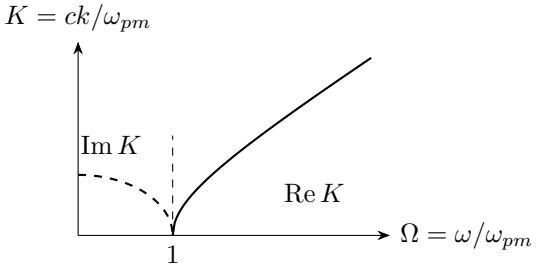


図 2: 金属の規格化波数 K の実部（実線）と虚部（破線）。

[8] 誘電体と金属の光学的性質

可視光を各模型の低周波数側とみなす。束縛電子をもつ誘電体で $\omega \ll \omega_0$ なら k は実数であり、波は媒質内を伝搬する。対して金属で $\omega < \omega_{pm}$ なら k は虚数であり、電場は表面から内部へ指数関数的に減衰する。内部にはエバネッセント場が存在する。ここで H_y は磁場の強さの y 成分である。位相因子 $e^{i(kz-\omega t)}$ に対する Faraday の法則 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{H}$ の y 成分は $ikE_x = i\omega\mu_0 H_y$ だから、$H_y = kE_x/(\mu_0\omega)$ となる。k が純虚数なので、時間平均の法線エネルギー流は $\operatorname{Re}(E_x H_y^*)/2 = |E_x|^2 \operatorname{Re}(k)/(2\mu_0\omega) = 0$ である。散逸のない半無限金属に平均電力は伝わらず、入射電力は反射される。金属内部の空間的減衰を吸収損失とは解釈しない。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 放物線バンドの状態密度

エネルギーが $\epsilon > 0$ 以下の状態は $\boldsymbol{k}$ 空間で楕円体の内部にある。その半軸は $k_i = \sqrt{2m_i\epsilon}/\hbar$ である。スピン自由度を数えず、$\boldsymbol{k}$ 空間で 1 状態が占める体積を $(2\pi)^3$ とすると、単位実空間体積当たりの状態数は

$$n(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\prod_{i=1}^{3}\frac{\sqrt{2m_i\epsilon}}{\hbar} = \frac{(2\epsilon)^{3/2}\sqrt{m_1m_2m_3}}{6\pi^2\hbar^3}. \tag{1}$$

これを ϵ で微分して

$$\boxed{\rho_{3\mathrm{D}}(\epsilon) = \frac{\sqrt{2m_1m_2m_3\epsilon}}{2\pi^2\hbar^3} \quad (\epsilon \geq 0),} \tag{2}$$

負のエネルギーでは $\rho_{3\mathrm{D}} = 0$ である。状態密度はバンド端から $\sqrt{\epsilon}$ に比例して増加する。

[1.2] 波数の時間発展

速度成分は $v_x = \hbar k_x/m_1$、$v_y = \hbar k_y/m_2$、$v_z = \hbar k_z/m_3$ である。電子の符号 $-e$ と $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ から

$$\dot{k}_x = -\frac{eB}{m_2}k_y, \qquad \dot{k}_y = \frac{eB}{m_1}k_x, \qquad \dot{k}_z = 0. \tag{3}$$

従って $\ddot{k}_x = -(eB)^2k_x/(m_1m_2)$ であり、正の角周波数は

$$\boxed{\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{m_1m_2}}}. \tag{4}$$

初期条件と設問の k_x の形より

$$\boxed{k_x(t) = k_{0x}\cos(\omega_c t), \quad k_y(t) = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}k_{0x}\sin(\omega_c t), \quad k_z(t) = k_{0z}.} \tag{5}$$

[1.3] 波数軌道

消去すると

$$\frac{k_x^2}{k_{0x}^2} + \frac{k_y^2}{(\sqrt{m_2/m_1}\,k_{0x})^2} = 1. \tag{6}$$

したがって k_x–k_y 平面では楕円を描く。$t = 0$ で $(k_x, k_y) = (k_{0x}, 0)$ にあり、$\dot{k}_y(0) > 0$ なので、時間とともに上向きに進む。

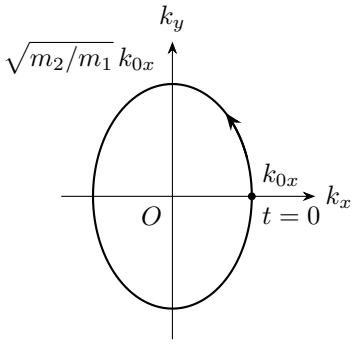


図 1: 放物線バンドの波数軌道。図では $m_2 = 2m_1$ とし、軸上のラベルには一般の半軸長を示す。矢印は時間の増加方向を示す。

[1.4] 実空間の軌道

群速度を積分し、$\boldsymbol{r}(0) = 0$ を使うと

$$x(t) = \frac{\hbar k_{0x}}{m_1 \omega_c} \sin(\omega_c t), \tag{7}$$

$$y(t) = \frac{\hbar k_{0x}}{\sqrt{m_1 m_2}\,\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)], \tag{8}$$

$$z(t) = \frac{\hbar k_{0z}}{m_3} t. \tag{9}$$

xy 平面への射影は中心が $y = \hbar k_{0x}/(\sqrt{m_1 m_2}\,\omega_c)$ にある楕円である。$t = 0$ では原点から x 正方向へ進む。z は一定速度で増えるので、三次元軌道はこの楕円を射影にもつらせんである。

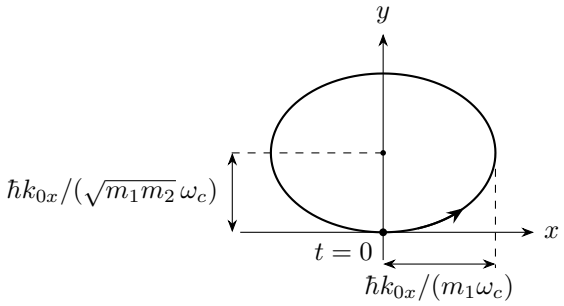


図 2: 放物線バンドの実空間軌道の xy 射影。図 1と同じ $m_2 = 2m_1$ の例。初期位置は原点で、矢印は時間の増加方向を示す。

[2.1] 線形バンドの状態密度

2 次元では状態密度は $\boldsymbol{k}$ 空間の面積で数える。エネルギーの絶対値が $|\epsilon|$ 以下の状態の波数半径は $k = |\epsilon|/\gamma$ であり、1 枝当たりの単位面積当たり状態数は

$$n(\epsilon) = \frac{\pi k^2}{(2\pi)^2} = \frac{\epsilon^2}{4\pi\gamma^2}. \tag{10}$$

正負どちらの枝についても $|\epsilon|$ で微分した状態密度は

$$\boxed{\rho_{2\mathrm{D}}(\epsilon) = \frac{|\epsilon|}{2\pi\gamma^2}.} \tag{11}$$

よって $\epsilon = 0$ でゼロとなり、正負のエネルギーに対して V 字形に増加する。

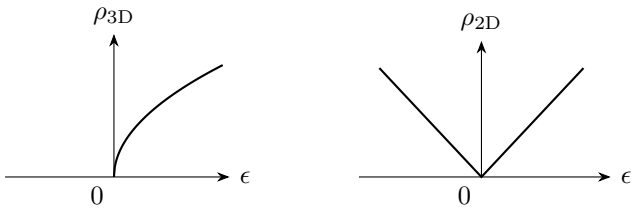


図 3: 放物線バンドと線形バンドの状態密度の概形。各図の尺度は独立で、左は $\sqrt{\epsilon}$、右は $|\epsilon|$ に比例する形を示す。

[2.2] 線形バンドの波数運動

バンドの符号を $s = +1$（$\epsilon > 0$）、$s = -1$（$\epsilon < 0$）で表すと、速度は $\boldsymbol{v} = s(\gamma/\hbar)\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ である。この等方的な分散では $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{k}$ に平行または反平行である。運動方程式 $\hbar\dot{\boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の両辺を $\boldsymbol{k}$ と内積すると

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{k}|^2 = 2\boldsymbol{k} \cdot \dot{\boldsymbol{k}} = -\frac{2e}{\hbar}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0. \tag{12}$$

よって初期値から $|\boldsymbol{k}| = k_0$ となる。この一定値を用いた運動方程式の成分は

$$\dot{k}_x = -s\frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}k_y, \qquad \dot{k}_y = s\frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}k_x. \tag{13}$$

従って $\ddot{k}_x = -(\gamma eB/(\hbar^2 k_0))^2 k_x$ である。初期条件を適用すると

$$\boxed{\omega_c = \frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}}, \qquad \boxed{k_x = k_0\cos(\omega_c t), \quad k_y = sk_0\sin(\omega_c t).} \tag{14}$$

ここでは ω_c を正の角周波数の大きさとして定義し、回転方向を s で表した。

[2.3] 二つの線形バンドの軌道

波数空間では、両枝とも半径 k_0 の円を描く。正の枝は反時計回り、負の枝は時計回りに回る。

位置の速度は

$$v_x = s\frac{\gamma}{\hbar}\cos(\omega_c t), \qquad v_y = \frac{\gamma}{\hbar}\sin(\omega_c t). \tag{15}$$

初期位置を原点として積分すると

$$\boxed{x(t) = s\frac{\gamma}{\hbar\omega_c}\sin(\omega_c t), \qquad y(t) = \frac{\gamma}{\hbar\omega_c}[1 - \cos(\omega_c t)].} \tag{16}$$

$R_c = \gamma/(\hbar\omega_c) = \hbar k_0/(eB)$ とおくと $x^2 + (y - R_c)^2 = R_c^2$ であり、実空間の軌道も原点を通る円である。正の枝は原点から右へ動き、反時計回りに進む。負の枝は原点から左へ動き、時計回りに進む。

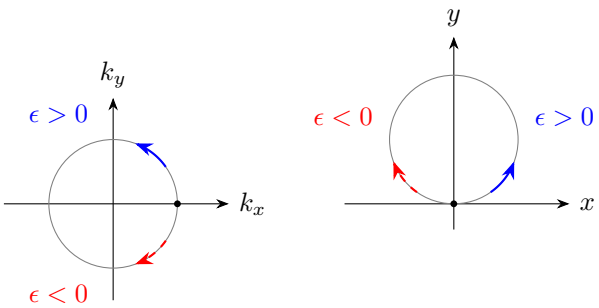


図 4: 線形バンドの波数円と実空間円。実線の矢印は正の枝、破線の矢印は負の枝の時間発展方向を示す。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] B が動き出す時刻

C が動き始めてから t 秒後、B が静止している間は右側のばねの伸びが $v_0 t$ である。B を右へ引く力は $kv_0 t$。これが最大静止摩擦力 μmg に達した時に B が動き始めるので

$$kv_0 t_0 = \mu mg, \qquad \boxed{t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0}}. \tag{1}$$

[1.2] B の運動方程式

B が動き始めた時刻を $t = 0$ とする。このとき C は初期位置から $v_0 t_0$ だけ進んでおり、その後 t 秒間にさらに $v_0 t$ 進む。A は静止しているため、左のばねは x_B だけ伸び、右のばねは $v_0(t + t_0) - x_B$ だけ伸びる。B は右向きに滑るので動摩擦力は左向きである。よって

$$m\ddot{x}_B = k\{v_0(t + t_0) - x_B\} - kx_B - \frac{2}{3}\mu mg \tag{2}$$

$$= -2kx_B + kv_0 t + \frac{1}{3}\mu mg = -2kx_B + kv_0 t + \frac{1}{3}kv_0 t_0. \tag{3}$$

ここでは $x_B(0) = 0$ に加えて、滑り始める直前まで静止していたことから $\dot{x}_B(0) = 0$ である。

[1.3] B の位置

角振動数 $\omega = \sqrt{2k/m}$ を導入すると

$$\ddot{x}_B + \omega^2 x_B = \frac{kv_0}{m} t + \frac{kv_0 t_0}{3m}. \tag{4}$$

右辺に対する一次式の特解を $x_p = v_0 t/2 + v_0 t_0/6$ とおける。一般解に初期条件を適用すると

$$\boxed{x_B(t) = \frac{v_0 t}{2} + \frac{v_0 t_0}{6} - \frac{v_0 t_0}{6}\cos(\omega t) - \frac{v_0}{2\omega}\sin(\omega t)}. \tag{5}$$

この式は $t = 0$ で $x_B = \dot{x}_B = 0$ を満たす。

[1.4] A が静止を保つ条件

$\omega t_0 \ll 1$ のもとで、解の二つの差をそれぞれ展開する。

$$x_B(t_0) = \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega}\right) + \frac{v_0 t_0}{6}\left[1 - \cos(\omega t_0)\right] \tag{6}$$

$$= \frac{v_0\omega^2 t_0^3}{12} + \frac{v_0\omega^2 t_0^3}{12} + O(v_0\omega^4 t_0^5) \tag{7}$$

$$= \boxed{\frac{v_0\omega^2 t_0^3}{6} = \frac{k v_0 t_0^3}{3m}} + O(v_0\omega^4 t_0^5). \tag{8}$$

このとき A に働くばね力の大きさは

$$k x_B(t_0) \simeq \frac{\mu m g}{6}(\omega t_0)^2 \ll \mu m g, \tag{9}$$

である。従って A を動かすのに必要な力は最大静止摩擦力より小さく、A は静止を保つ。

[2.1] 微小振動の運動方程式と固有振動数

外部ポテンシャルの曲率は

$$U''(x) = k_1\left[-1 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \tag{10}$$

従って中央の B では $U''(0) = -k_1$、両端の A,C では $U''(\pm l) = 2k_1$ である。ばね力と外力を一次まで残すと

$$m\begin{pmatrix}\ddot{q}_A\\ \ddot{q}_B\\ \ddot{q}_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k_0 - 2k_1 & k_0 & 0\\ k_0 & -2k_0 + k_1 & k_0\\ 0 & k_0 & -k_0 - 2k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_A\\ q_B\\ q_C\end{pmatrix}. \tag{11}$$

式(11)の右辺の行列を K とおく。これを $(1, 0, -1)^T$ に作用させると

$$K\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -(k_0 + 2k_1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{q}} = K\boldsymbol{q}$ なので、左右反対称モードの角振動数は

$$\boxed{\omega_a^2 = \frac{k_0 + 2k_1}{m}}. \tag{13}$$

対称な変位 (a, b, a) では、力の係数行列 K は (a, b) に対して

$$K_s = \begin{pmatrix}-k_0 - 2k_1 & k_0\\ 2k_0 & -2k_0 + k_1\end{pmatrix} \tag{14}$$

と作用する。K_s の固有値を $-m\omega^2$ と書くと

$$m^2\omega^4 - m(3k_0 + k_1)\omega^2 + (3k_0 k_1 - 2k_1^2) = 0, \tag{15}$$

したがって対称モードの二つの周波数は

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{3k_0 + k_1 \pm \sqrt{9k_0^2 - 6k_0 k_1 + 9k_1^2}}{2m}}. \tag{16}$$

ω_- が小さい方の周波数である。三つのモードが正の固有角振動数を持つ安定な微小振動となるのは $0 < k_1 < 3k_0/2$ である。等号の $k_1 = 3k_0/2$ では $\omega_- = 0$ となり、線形化した零モードは $\ddot{q} = 0$ であって振動しない。これを不安定化の臨界点として区別する。

[2.2] 不安定になる基準振動

k_1 を増すと、最初にゼロになるのは対称モードの低周波数 ω_- である。二つの対称モードの積は

$$\omega_-^2\omega_+^2 = \frac{k_1(3k_0 - 2k_1)}{m^2}. \tag{17}$$

従って臨界値では $3k_0 - 2k_c = 0$ となり

$$\boxed{k_c = \frac{3}{2}k_0}. \tag{18}$$

$k_1 > k_c$ では $\omega_-^2 < 0$ となるため、この対称な低周波数モードが不安定である。

[2.3] 不安定化するモードの変位比

$k_1 = 4k_c/9 = 2k_0/3$ では

$$\omega_-^2 = \frac{k_0}{3m}. \tag{19}$$

このとき

$$K_s = k_0 \begin{pmatrix} -7/3 & 1 \\ 2 & -4/3 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

固有値 $-k_0/3 = -m\omega_-^2$ の固有ベクトルは $(a, b) = (1, 2)$ であり、全三質点では $(q_A, q_B, q_C) \propto (1, 2, 1)$ となる。よって

$$\boxed{q_A : q_B : q_C = 1 : 2 : 1}. \tag{21}$$

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 二点電荷のポテンシャル

ポテンシャルの重ね合わせから

$$\boxed{\phi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)}. \tag{1}$$

[2] 遠方での双極子ポテンシャル

$\boldsymbol{p}$ の向きを極軸に取ると、正負電荷の位置はそれぞれ $+\boldsymbol{d}/2$、$-\boldsymbol{d}/2$ であり、

$$r_\pm = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd\cos\theta}. \tag{2}$$

d/r の一次まで二項展開すると

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} + \frac{d\cos\theta}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^3}\right), \qquad \frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} - \frac{d\cos\theta}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^3}\right). \tag{3}$$

単極子項は差を取ると消える。$p = qd$ より

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (r \gg d). \tag{4}$$

[3] 双極子電場

軸対称な球座標で $\nabla\phi = \boldsymbol{e}_r\partial_r\phi + (\boldsymbol{e}_\theta/r)\partial_\theta\phi$ だから

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right). \tag{5}$$

これは問題文に示された電場の式である。

$$\boxed{\boldsymbol{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)}. \tag{6}$$

[4] 双極子 2 の回転方向

位置 1 から 2 への方向を x 軸とすると、双極子 1 が位置 2 につくる電場は

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 l^3}(2\cos\theta_1\,\boldsymbol{e}_x - \sin\theta_1\,\boldsymbol{e}_y). \tag{7}$$

(a) では $\theta_1 = \pi/2$ なので $\boldsymbol{E}_1$ は $-y$ 方向、$\boldsymbol{p}_2$ は $+x$ 方向である。トルク $\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{E}_1$ は紙面の裏向きとなるから、紙面を正面から見て時計回りに回り始める。(b) では $\boldsymbol{p}_2$ も $-y$ 方向で $\boldsymbol{E}_1$ と平行なのでトルクはゼロであり、回転しない。

[5] 二つの双極子の相互作用エネルギー

$U = -\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1$ に上の電場と $\boldsymbol{p}_2 = p_2(\cos\theta_2 \boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2 \boldsymbol{e}_y)$ を代入すると

$$U = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 l^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \tag{8}$$

$$= -\frac{p_1 p_2}{8\pi\varepsilon_0 l^3}[3\cos(\theta_1+\theta_2) + \cos(\theta_1-\theta_2)]. \tag{9}$$

[6] 安定な相対配置

$u = \theta_1 + \theta_2$、$v = \theta_1 - \theta_2$ は独立に変えられる角度である。エネルギーを最小にするには $\cos u = \cos v = 1$ が必要で、

$$\theta_1 + \theta_2 = 2m\pi, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \qquad (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{10}$$

したがって角度を 2π を法として表すと、安定配置は $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ および (π, π) であり、いずれも

$$\boxed{U_{\min} = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 l^3}}. \tag{11}$$

[7] 接地導体面と双極子のエネルギー

図 3 の実双極子の法線成分は $p\cos\alpha$、面に平行な成分は $-p\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_y$ である。双極子を $-q$ から $+q$ へ向かう微小な電荷対とみなす。接地面の鏡像では各電荷を $z \mapsto -z$ で反射し、電荷の符号も反転する。像の $-q$ から $+q$ への変位をたどると、法線成分は元の向きのまま、面に平行な成分は反転する。実双極子と像双極子の距離は $2h$ である。像双極子が実双極子の位置に

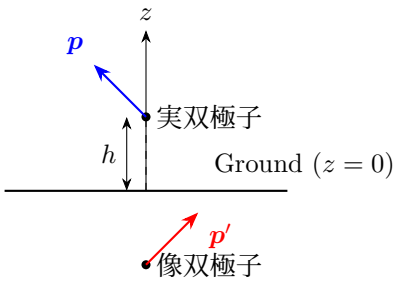


図 1: 導体面に対する実双極子と鏡像双極子。接線成分は反転し、法線成分は同じ向きである。

つくる電場は

$$\boldsymbol{E}_{\rm im} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(2h)^3}(-p\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_y + 2p\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_z). \tag{12}$$

従って両者の相互作用エネルギーは

$$U_{\rm pair} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm im} = -\frac{p^2(1+\cos^2\alpha)}{32\pi\varepsilon_0 h^3}. \tag{13}$$

像は実双極子によって誘起されるので、この相互作用エネルギー全体を系のエネルギーとはしない。h, α を固定して実双極子を $\boldsymbol{p}(s) = s\boldsymbol{p}$（$0 \le s \le 1$）と徐々に立ち上げると、導体の線形応答により像の電場は $\boldsymbol{E}_{\rm im}(s) = s\boldsymbol{E}_{\rm im}$ となる。実双極子を増やす増分仕事のうち導体に由来する分は $dU' = -\boldsymbol{E}_{\rm im}(s)\cdot d\boldsymbol{p}(s) = -s\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm im}\,ds$ である。従って $\int_0^1 s\,ds = 1/2$ から

$$\boxed{U' = \frac{1}{2}U_{\rm pair} = -\frac{p^2(1+\cos^2\alpha)}{64\pi\varepsilon_0 h^3} = -\frac{p^2(3+\cos 2\alpha)}{128\pi\varepsilon_0 h^3}}. \tag{14}$$

これは $h \to \infty$ でゼロとなる。

[8] 最も安定な双極子の向き

U' を最小にするには $\cos^2\alpha = 1$ であればよい。従って

$$\boxed{\alpha = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})} \tag{15}$$

であり、双極子モーメントが導体面の法線に平行または反平行なとき最も安定である。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 井戸型ポテンシャルの固有状態

井戸の外で波動関数はゼロであり、境界条件は $\psi(\pm a/2) = 0$ である。井戸の内部では定常シュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi \tag{1}$$

を満たす。$k = \sqrt{2mE}/\hbar$ と置くと一般解は $A\sin kx + B\cos kx$ である。井戸の中心に関する偶奇性で解を分けると、偶関数の境界条件は $\cos(ka/2) = 0$、奇関数の境界条件は $\sin(ka/2) = 0$ となる。両者を合わせて

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

を得る。区間内で規格化した固有関数は

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2/a}\cos(n\pi x/a), & n \text{ が奇数}, \\ \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a), & n \text{ が偶数}, \end{cases} \quad (|x| < a/2), \tag{3}$$

であり、区間外では $\psi_n(x) = 0$ である。従って後で使う基底状態と第一励起状態は

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}, \quad E_g = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}; \qquad e(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}, \quad E_e = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}. \tag{4}$$

g は偶関数、e は奇関数である。

[2] 2 粒子の軌道状態

$g_1 = g(x_1)$、$e_1 = e(x_1)$ などと略記する。粒子を交換する演算子は $x_1 \leftrightarrow x_2$ を行うので、基底状態どうしと第一励起状態どうしは対称で、混合状態には対称・反対称の二通りがある。規格化された 4 状態は

$$\Phi_{gg} = g_1 g_2, \qquad \Phi_{ee} = e_1 e_2, \tag{5}$$

$$\Phi_+ = \frac{g_1 e_2 + e_1 g_2}{\sqrt{2}}, \qquad \Phi_- = \frac{g_1 e_2 - e_1 g_2}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

前 3 つは粒子交換に対称、Φ_- は反対称である。直交する一粒子状態から作られているため、混合状態の係数 $1/\sqrt{2}$ が規格化を与える。

[3] 全スピンの固有状態

$S_z = s_{1z} + s_{2z}$ の固有状態を作る。三重項は

$$|1,1\rangle = |\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, \qquad |1,0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \qquad |1,-1\rangle = |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2, \tag{7}$$

で、S^2 の固有値は $S(S+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$、S_z の固有値は $M\hbar$ である。残る状態は一重項

$$|0,0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \tag{8}$$

であり、$S^2 = 0$、$S_z = 0$ である。交換に対して三重項は対称、一重項は反対称となる。

[4] フェルミ粒子の全波動関数とエネルギー

全波動関数は粒子交換で反対称でなければならない。従って、対称軌道には一重項スピン、反対称軌道には三重項スピンを組み合わせる。6 状態を

$$\Psi_1 = \Phi_{gg}|0,0\rangle, \qquad \Psi_2 = \Phi_{ee}|0,0\rangle, \qquad \Psi_3 = \Phi_+|0,0\rangle, \tag{9}$$

$$\Psi_4 = \Phi_-|1,1\rangle, \qquad \Psi_5 = \Phi_-|1,-1\rangle, \qquad \Psi_6 = \Phi_-|1,0\rangle \tag{10}$$

と書ける。相互作用がないとき全エネルギーは軌道エネルギーの和なので

$$E_1 = 2E_g = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}, \quad E_2 = 2E_e = \frac{4\pi^2\hbar^2}{ma^2}, \quad E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = E_g + E_e = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}. \tag{11}$$

[5] 粒子間距離の二乗の期待値

井戸の外で $g = e = 0$ として積分を全実数に拡張してよい。偶奇性から

$$\int xg^2\,\mathrm{d}x = \int xe^2\,\mathrm{d}x = \int x^2ge\,\mathrm{d}x = 0, \tag{12}$$

一方、$\int xge\,\mathrm{d}x = C$ である。積状態 Φ_{gg} では x_1x_2 の期待値は $\langle x\rangle_g^2 = 0$ で、$x_1^2 + x_2^2$ の期待値は $2A$ となる。Φ_{ee} も同様に $2B$ である。

混合状態では $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ を使う。対称状態 Φ_+ では、二つの対角項が $A+B$ を与え、交差項は

$$\langle\Phi_+|x_1x_2|\Phi_+\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle ge|x_1x_2|ge\rangle + \langle eg|x_1x_2|eg\rangle + 2\langle ge|x_1x_2|eg\rangle\right) = C^2 \tag{13}$$

となる。ここで対角項は $\langle g|x|g\rangle\langle e|x|e\rangle = 0$、交差項は $\langle g|x|e\rangle^2 = C^2$ である。Φ_- では交差項の符号が逆になる。スピン因子は座標演算子に影響しないため、

$$\langle\Psi_1|(x_1 - x_2)^2|\Psi_1\rangle = 2A, \qquad \langle\Psi_2|(x_1 - x_2)^2|\Psi_2\rangle = 2B, \tag{14}$$

$$\langle\Psi_3|(x_1 - x_2)^2|\Psi_3\rangle = A + B - 2C^2, \quad \langle\Psi_j|(x_1 - x_2)^2|\Psi_j\rangle = A + B + 2C^2 \quad (j = 4,5,6). \tag{15}$$

積分を実行すると

$$A = a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right), \quad B = a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2}\right), \quad C = \frac{16a}{9\pi^2}. \tag{16}$$

これらはそれぞれ長さ二乗、長さ二乗、長さの次元を持つので、すべての期待値は長さ二乗となる。

[6] $V_0 x_1 x_2$ による一次補正

一次補正は縮退がある場合、その縮退部分空間で摂動行列を対角化して得る。$\Psi_3, \ldots, \Psi_6$ は同じ無摂動エネルギーを持つが、摂動はスピンに作用しない。よって一重項と三重項の間の行列要素はスピンの直交性でゼロであり、異なる三重項成分どうしもスピン状態の直交性で結ばれない。残る対角要素は

$$\langle \Psi_1 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_1 \rangle = 0, \qquad \langle \Psi_2 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_2 \rangle = 0, \tag{17}$$

$$\langle \Psi_3 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_3 \rangle = V_0 C^2, \qquad \langle \Psi_j | V_0 x_1 x_2 | \Psi_j \rangle = -V_0 C^2 \quad (j = 4, 5, 6). \tag{18}$$

例えば Φ_+ の期待値では、対角軌道項がパリティでゼロになり、二つの交差項から C^2 が残る。反対称軌道 Φ_- では同じ交差項に負号が付く。したがって一次までのエネルギーは

$$E_1^{(1)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m a^2}, \qquad E_2^{(1)} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{m a^2}, \tag{19}$$

$$E_3^{(1)} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} + V_0 C^2, \qquad E_j^{(1)} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} - V_0 C^2 \quad (j = 4, 5, 6). \tag{20}$$

補正の次元は $[V_0] a^2$ でエネルギーとなり、$V_0 \to 0$ で [4] の結果へ戻る。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

長さ a の棒 N 本をそれぞれ右または左に向ける。右向きを正とし、右向きの本数を n^+、左向きの本数を n^- とすると

$$n^+ + n^- = N, \qquad n = n^+ - n^-, \qquad X = an. \tag{1}$$

従って n は $-N, -N+2, \ldots, N$ の値をとる。棒の向きを一本ずつ足し合わせた終点が X である。

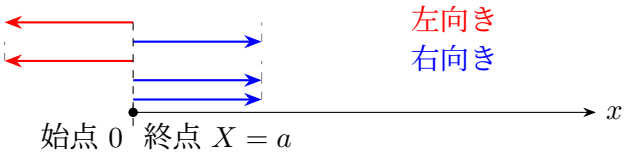


図 1: 右向き 3 本、左向き 2 本の変位を順に足した例。縦方向に並べた各矢印は、左右いずれかの変位 $\pm a$ を表す。

[1] 終点の確率とエントロピー

向きの列は各棒に二通りあるため、全微視状態数は 2^N である。終点が $X = na$ になるには

$$n^+ = \frac{N+n}{2}, \qquad n^- = \frac{N-n}{2} \tag{2}$$

でなければならず、$N-n$ が偶数である。該当する列の数は、N 個の場所から右向きの n^+ 個を選ぶ組合せ数

$$\Omega(n) = \frac{N!}{n^+!n^-!} \tag{3}$$

なので

$$P(n) = \frac{\Omega(n)}{2^N} = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{[(N+n)/2]![(N-n)/2]!}. \tag{4}$$

これは二項分布の全確率であり、許される n について $\sum_n P(n) = 1$ となる。

終点を固定した分子のエントロピーはボルツマンの式 $S = k_B \ln \Omega$ である。Stirling 近似を $n^+, n^- \gg 1$ で使うと

$$S \simeq k_B\{N\ln N - n^+\ln n^+ - n^-\ln n^-\} \tag{5}$$

$$= k_B\left\{N\ln N - \frac{N+n}{2}\ln\frac{N+n}{2} - \frac{N-n}{2}\ln\frac{N-n}{2}\right\}. \tag{6}$$

全列数 2^N は全ての終点を合わせた状態数であり、固定した終点のエントロピーにはその終点を実現する組合せ数 $\Omega(n)$ を使う。

[2] 伸長に必要な力

各微視状態のエネルギーが同じなので、固定された X でのヘルムホルツ自由エネルギーは定数から $F = -TS$ である。$n^{\pm} = (N \pm X/a)/2$ を用いてエントロピーを X で微分すると

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_T = \frac{k_B}{2a} \ln \frac{n^-}{n^+}. \tag{7}$$

従って問題の定義による張力は

$$\boxed{\tau = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_T = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{n^+}{n^-} = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{Na + X}{Na - X}}. \tag{8}$$

$0 < X < Na$ では $\tau > 0$ であり、分子を伸ばした状態を保つには右向きに引く必要がある。$X \ll Na$ では $\ln[(1+y)/(1-y)] = 2y + O(y^3)$ より

$$\boxed{\tau = \frac{k_B T}{a^2 N} X + O\left(\frac{k_B T X^3}{a^4 N^3}\right)}. \tag{9}$$

小伸長では有効ばね定数 $k_B T/(Na^2)$ に比例する復元応答となる。

[3] 外場中の分配関数と平均値

右向きと左向きの棒のエネルギーはそれぞれ $-\kappa, +\kappa$ である。一本の分配関数は $e^{\beta\kappa} + e^{-\beta\kappa} = 2\cosh(\beta\kappa)$ なので、独立な N 本について

$$Z(\beta) = (2\cosh \beta\kappa)^N, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{10}$$

平均エネルギーは $-\partial_\beta \ln Z$ から

$$\langle E \rangle = -N\kappa \tanh(\beta\kappa). \tag{11}$$

また各棒のエネルギーと変位には $E_i = -(\kappa/a)\Delta X_i$ の関係があるため、$\kappa \neq 0$ では $\langle X \rangle = -(a/\kappa)\langle E \rangle$ であり、直接数えても同じく

$$\langle X \rangle = Na \tanh(\beta\kappa) \tag{12}$$

となる。$|\kappa| \ll k_B T$ で $\tanh y = y + O(y^3)$ を使うと

$$\langle E \rangle = -\frac{N\kappa^2}{k_B T} + O\left(\frac{N\kappa^4}{(k_B T)^3}\right), \qquad \langle X \rangle = \frac{Na\kappa}{k_B T} + O\left(\frac{Na\kappa^3}{(k_B T)^3}\right). \tag{13}$$

$\kappa = 0$ でも両者の極限はゼロである。

[4] ゆらぎ

正準分布では $\partial_\beta^2 \ln Z = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ なので

$$\boxed{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = N\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa)}. \tag{14}$$

一本の棒の変位 ΔX_i は $\pm a$ を取り、平均は $a\tanh(\beta\kappa)$、二乗平均は a^2 である。従って

$$\mathrm{Var}(\Delta X_i) = a^2 - a^2 \tanh^2(\beta\kappa) = a^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa). \tag{15}$$

各棒は独立なので、終点の分散は N 本の分散を足して

$$\boxed{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = Na^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa)}. \tag{16}$$

両分散は非負で、$\kappa = 0$ ではエネルギー分散は 0、終点の分散は Na^2 である。固定した $\kappa \neq 0$ に対して $T \to 0$ とすると、両分散はゼロに近づく。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 磁場中の束縛電子

電子の電荷は $-e$ であるから、電場とローレンツ力を含む運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{u}} = -e(\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} + \dot{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}) - m\omega_0^2 \boldsymbol{u}. \tag{1}$$

時間因子 $e^{-i\omega t}$ を取り出すと $\dot{\boldsymbol{u}} = -i\omega \boldsymbol{u}$、$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\omega^2 \boldsymbol{u}$ であり、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}} = B\boldsymbol{e}_z$ より

$$m(\omega^2 - \omega_0^2)u_x + ie\omega B u_y = eE_x, \tag{2}$$

$$-ie\omega B u_x + m(\omega^2 - \omega_0^2)u_y = eE_y. \tag{3}$$

$D = m(\omega^2 - \omega_0^2)$、$\Omega = e\omega B$ とおくと

$$\begin{pmatrix} D & i\Omega \\ -i\Omega & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

行列式は $D^2 - \Omega^2$ だから、その逆行列を用いて

$$\boxed{u_x = \frac{e(DE_x - i\Omega E_y)}{D^2 - \Omega^2}, \qquad u_y = \frac{e(i\Omega E_x + DE_y)}{D^2 - \Omega^2}}. \tag{5}$$

[2] 複素比誘電率

分極は $\boldsymbol{P} = -ne\boldsymbol{u}$ である。$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}}$ と比較すると

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{ne^2 D}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)}, \qquad \gamma = \frac{ne^2\Omega}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)} = \frac{ne^3\omega B}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 D}. \tag{7}$$

最後の式は z 方向の運動方程式 $Du_z = eE_z$ から得る。条件 $\omega_0 \gg \omega > 0$、$\omega_0 \gg eB/m$ では $D < 0$ かつ $|D| > \Omega$ であり、よって

$$D^2 - \Omega^2 > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \varepsilon_{xx} > 1. \tag{8}$$

ここでは ε_{xx} と γ が実数となる近似範囲を考えている。

[3] 平面波の波動方程式

式 (3) の第 1 式を $\boldsymbol{k}$ と外積し、第 2 式で $\boldsymbol{H}_0$ を消去すると

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) = -\mu_0\varepsilon_0\omega^2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}_0. \tag{9}$$

ベクトル恒等式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ を使い、$c^{-2} = \mu_0\varepsilon_0$ とすれば

$$\boxed{(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k} - |\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}_0 = 0}. \tag{10}$$

[4] 固有モード

$\boldsymbol{k} = k_z \boldsymbol{e}_z$ とする。x, y 成分は

$$\begin{pmatrix} (\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2 & i(\omega/c)^2\gamma \\ -i(\omega/c)^2\gamma & (\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{pmatrix} = 0. \tag{11}$$

非零の解には行列式がゼロであることが必要だから

$$\left[(\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2\right]^2 - \left[(\omega/c)^2\gamma\right]^2 = 0. \tag{12}$$

$0 < \gamma < \varepsilon_{xx}$ より二つの正の波数は

$$\boxed{k_\pm = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm \gamma}}, \qquad k_+ > k_- > 0. \tag{13}$$

$k_z = k_+$ のとき x 成分の式から $E_{0,y} = -iE_{0,x}$、$k_z = k_-$ では $E_{0,y} = iE_{0,x}$ となる。$|\boldsymbol{E}_{0\pm}| = E$ で規格化すると

$$\boxed{\boldsymbol{E}_{0+} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_{0-} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}}. \tag{14}$$

z 成分の式は $(\omega/c)^2\varepsilon_{zz}E_{0,z} = 0$ を与える。この振動子モデルの条件では $\varepsilon_{zz} > 0$ なので $E_{0,z} = 0$ である。

[5] 円偏光モードの時間変化

正の波数側モードについて

$$\boldsymbol{E}_+(z,t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_+ z - i\omega t} \tag{15}$$

である。$z = 0$ で実部を取れば

$$\Re E_{+,x}(0,t) = \frac{E}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \qquad \Re E_{+,y}(0,t) = -\frac{E}{\sqrt{2}}\sin\omega t. \tag{16}$$

二成分は同じ振幅で位相が $\pi/2$ ずれているので、合成電場の先端は円を描く。

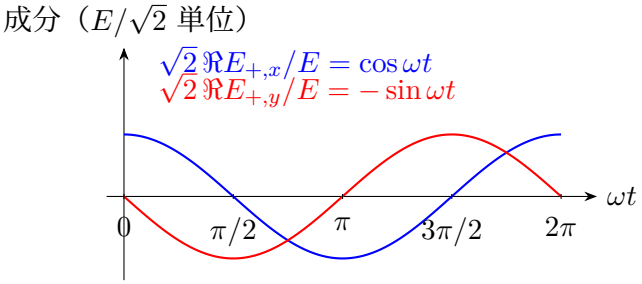


図 1: 二つの直交成分の位相差。

[6] 媒質を通過した偏光面

境界で x 偏光になるよう、二つの固有モードを等しい振幅で重ねる。

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \frac{\boldsymbol{E}_{0+}}{\sqrt{2}} e^{ik_+ z - i\omega t} + \frac{\boldsymbol{E}_{0-}}{\sqrt{2}} e^{ik_- z - i\omega t}. \tag{17}$$

$z=0$ では $\boldsymbol{E}_{0+}+\boldsymbol{E}_{0-} = \sqrt{2}(E,0,0)^{\mathsf{T}}$ なので条件 (5) を満たす。$\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$、$\delta = (k_+ - k_-)z/2$ と置くと、複素振幅は

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E \begin{pmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\bar{k}z - i\omega t}. \tag{18}$$

従って $z = l$ では

$$\boxed{\boldsymbol{F} = E \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta = \frac{(k_+ - k_-)l}{2}}. \tag{19}$$

実電場は共通の伝搬位相を持つ直線偏光で、その振動方向が x 軸から θ 回転している。

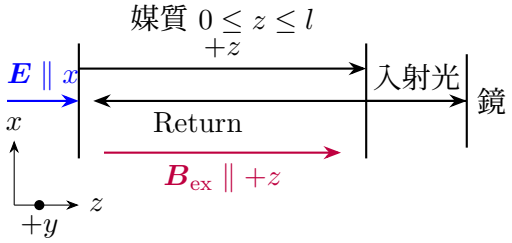


図 2: 磁場の向きを保ったまま鏡で戻す往復伝搬。媒質内の偏光面の回転角は θ である。

[7] 鏡による往復

鏡は偏光を反射するが、外部磁場 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}$ は反転しない。[4] の固有方程式は k_z^2 で決まるため、戻り光では同じ固定 x, y 座標の固有ベクトル $\boldsymbol{E}_{0\pm}$ に、それぞれ $k_z = -k_\pm$ を対応させる。鏡の反射係数を両成分に共通な r とすると、$z = l$ から $z = 0$ へ戻る各成分にも $e^{i(-k_\pm)(0-l)} = e^{ik_\pm l}$ の位相が加わる。従って戻った電場は

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ret}}(0,t) = \frac{r}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{E}_{0+} e^{2ik_+ l} + \boldsymbol{E}_{0-} e^{2ik_- l} \right) e^{-i\omega t} = rE \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{2i\bar{k}l - i\omega t}. \tag{20}$$

このように往路と復路の相対位相差が加算され、x 軸に対する最終角は

$$\boxed{\theta_{\mathrm{round}} = 2\theta = (k_+ - k_-)l}. \tag{21}$$

これは媒質表面での反射を無視し、鏡の反射自体が偏光面の向きを変えないという問題の設定による。鏡までの真空中の往復位相も両成分に共通なので、回転角には影響しない。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 電子線の加速電圧

相対論的補正を無視すると電子の運動量は $p = \sqrt{2meV}$ であり、ド・ブロイ関係 $p = h/\lambda$ より

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2}. \tag{1}$$

$\lambda = 0.01\,\mathrm{nm} = 1.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ を代入すると

$$V = \frac{(6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s})^2}{2(9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})(1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(1.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})^2} = 1.5 \times 10^4\,\mathrm{V}. \tag{2}$$

[2] 有限正方格子の散乱振幅

左下の格子点を原点に取ると、原子位置は $\boldsymbol{r}_{n_x,n_y} = (an_x, an_y, 0)$ である。従って振幅は二つの有限和に分離する。

$$A(\boldsymbol{K}, N_x, N_y) = f \sum_{n_x=0}^{N_x-1} e^{-iaK_x n_x} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} e^{-iaK_y n_y} \tag{3}$$

$$= fL(K_x, N_x)L(K_y, N_y), \tag{4}$$

$$L(K, N) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-iaKn} = e^{-iaK(N-1)/2} \frac{\sin(NaK/2)}{\sin(aK/2)}. \tag{5}$$

分母がゼロとなる点では極限を取る。したがって

$$|L(K, N)|^2 = \left[\frac{\sin(NaK/2)}{\sin(aK/2)}\right]^2, \tag{6}$$

また $N = 1, 2, 3$ ではそれぞれ 1、$4\cos^2(aK/2)$、$[1 + 2\cos(aK)]^2$ となる。

[3] 単原子三角格子の回折

図 3 の基本格子ベクトルは

$$\boldsymbol{a}_1 = a\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = a\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}. \tag{7}$$

逆格子は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$ で定めるから

$$\boxed{\boldsymbol{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}}. \tag{8}$$

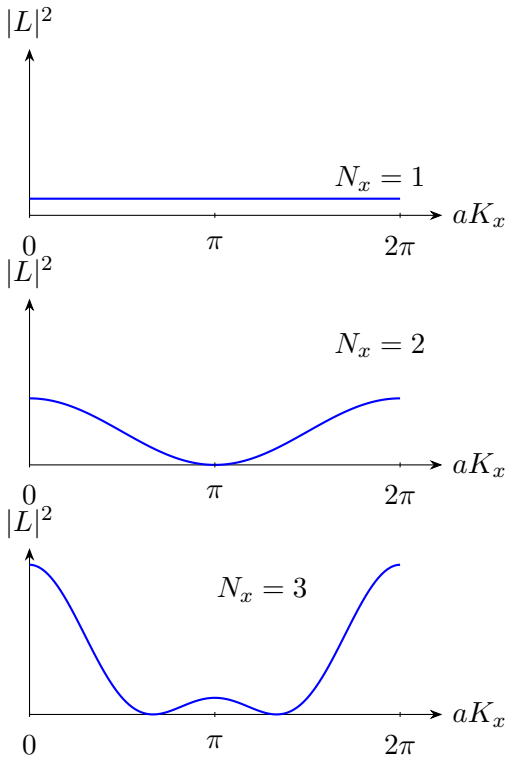


図 1: $|L(K_x, N_x)|^2$ の一周期。各パネルの縦軸は実際の強度である。

面内の原子位置 $\boldsymbol{r} = n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2$ を散乱振幅の位相因子 $e^{-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}$ に代入すると、二方向の有限等比和が得られる。多数の単位胞で双方の和が強め合う条件は $\boldsymbol{K}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{a}_i = 2\pi m_i$（$m_i$ は整数）である。したがって散乱ベクトルの面内成分は逆格子ベクトル $\boldsymbol{G} = m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2$ であり、

$$|\boldsymbol{G}|^2 = \frac{16\pi^2}{3a^2}(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2). \tag{9}$$

括弧内は $(m_1 - m_2)^2 + 3m_1m_2$ とも書けるので、3 で割った余りは 0 か 1 であり、値 2 は取らない。指数 $(1,0)$、$(1,1)$、$(2,0)$ でそれぞれ $1, 3, 4$ となるため、最小の三つの正の値は $1, 3, 4$ である。垂直入射では $\boldsymbol{k}$ は面に垂直で、$\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{k}'$ の面内成分なので、回折角 θ（入射・散乱波数ベクトル間の全角）には

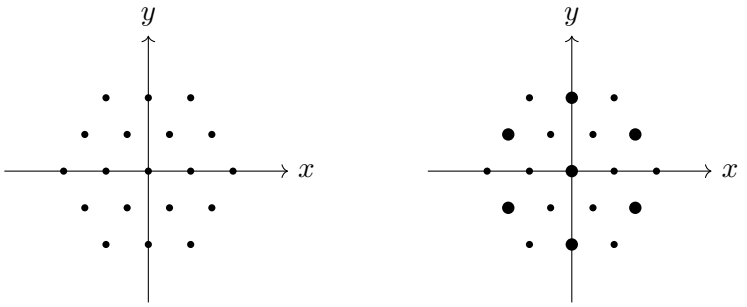
$$|\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{k}'|\sin\theta = k\sin\theta, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10}$$

が成り立つ。三殻がいずれも前方の検出面に届く条件は、最大の $|\boldsymbol{G}|$ に対して $4\lambda/(\sqrt{3}a) < 1$、すなわち $0 < \lambda/a < \sqrt{3}/4$ である。この範囲で、小さい方から三つの角は

$$\boxed{\theta_1 = \sin^{-1}\!\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{3}a}\right), \qquad \theta_2 = \sin^{-1}\!\left(\frac{2\lambda}{a}\right), \qquad \theta_3 = \sin^{-1}\!\left(\frac{4\lambda}{\sqrt{3}a}\right)}. \tag{11}$$

散乱が可能な範囲で各回折角は $0 < \theta < \pi/2$ である。小角度では $\theta_1 \simeq 2\lambda/(\sqrt{3}a)$、$\theta_2 \simeq 2\lambda/a$、$\theta_3 \simeq 4\lambda/(\sqrt{3}a)$ となる。

各逆格子殻には六つの等価なベクトルがあるため、平面ディテクタ上では入射方向を中心とする三つの六回対称なスポット列となる。小角近似では検出面上の半径が θ_j に比例し、その比は $1 : \sqrt{3} : 2$ である。第 1 殻と第 3 殻は x 軸から 60° おきに並び、第 2 殻はそれらから 30° 回転している。



(a) 位置（$\theta_1, \theta_2, \theta_3$）　(b) 基底強度（面積比 1 : 3 : 1）

図 2: 小角近似での三殻の回折位置。(b) は [4] で求めるハニカム基底の相対強度を点の面積で表す。

[4] ハニカム構造の基底干渉

図 4 の二原子基底の相対位置を $\boldsymbol{\tau} = (2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)/3$ とする。$f_A = f$、$f_B = 2f$ と選べば、逆格子点 $\boldsymbol{G} = m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2$ での基底振幅は

$$F_{\mathrm{basis}} = f_A + f_B e^{-i\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}} = f\left[1 + 2e^{-i(2\pi/3)(2m_1+m_2)}\right]. \tag{12}$$

従って単位胞数による共通因子を除くと

$$I_{\mathrm{basis}} = |F_{\mathrm{basis}}|^2/|f|^2 = 5 + 4\cos\!\left(\frac{2\pi}{3}(2m_1 + m_2)\right). \tag{13}$$

各殻のすべての指数について $t = 2m_1 + m_2$ と置くと、$t^2 \equiv m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 \pmod 3$ である。したがって第一・第三殻では $t \not\equiv 0 \pmod 3$、第二殻では $t \equiv 0 \pmod 3$ となる。上の余弦は順に $-1/2, 1, -1/2$ であり、各殻のどのピークも強度 $3, 9, 3$ をもつ。その比は

$$\boxed{I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 3 : 1}. \tag{14}$$

第二殻のピークは他の二殻より 3 倍強い。

[5] 面直積層による干渉

隣接層の間隔を d、積層数を N_z とする。全ての層で同じ面内原子配置を持ち、散乱ベクトルの垂直成分を $c = K_z$ とすれば、各層の位相差は cd である。振幅には

$$S_{N_z}(c) = \sum_{j=0}^{N_z-1} e^{-icjd} = e^{-icd(N_z-1)/2}\frac{\sin(N_z cd/2)}{\sin(cd/2)} \tag{15}$$

が掛かる。$cd = 2\pi m$（m 整数）では各層が同位相となり、$|S_{N_z}|^2 = N_z^2$ である。この条件の近くの最初の零点は $cd = 2\pi m \pm 2\pi/N_z$ なので、ピーク幅は c について $1/(N_z d)$ の程度になる。一方、層条件からの位相のずれを固定すると

$$\frac{|S_{N_z}(c)|^2}{N_z^2} \le \frac{1}{N_z^2 \sin^2(cd/2)}. \tag{16}$$

従って $N_z|\sin(cd/2)| \gg 1$ なら、強め合うピークに比べて強度が小さい。有限層では、層条件から外れた振幅が一般に厳密にゼロになるわけではない。

垂直入射では $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$ であり、面内回折ベクトルを $\boldsymbol{G}$ とすると、弾性散乱の前方解は

$$\boldsymbol{k}' = (\boldsymbol{G}, \sqrt{k^2 - |\boldsymbol{G}|^2}), \qquad c = k'_z - k = \sqrt{k^2 - |\boldsymbol{G}|^2} - k. \tag{17}$$

非零の $\boldsymbol{G}$ に対するこの c が層条件のピーク幅以上に外れると、層からの散乱は弱め合い、回折ピークが抑えられる。垂直入射でも層条件に近い場合には抑制されないが、問題文の消失は層条件から外れた場合に対応する。

傾斜によって層条件と弾性散乱を両立できる具体例として、$0 < |\boldsymbol{G}| < 2k$ のとき、入射の面内成分を $-\boldsymbol{G}/2$ に取ると

$$\boldsymbol{k} = \left(-\frac{\boldsymbol{G}}{2}, \sqrt{k^2 - \frac{|\boldsymbol{G}|^2}{4}} \right), \qquad \boldsymbol{k}' = \left(\frac{\boldsymbol{G}}{2}, \sqrt{k^2 - \frac{|\boldsymbol{G}|^2}{4}} \right). \tag{18}$$

両波数の大きさは k で、$\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{G}, 0)$ となる。従って $c = 0$、すなわち $m = 0$ の層条件が満たされ、全層が強め合う。面直方向からの入射の傾斜角は

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\boldsymbol{G}|}{2k} \right) \simeq \frac{|\boldsymbol{G}|}{2k} \qquad (|\boldsymbol{G}|/k \ll 1) \tag{19}$$

であるため、小角回折の領域では小さな傾斜でピークが現れる。これは選んだ $\boldsymbol{G}$ に対応する方位と角度の構成である。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 質点の速さ

頂点を位置エネルギーの基準にする。角度 θ まで降りたときの高さの減少は $R(1-\cos\theta)$ なので、力学的エネルギー保存から

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta), \qquad \boxed{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}}. \tag{1}$$

[1.2] 質点の離脱

半径方向内向きを正に取ると、接触中は $mg\cos\theta - N = mv^2/R$ である。離脱時は $N=0$ だから、$v_c^2 = gR\cos\theta_{c1}$。これとエネルギー式を合わせると

$$2(1-\cos\theta_{c1}) = \cos\theta_{c1}, \qquad \boxed{\cos\theta_{c1} = \frac{2}{3}}, \quad \boxed{v_{c1} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}}. \tag{2}$$

[2.1] 一様球の慣性モーメント

球の密度は $\rho_m = 3m/(4\pi r^3)$ である。球座標で極角を ϑ とすると

$$I = \int (s\sin\vartheta)^2 \rho_m \, s^2 \sin\vartheta \, ds \, d\vartheta \, d\phi \tag{3}$$

$$= \rho_m \left(\int_0^r s^4 ds\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta\right)(2\pi) = \boxed{\frac{2}{5}mr^2}. \tag{4}$$

[2.2] 転がり条件

球中心の軌道半径は $R+r$ である。接触点の速度がゼロだから、$v = r\omega$（角速度の大きさ）となる。

[2.3] 転がる球の離脱

重心の位置エネルギー減少は $mg(R+r)(1-\cos\theta)$ である。$I = 2mr^2/5$ および $\omega = v/r$ を使うと

$$mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2, \quad v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta). \tag{5}$$

離脱時の半径方向の式は $mg\cos\theta_{c2} = mv_{c2}^2/(R+r)$ である。二式を連立して

$$\boxed{\cos\theta_{c2} = \frac{10}{17}}, \qquad \boxed{v_{c2} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r)}}. \tag{6}$$

[2.4] 離脱角の違い

同じ角度 θ での向心加速度を、各中心軌道の半径を使って比較すると

$$\text{質点：}\quad \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta), \qquad \text{球：}\quad \frac{v^2}{R+r} = \frac{10}{7}g(1-\cos\theta). \tag{7}$$

転がる球では位置エネルギーの一部が回転エネルギーに入るため、向心加速度の係数が小さい。接触中の法線抗力は、質点では $N = m[g\cos\theta - v^2/R]$、球では $N = m[g\cos\theta - v^2/(R+r)]$ であり、球のほうが同じ角度で大きい。そのため球はより大きな角度まで接触を保つ。実際、$10/17 < 2/3$ より $\theta_{c2} > \theta_{c1}$ である。

[3.1] 撃力の作用高さ

撃力の作用時間を十分短く取り、その間の重力と接触摩擦の力積を無視する。頂点で水平方向に打つので、支持面へ向かう法線方向の衝突も生じない。この局所的な撃力モデルでは、並進の力積収支から $mv_0 = P$、重心まわりの角力積収支から $I\omega_0 = P(h-r)$ となる。接触点の水平速度がゼロとなるためには、撃力直後の重心速度 $v_0 = P/m$ と角速度 ω_0 が $v_0 = r\omega_0$ を満たす必要がある。従って

$$\omega_0 = \frac{P(h-r)}{I} = \frac{5P(h-r)}{2mr^2}. \tag{8}$$

これを転がり条件に代入すると

$$\boxed{h = \frac{7}{5}r}, \qquad v_0 = \frac{P}{m}, \quad \omega_0 = \frac{P}{mr}. \tag{9}$$

[3.2] 撃力後の離脱

撃力後は力学的エネルギーが保存される。最初の並進・回転運動エネルギーは $(7/10)P^2/m$ なので

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta) + \frac{P^2}{m^2}. \tag{10}$$

離脱条件 $v_c^2 = g(R+r)\cos\theta_{c3}$ と連立すると

$$\boxed{\cos\theta_{c3} = \frac{10}{17} + \frac{7P^2}{17m^2g(R+r)}}, \qquad \boxed{v_{c3} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r) + \frac{7P^2}{17m^2}}}. \tag{11}$$

この離脱角が実現するには、右辺が 0 以上 1 以下でなければならない。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 電場と電位

ガウスの法則より、半径 a より内側では包む電荷がなく、球殻間だけで電場がある。外側では全電荷がゼロである。電位は無限遠をゼロとして積分する。

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a), \\ Q_0/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & (a < r < b), \\ 0 & (r > b), \end{cases} \quad \phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} 1/a - 1/b & (r < a), \\ 1/r - 1/b & (a \le r \le b), \\ 0 & (r > b). \end{cases} \tag{1}$$

[1.2] 静電容量

球殻間の電位差は $\Delta\phi = Q_0(1/a - 1/b)/(4\pi\varepsilon_0)$ であるから

$$C = \frac{Q_0}{\Delta\phi} = \boxed{\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}}. \tag{2}$$

[1.3] 誘電体で満たした場合のエネルギー

誘電率 ε の媒質で満たすと $C_\varepsilon = 4\pi\varepsilon ab/(b-a)$ である。電荷を Q_0 に保つので

$$U = \frac{Q_0^2}{2C_\varepsilon} = \boxed{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}. \tag{3}$$

[1.4] 薄い誘電層による容量変化

真空層 $a < r < b - d$ と誘電層 $b - d < r < b$ は直列である。

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-d}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b-d} - \frac{1}{b}\right) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{d}{4\pi b^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) + O(d^2). \tag{5}$$

$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 ab/(b-a)$ を使って逆数を展開すると

$$\boxed{C = C_0 + \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon}\frac{a^2}{(b-a)^2}d + O(d^2)}. \tag{6}$$

[2.1] 定常電流とジュール熱

媒質内の電場は $E_r = Q_0/(4\pi\varepsilon r^2)$ なので、半径によらず電流は

$$I = 4\pi r^2 \sigma E_r = \frac{\sigma Q_0}{\varepsilon} > 0. \tag{7}$$

電位差を電流で割れば抵抗が得られる。

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}, \qquad \boxed{\dot{Q}_{\mathrm{heat}} = I^2\mathcal{R} = \frac{\sigma Q_0^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}. \tag{8}$$

[2.2] 電源を外した後

時刻 t の内側球殻の電荷を $Q(t)$ とする。[2.1] の電流式に現在の電荷を入れると $I(t) = \sigma Q(t)/\varepsilon$ となる。外向きの電流は内側球殻の電荷を減らすので、電荷保存則から $dQ/dt = -I(t) = -\sigma Q(t)/\varepsilon$ である。初期条件 $Q(0) = Q_0$ を使うと

$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/\varepsilon}. \tag{9}$$

瞬時電力は [2.1] の Q_0 を $Q(t)$ に置き換えたものなので

$$W(t) = \int_0^t \frac{\sigma Q(t')^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) dt' = \boxed{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - e^{-2\sigma t/\varepsilon}\right)}. \tag{10}$$

[2.3] 静電エネルギーとの関係

$t \to \infty$ では残留電荷がゼロとなり、発生熱は $W(\infty) = Q_0^2(1/a - 1/b)/(8\pi\varepsilon)$ となる。これは [1.3] の初期静電エネルギーに等しい。ここでは電源が外れており、媒質の熱以外にエネルギーが移らないためである。

[3] 二媒質境界の面電荷

定常状態では各領域の電流密度が $I/(4\pi r^2)$ である。従って境界の両側の電場は $E_i = I/(4\pi\sigma_i r_0^2)$。境界面法線を外向きに取ると、自由面電荷密度は法線方向の $\boldsymbol{D}$ の跳びで

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{s}} = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{I}{4\pi r_0^2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)}. \tag{11}$$

負値の場合は、境界に負の自由電荷が蓄積している。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 引力型デルタポテンシャル

$x \neq 0$ では $-\hbar^2\phi''/(2m) = E\phi$ である。負の固有値に対する減衰解を $\phi(x) = Ne^{-\xi|x|}$、$E = -\hbar^2\xi^2/(2m)$ と置く。原点を含む微小区間でシュレーディンガー方程式を積分すると

$$\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = -\frac{2mv}{\hbar^2}\phi(0). \tag{1}$$

左辺は $-2N\xi$ だから $\xi = mv/\hbar^2$。規格化条件より $1 = N^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi|x|}dx = N^2/\xi$ であり

$$\boxed{N = \sqrt{\frac{mv}{\hbar^2}}}, \qquad \boxed{\xi = \frac{mv}{\hbar^2}}, \qquad \boxed{E = -\frac{mv^2}{2\hbar^2}}. \tag{2}$$

[2.1] 試行状態のエネルギー期待値

二つの局在配置を $\Phi_1 = \phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2)$、$\Phi_2 = \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_2 + R/2)$ と置く。問題文の定義は $\langle\Phi_1|H|\Phi_1\rangle = \langle\Phi_2|H|\Phi_2\rangle = A$、$\langle\Phi_2|H|\Phi_1\rangle = B$、$\langle\Phi_2|\Phi_1\rangle = S$ である。対角規格化は 1 なので

$$\boxed{E(c_1, c_2) = \frac{A(c_1^2 + c_2^2) + 2Bc_1c_2}{c_1^2 + c_2^2 + 2Sc_1c_2}}. \tag{3}$$

[2.2] 変分方程式

エネルギーの停留条件を、分母を含めて変分する。すなわち、$E(c_1, c_2)$ の候補値 E について

$$\mathcal{L} = A(c_1^2 + c_2^2) + 2Bc_1c_2 - E(c_1^2 + c_2^2 + 2Sc_1c_2) \tag{4}$$

の偏微分をゼロと置く。両式を 2 で割ると

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & S \\ S & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}. \tag{5}$$

交差項の係数は各行列要素そのものではなく、二つの対称な交差項の和となるため、行列の非対角要素は $B - ES$ である。

[2.3] 固有値と空間波動関数

両行列は交換対称なので、固有ベクトルは $(1, 1)^T$ または $(1, -1)^T$ である。各ベクトルを同じ符号の分子・分母に代入すると

$$E_+ = \frac{A + B}{1 + S}, \quad (c_1, c_2) \propto (1, 1), \qquad E_- = \frac{A - B}{1 - S}, \quad (c_1, c_2) \propto (1, -1). \tag{6}$$

従って規格化を除く空間波動関数は

$$\boxed{\Phi_{\pm}(x_1, x_2) = \phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) \pm \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_2 + R/2)}. \tag{7}$$

粒子交換 $x_1 \leftrightarrow x_2$ で Φ_+ は対称、Φ_- は反対称となる。

[2.4] スピンを含むフェルミ状態

二粒子フェルミ状態はスピンと軌道の積全体が反対称でなければならない。α, β をそれぞれスピン上向き・下向きの状態、ω_i を粒子 i のスピン座標とする。スピン一重項 $\chi_{00} = (\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) - \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2))/\sqrt{2}$ は反対称なので、Φ_+ と組み合わせる。三重項は対称なので、Φ_- と組み合わせる。よって全状態と近似エネルギーは

$$\boxed{\Phi_+\chi_{00}, \quad E_+}, \tag{8}$$

$$\boxed{\Phi_-\alpha(\omega_1)\alpha(\omega_2), \quad E_-}, \tag{9}$$

$$\boxed{\Phi_- \frac{\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) + \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2)}{\sqrt{2}}, \quad E_-}, \tag{10}$$

$$\boxed{\Phi_-\beta(\omega_1)\beta(\omega_2), \quad E_-}. \tag{11}$$

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 配置数とエントロピー

N 個の分子を M 個のセルのうち異なる N 個に置くので、配置数は

$$W = \binom{M}{N} = \frac{M!}{N!(M-N)!}. \tag{1}$$

Stirling 近似を使うと

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln W && (2)\\ &= k_B\{M\ln M - N\ln N - (M-N)\ln(M-N)\} && (3)\\ &= -Mk_B\left[\phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right], \qquad \phi = \frac{N}{M}. && (4) \end{aligned}$$

[1.2] 圧力と理想気体との比較

相互作用がないため $F_0 = -TS$ である。v を一定に保って V を変えると、$M = V/v$ かつ $\phi = vN/V$ も変わる。$f(\phi) = \phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)$ と置けば

$$F_0 = \frac{k_BTV}{v}f(\phi), \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial V}\right)_N = -\frac{\phi}{V}. \tag{5}$$

従って

$$\begin{aligned} p_0 &= -\left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)_{T,N} = -\frac{k_BT}{v}\left[f(\phi) - \phi f'(\phi)\right] && (6)\\ &= -\frac{k_BT}{v}\ln(1-\phi) = \boxed{-\frac{k_BT}{v}\ln\left(1-\frac{vN}{V}\right)}. && (7) \end{aligned}$$

$0 < \phi < 1$ では対数の展開から

$$p_0 = \frac{k_BT}{v}\left(\phi + \frac{\phi^2}{2} + \cdots\right) = \frac{k_BNT}{V} + \frac{k_BTvN^2}{2V^2} + \cdots. \tag{8}$$

希薄極限の一次項は $p_{\mathrm{id}} = k_BNT/V$ に一致する。有限密度ではセルの二重占有が禁じられているため、自由に使える空きセルが減って圧力は理想気体より大きくなる。

[2.1] 平均場化学ポテンシャル

[1.1] のエントロピーと与えられた平均場エネルギーより

$$F(\phi) = -\frac{1}{2}Mz\alpha\phi^2 + Mk_BT\left[\phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right]. \tag{9}$$

$N = M\phi$ なので、M を固定したまま $\mu = (\partial F/\partial N)_T = M^{-1}(\partial F/\partial\phi)_T$ を計算すると

$$\boxed{\mu(\phi) = -\alpha z\phi + k_B T\,[\ln\phi - \ln(1-\phi)]}. \tag{10}$$

第一項は近接分子間の引力による寄与、対数項は占有数の制約によるエントロピーの寄与である。

[2.2] 化学ポテンシャルが単調増加する温度

$$\mu'(\phi) = -\alpha z + \frac{k_B T}{\phi(1-\phi)}. \tag{11}$$

$0 < \phi < 1$ における $\phi(1-\phi)$ の最大値は $1/4$ である。よって $\mu'(\phi) \geq 0$ が全域で成り立つ条件は

$$\boxed{T \geq T_c \equiv \frac{\alpha z}{4k_B}}. \tag{12}$$

$T > T_c$ では導関数は常に正であり、$T = T_c$ では $\phi = 1/2$ の一点だけでゼロ、それ以外では正である。従って臨界温度でも $\mu(\phi)$ は区間全体で厳密に増加する。

[2.3] 三つの密度と相分離

$T < T_c$ では $\mu'(\phi) = 0$ となる密度が二つあり、その間で μ は減少する。この S 字形の曲線では、極小値と極大値の間のある化学ポテンシャルに対し、同じ μ を与える密度が三つ現れる。同じ大きさ M の二領域に粒子を $N + \delta N$ と $N - \delta N$ だけ分けたとき、均等な配置との差は

$$F(N+\delta N) + F(N-\delta N) - 2F(N) = F''(N)(\delta N)^2 + O((\delta N)^4) \tag{13}$$

である。各 F は同じ M, T で評価する。したがって安定な一様相では $F''(N) = \partial\mu/\partial N \geq 0$ が必要である。中央の枝では $\partial\mu/\partial N = M^{-1}\mu'(\phi) < 0$ となり、粒子を偏らせると自由エネルギーが下がるため、この安定性条件に反する。

安定な平衡では、組成に応じて低密度相と高密度相に分かれることがある。$g(\phi) = F(\phi)/M$ をセルあたりの自由エネルギーとすれば、共存密度 ϕ_g, ϕ_l は

$$g'(\phi_g) = g'(\phi_l) = \mu_{\mathrm{coex}}, \qquad g(\phi_l) - g(\phi_g) = \mu_{\mathrm{coex}}(\phi_l - \phi_g) \tag{14}$$

を満たす。第一式は両相の化学ポテンシャルの等値、第二式は二点を結ぶ直線の傾きが共通の接線勾配に等しいことを表す。固定セル体積 v では圧力は $p = (\phi\mu - g)/v$ なので、二式を合わせると圧力も等しい。第二式を積分形に直すと $\int_{\phi_g}^{\phi_l}[\mu(\phi) - \mu_{\mathrm{coex}}]\,d\phi = 0$ となり、Maxwell の等面積則を得る。これが液体と気体の相分離に対応する。三つの解は三相が同時に共存することを意味せず、両端の局所的に安定な枝と中央の不安定枝を表している。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 二準位系の速度方程式

上準位から下準位への遷移は自然放出と誘導放出、下準位から上準位への遷移は誘導吸収である。よって

$$\frac{dN_1}{dt} = (A + BW(\omega_0))N_2 - BW(\omega_0)N_1, \tag{1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = BW(\omega_0)N_1 - (A + BW(\omega_0))N_2. \tag{2}$$

両式の和はゼロであり、全原子数密度 $N_1 + N_2$ が保存する。

[1.2] 定常状態と占有数比

定常状態では

$$BW(\omega_0)(N_1 - N_2) = AN_2. \tag{3}$$

従って

$$\boxed{W(\omega_0) = \frac{AN_2}{B(N_1 - N_2)}}, \qquad \frac{N_2}{N_1} = \frac{BW(\omega_0)}{A + BW(\omega_0)} < 1. \tag{4}$$

自然放出があるため、二準位系をこの放射場だけで駆動しても上準位の占有数は下準位を超えない。

[2.1] 空洞内の電磁波モード数

一辺 d の立方体に周期境界条件を置くと、許される波数は $\boldsymbol{k} = (2\pi/d)\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^3$）である。$|\boldsymbol{k}| \leq \omega/c$ を満たす格子点の数を、球の体積で近似する。各モードに横偏光が二つあるので

$$N(\omega) = 2\frac{d^3}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 = \boxed{\frac{d^3\omega^3}{3\pi^2c^3}}. \tag{5}$$

[2.2] モード密度と Planck 分布

単位体積・単位角周波数あたりのモード数は

$$D(\omega) = \frac{1}{d^3}\frac{dN}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}. \tag{6}$$

これに 1 モードあたりの平均エネルギーを掛ければ

$$W_{\mathrm{eq}}(\omega) = D(\omega)\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_BT)} - 1} = \boxed{\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_BT)} - 1}}. \tag{7}$$

[2.3] Einstein 係数と共鳴周波数

熱平衡では $N_2/N_1 = e^{-\hbar\omega_0/(k_B T)}$ である。[1.2] の定常式を用いると

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{N_1}{N_2} - 1\right) W_{\mathrm{eq}}(\omega_0) = \left(e^{\hbar\omega_0/(k_B T)} - 1\right) W_{\mathrm{eq}}(\omega_0). \tag{8}$$

Planck 分布を代入して温度依存性が消え、

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}}. \tag{9}$$

[3.1] 三準位系の速度方程式

図の矢印に沿って、ポンプ遷移 $1 \leftrightarrow 3$、信号遷移 $1 \leftrightarrow 2$、および $3 \to 2$ の緩和を数えると

$$\frac{dN_1}{dt} = -(P+L)N_1 + (A+L)N_2 + (A'+P)N_3, \tag{10}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = LN_1 - (A+L)N_2 + CN_3, \tag{11}$$

$$\frac{dN_3}{dt} = PN_1 - (A'+P+C)N_3. \tag{12}$$

三式の和はゼロで、$N_1 + N_2 + N_3$ が保存する。遷移図は次の通りである。

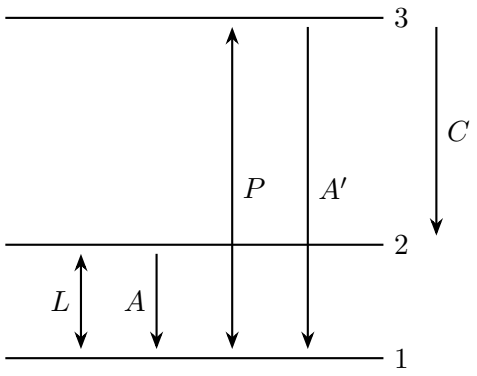


Figure 1: 三準位系で考える遷移。上下位置はエネルギーの順序を示し、準位間隔は縮尺を表さない。

[3.2] 定常占有数比と反転条件

定常状態で第 3 式から

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{P}{A'+P+C}. \tag{13}$$

これを第 2 式へ代入すると

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \frac{(A'+P+C)L + CP}{(A'+P+C)(A+L)}}. \tag{14}$$

この比が 1 を超える条件は、分子と分母の差を取って

$$P(C-A) > A(A'+C) \tag{15}$$

となる。従って反転が可能であるためには $C > A$ が必要で、そのときのポンプ率の閾値は

$$\boxed{P_c = \frac{A(A' + C)}{C - A}}, \qquad P > P_c. \tag{16}$$

$3 \to 2$ 緩和が $2 \to 1$ の自然放出より速いと、準位 2 へ原子が効率よく蓄積し、十分なポンプで準位 1 より多くなる。$P = B_{13} W_p(\omega_p)$ より反転条件は

$$W_p(\omega_p) > \frac{A(A' + C)}{B_{13}(C - A)}. \tag{17}$$

[3.3] 短波長ポンプで反転しにくい理由

短波長化に対する困難は、問で与えられた三準位系の速度方程式から説明できる。準位 $1 \leftrightarrow 2$ の角周波数を ω_l、ポンプ遷移 $1 \leftrightarrow 3$ を ω_p とする。熱平衡 Planck 分布から得た Einstein 関係をそれぞれの遷移に適用すると

$$\frac{A}{B_{12}} = \frac{\hbar \omega_l^3}{\pi^2 c^3}, \qquad \frac{A'}{B_{13}} = \frac{\hbar \omega_p^3}{\pi^2 c^3}. \tag{18}$$

Einstein の B 係数を固定すれば、自発遷移率 A, A' は対応する遷移周波数の三乗に比例して増加する。一方、反転に必要な条件は

$$C > A, \qquad P > P_c = \frac{A(C + A')}{C - A}. \tag{19}$$

実際、$C > A$ の範囲では

$$\frac{\partial P_c}{\partial A} = \frac{C(C + A')}{(C - A)^2} > 0, \qquad \frac{\partial P_c}{\partial A'} = \frac{A}{C - A} > 0. \tag{20}$$

よって信号遷移の周波数 ω_l を上げると A が増し、閾値が上がるだけでなく、固定された緩和率 C に対して最終的には $A \geq C$ となり反転自体が不可能になる。ポンプ遷移の周波数 ω_p を上げても A' が増し、必要なポンプ率が増える。この説明はポンプ場のスペクトル形状を仮定しない。

なお、ポンプ光が別途熱平衡場だと仮定した場合に限り、Wien 極限 $\hbar \omega_p \gg k_B T$ では

$$W_{p,\mathrm{eq}}(\omega_p) \simeq \frac{\hbar \omega_p^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar \omega_p / (k_B T)} \tag{21}$$

となり、高周波数での指数抑制も加わる。ただしこれは原問が置いていない追加条件である。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の伝導率テンソル

$x = \omega_c \tau$ とする。定常状態の運動方程式は

$$\boldsymbol{v} = -\frac{e\tau}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \qquad v_x = -\frac{e\tau}{m}(E_x + Bv_y), \quad v_y = -\frac{e\tau}{m}(E_y - Bv_x). \tag{1}$$

電流密度は $\boldsymbol{J} = -ne\boldsymbol{v}$ なので

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{ne^2\tau}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

行列を反転すると、問題の形式

$$\boxed{\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}} \tag{3}$$

を得る。

[1.2] Hall 係数と縦伝導率

$\boldsymbol{j} = \widetilde{\sigma}\boldsymbol{E}$ を反転し、$j_y = 0$ とすると

$$E_x = \frac{j_x}{\sigma_0}, \qquad E_y = -\frac{xj_x}{\sigma_0}. \tag{4}$$

従って

$$\boxed{R_H = -\frac{x}{\sigma_0 B} = -\frac{1}{ne}}, \qquad \boxed{\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}. \tag{5}$$

Hall 係数が負なのは、担い手の電荷が $-e$ であることを反映している。

[2.1] 電子・正孔の伝導率テンソル

電子のテンソルは [1.1] の結果であり、正孔は反対符号の電荷を持つので Hall 成分の符号が反転する。両者の電流を加えると

$$\boxed{\widetilde{\sigma} = \frac{e^2\tau/m}{1+x^2} \begin{pmatrix} n+p & -(n-p)x \\ (n-p)x & n+p \end{pmatrix}}. \tag{6}$$

ここで $x = \omega_c \tau$ は正の量である。

[2.2] Hall 係数と縦伝導率

$u = n + p$、$d = n - p$ とおく。伝導率行列の逆は

$$\widetilde{\sigma}^{-1} = \frac{m(1+x^2)}{e^2\tau}\frac{1}{u^2+d^2x^2}\begin{pmatrix} u & dx \\ -dx & u \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$j_y = 0$ では $\boldsymbol{E} = \widetilde{\sigma}^{-1}(j_x, 0)^T$ なので

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{d}{e}\frac{1+x^2}{u^2+d^2x^2} \tag{8}$$

$$= \boxed{-\frac{n-p}{e}\frac{1+(\omega_c\tau)^2}{(n+p)^2+(n-p)^2(\omega_c\tau)^2}}, \tag{9}$$

$$\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \boxed{\frac{(n+p)e^2\tau}{m}\frac{1+[(n-p)/(n+p)]^2x^2}{1+x^2}}. \tag{10}$$

[2.3] 低磁場・高磁場 Hall 係数

式の $x \to 0$ および $x \to \infty$ の極限は

$$R_H^{(0)} = -\frac{n-p}{e(n+p)^2}, \qquad R_H^{(\infty)} = -\frac{1}{e(n-p)}. \tag{11}$$

従って

$$n - p = -\frac{1}{eR_H^{(\infty)}}, \qquad n + p = \frac{1}{e\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}}, \tag{12}$$

ここで平方根は正の枝を取った。よって

$$\boxed{n = \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}} - \frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right]}, \quad \boxed{p = \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}} + \frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right]}. \tag{13}$$

非負密度を持つこのモデルの極限値は、同符号であることに加え

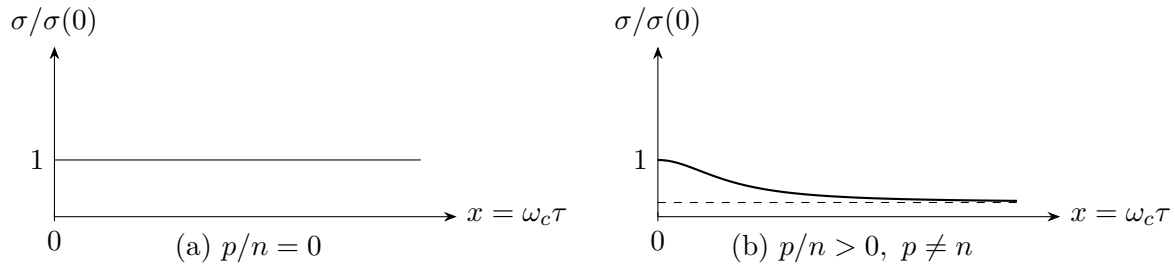
$$0 < \frac{R_H^{(0)}}{R_H^{(\infty)}} = \frac{d^2}{u^2} \le 1 \tag{14}$$

を満たす。従って復元した u と d には $u \ge |d|$ が成り立ち、$n = (u+d)/2$、$p = (u-d)/2$ はともに非負となる。二つの Hall 係数を入力として使う場合にも、同符号と $|R_H^{(0)}| \le |R_H^{(\infty)}|$ の両方が、このモデルとの適合条件である。

[2.4] 縦伝導率の磁場依存性

$$\sigma(0) = \frac{(n+p)e^2\tau}{m}, \qquad \sigma(\infty) = \frac{(n-p)^2e^2\tau}{m(n+p)}. \tag{15}$$

$n, p \ge 0$ なら $|(n-p)/(n+p)| \le 1$ なので、$p = 0$ では σ は一定、両種が存在し $n \ne p$ なら単調に減少して正の高磁場極限へ近づく。代表的な曲線を規格化して示す（混合担体の曲線は $|n-p|/(n+p) = 1/2$ の例）。



(a) $p/n = 0$　　(b) $p/n > 0,\ p \neq n$

Figure 1: 縦伝導率の代表的な磁場依存性。右図では $[(n-p)/(n+p)]^2 = 1/4$ の例を示す。

[2.5] 電子・正孔密度が等しい場合

$p = n > 0$ では伝導率テンソルの Hall 成分が相殺する。[2.1] の行列から $j_y = 2ne^2\tau E_y/[m(1+x^2)]$ なので、全電流の条件 $j_y = 0$ より Hall 電場は $E_y = 0$ となる。このとき縦伝導率は

$$\sigma = \frac{2ne^2\tau/m}{1+x^2} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty). \tag{16}$$

$E_y = 0$ で各担体の定常運動方程式を解くと、縦速度は

$$\text{電子：}\quad v_x = -\frac{e\tau E_x}{m(1+x^2)}, \qquad \text{正孔：}\quad v_x = \frac{e\tau E_x}{m(1+x^2)}, \tag{17}$$

横速度はともに $v_y = -e\tau x E_x/[m(1+x^2)]$ である。横速度は同方向だが電荷の符号が逆なので、等密度では横電流が相殺する。そのため、単一担体の場合のように横のローレンツ力を補償する Hall 電場が生じない。高磁場では縦速度が $1/(1+x^2)$ の因子で抑えられ、電場方向の電流と縦伝導率がゼロへ近づく。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 円軌道速度

半径 R の円運動に必要な向心力と万有引力を等置すると

$$\frac{mv_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2},\ \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}. \tag{1}$$

[1.2] 脱出速度

無限遠で速度がゼロとなる境界が脱出の最小速度である。重力位置エネルギーを無限遠でゼロとすると、この境界での全エネルギーはゼロなので

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} = 0,\ \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}. \tag{2}$$

[1.3] 楕円軌道の長軸

初期の全エネルギーは $E = m(v^2/2 - GM/R) < 0$ である。設問で与えられた軌道式から、最近点と最遠点の距離はそれぞれ $l/(1+\varepsilon)$、$l/(1-\varepsilon)$ である。その和が長軸の長さなので、設問 [1] の $l = h^2/(GM)$ と $1 - \varepsilon^2 = -2h^2E/(G^2M^2m)$ を代入すると

$$L = \frac{l}{1+\varepsilon} + \frac{l}{1-\varepsilon} = \frac{2l}{1-\varepsilon^2} = -\frac{GMm}{E}. \tag{3}$$

従って

$$\boxed{L = \frac{GMm}{-E} = \frac{GM}{GM/R - v^2/2}}. \tag{4}$$

$v = v_1$ では $L = 2R$、脱出境界 $v \to v_2^-$ では $L \to \infty$ となり、円軌道・放物線軌道の極限とも整合する。

[2.1] 系の公転角速度

ロッドの全質量は $2m$ である。l/R_0 の零次では二質点への重力の合力を重心に置いた質量 $2m$ への重力で近似でき、これが円運動の向心力を与える。

$$2mR_0\omega_0^2 = \frac{GM(2m)}{R_0^2},\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}}}. \tag{5}$$

[2.2] 慣性モーメント

重心から各質点までの距離は $l/2$ であるため、z 軸まわりでは

$$\boxed{I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}}. \tag{6}$$

[2.3] 重力トルク

x を半径方向、y を公転方向とし、ロッド方向を $\boldsymbol{e}_l = (\cos\phi, \sin\phi)$ とする。質点の位置は $\boldsymbol{R}_\pm = \boldsymbol{R}_0 \pm (l/2)\boldsymbol{e}_l$ で、重力は $\boldsymbol{F}_\pm = -GMm\boldsymbol{R}_\pm/|\boldsymbol{R}_\pm|^3$ である。重心まわりのトルクは

$$N_z = \left[\frac{l}{2}\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{F}_+ - \frac{l}{2}\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{F}_-\right]_z \tag{7}$$

$$= \frac{GMmR_0 l}{2}\sin\phi\left[(R_0^2 + R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2} - (R_0^2 - R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2}\right]. \tag{8}$$

$(1+z)^{-3/2} = 1 - 3z/2 + O(z^2)$ を使い、各項を l/R_0 の一次まで展開すると

$$(R_0^2 \pm R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 \mp \frac{3l\cos\phi}{2R_0} + O\left(\frac{l^2}{R_0^2}\right)\right]. \tag{9}$$

二項の差は l を $-l$ に変えると符号が反転するため、偶数次の項は相殺する。従って角括弧は $-3l\cos\phi/R_0^4 + O(l^3/R_0^6)$ となり、

$$\boxed{N_z = -\frac{3}{2}\frac{GMml^2}{R_0^3}\sin\phi\cos\phi = -\frac{3}{4}ml^2\omega_0^2\sin 2\phi + O\left(\frac{GMml^4}{R_0^5}\right)}. \tag{10}$$

正の ϕ を半径方向から公転方向へ測るため、$\phi > 0$ の小さな傾きには負の復元トルクが働く。

[2.4] 平衡角と安定性

$N_z = 0$ より

$$\boxed{\phi_0 = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}}. \tag{11}$$

慣性系でのロッドの絶対角を $\psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$ とすると、公転角速度 ω_0 は一定なので $\ddot{\psi} = \ddot{\phi}$ である。従って $I\ddot{\phi} = N_z$ を用い、$\phi = \phi_0 + \delta\phi$ とすると、一次の運動方程式は

$$I\,\delta\ddot{\phi} = N_z'(\phi_0)\delta\phi,\ \delta\ddot{\phi} = -3\omega_0^2\cos(2\phi_0)\delta\phi. \tag{12}$$

$\phi_0 = 0, \pi$ では復元力が働き、安定な小振動の角振動数は

$$\boxed{\Omega = \sqrt{3}\,\omega_0}. \tag{13}$$

$\phi_0 = \pi/2, 3\pi/2$ では係数が正となるため、摂動は指数的に増大し不安定である。重力勾配はロッドを半径方向へ揃える。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 誘導電場

半径 r の円筒経路を上から見て反時計回りを正に取る。Faraday の法則から

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B(t)), \qquad 2\pi r E_\theta = -\pi r^2 \dot{B}(t). \tag{1}$$

$B(t) = \mu_0 H_0 \sin(2\pi f t)$ より

$$\boxed{E_\theta(r,t) = -\frac{r}{2}\dot{B}(t) = -\pi f \mu_0 H_0 r \cos(2\pi f t)}. \tag{2}$$

[1.2] 誘導加熱電力

電流密度は $J = E_\theta/\rho$ なので、単位体積あたりの Joule 発熱率は E_θ^2/ρ である。体積要素 $2\pi r L\,dr$ にわたって積分すると

$$P(t) = \int_0^R \frac{E_\theta(r,t)^2}{\rho} 2\pi r L\,dr \tag{3}$$

$$= \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{2\rho}\cos^2(2\pi f t). \tag{4}$$

[1.3] 一秒間の温度上昇

1 秒は $f = 10\,\mathrm{Hz}$ の整数周期なので、$\cos^2$ の時間平均は $1/2$ である。従って

$$\Delta T = \frac{\langle P\rangle (1\,\mathrm{s})}{C} = \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{4\rho C}(1\,\mathrm{s}). \tag{5}$$

与えられた値を代入すると $\langle P\rangle \simeq 1.96\times 10^{-3}\,\mathrm{W}$、$\Delta T \simeq 3.92\times 10^{-3}\,\mathrm{K}$ である。一桁の有効数字では

$$\boxed{\Delta T \simeq 4\times 10^{-3}\,\mathrm{K}}. \tag{6}$$

[2.1] 一つの円環電流の軸上磁場

半径 a のループの各電流要素について Biot–Savart 則を用いると、対称性により横成分は相殺し、軸成分だけが残る。距離 $\sqrt{a^2+x^2}$、軸への射影因子 $a/\sqrt{a^2+x^2}$ を使えば

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}}. \tag{7}$$

ここでは電流方向を右ねじの法則で $+x$ 向きに磁場を作る向きとした。逆向き電流なら符号が反転する。

[2.2] 逆向き電流の二つのループ

左のループを $x=-b$ で $+x$ 向きの磁場を作るように取り、右のループ $x=b$ の電流は反対向きとする。軸上の符号付き成分は

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}}-\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right]. \tag{8}$$

原点で $B_x(0)=0$ であり、奇関数なので偶数次の項は消える。微分すると

$$B_x'(0)=-\frac{3\mu_0 I a^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}, \qquad \boxed{B_x(x)=-\frac{3\mu_0 I a^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}x+O(x^3)}. \tag{9}$$

[2.3] 同じ向きの電流と二次項の相殺

右の電流を反転すると二つの軸成分が加わる。

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right]. \tag{10}$$

$S=a^2+b^2$ とおいて

$$\frac{1}{[a^2+(b\pm x)^2]^{3/2}}=S^{-3/2}\left[1\mp\frac{3b}{S}x+\frac{3(4b^2-a^2)}{2S^2}x^2+O(x^3)\right] \tag{11}$$

と展開し、$+x$ と $-x$ の式を足すと

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{S^{3/2}}+\frac{3\mu_0 I a^2(4b^2-a^2)}{2S^{7/2}}x^2+O(x^4). \tag{12}$$

二次項が消える条件は $4b^2-a^2=0$ である。$a,b>0$ より

$$\boxed{a=2b}. \tag{13}$$

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] デルタ関数障壁での境界条件

波動関数が原点で跳ぶと、その一階微分には $\delta(x)$、二階微分にはその導関数 $\delta'(x)$ に比例する項が現れる。ポテンシャル項 $\alpha\delta(x)\psi(x)$ には $\delta'(x)$ の項がなく、運動エネルギー項のそれを相殺できない。従って波動関数は連続である。シュレーディンガー方程式を $[-\epsilon, \epsilon]$ で積分すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right] + \alpha\psi(0) = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

$\epsilon \to 0$ では右辺がゼロに近づくため、

$$\boxed{\psi(0^+) = \psi(0^-)}, \qquad \boxed{\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)}. \tag{2}$$

第 2 式はデルタ関数ポテンシャルの強さに比例する微分の跳びである。

[1.2] 透過・反射振幅

左から入射する定常波を

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx}, & x < 0, \\ te^{ikx}, & x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

とする。連続条件と微分の跳び条件より

$$1 + r = t, \qquad ikt - ik(1 - r) = 2kCt. \tag{4}$$

$C = m\alpha/(\hbar^2 k)$ を用いて解くと

$$\boxed{r = \frac{C}{i - C}}, \qquad \boxed{t = \frac{i}{i - C}}. \tag{5}$$

確率は $|r|^2 = C^2/(1 + C^2)$、$|t|^2 = 1/(1 + C^2)$ で、和は 1 となる。

[2.1] 反対称な二粒子波

入射状態を $\Psi_- = \psi_+(x_1)\psi_-(x_2) - \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)$ とする。各因子に一粒子の散乱則を適用すると

$$\Psi_- \longmapsto (t^2 - r^2)\left[\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) - \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)\right]. \tag{6}$$

同方向出射の $\psi_+(x_1)\psi_+(x_2)$ と $\psi_-(x_1)\psi_-(x_2)$ は、いずれも二つの積からの係数が $tr - rt = 0$ となって消える。従って反対向き出射だけが残る。これは α, E によらない。

[2.2] 対称な二粒子波と同方向散乱

対称入射 $\Psi_+ = \psi_+(x_1)\psi_-(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)$ の出射状態は

$$\Psi_+ \longmapsto (t^2 + r^2)\left[\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)\right] \tag{7}$$

$$+ 2tr\left[\psi_+(x_1)\psi_+(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_-(x_2)\right]. \tag{8}$$

第 1 行が反対向き、第 2 行が同方向への出射チャネルである。$C \to 0$ では $t \to 1, r \to 0$、$C \to \infty$ では $t \to 0, |r| \to 1$ なので、両極限では反対向きだけが残る。

同方向だけに散乱される条件は反対向きの係数がゼロとなること、すなわち

$$t^2 + r^2 = \frac{C^2 - 1}{(i - C)^2} = 0. \tag{9}$$

$C > 0$ より $C = 1$ であり、求める障壁の強さは

$$\boxed{\alpha_0(E) = \frac{\hbar^2 k}{m} = \hbar\sqrt{\frac{2E}{m}}}. \tag{10}$$

このとき同方向の二つの出射チャネルは係数 $2tr \neq 0$ で残る。

[3] 二重デルタ障壁の完全透過

$x < 0$、$0 < x < L$、$x > L$ における波をそれぞれ

$$e^{ikx} + r_L e^{-ikx}, \qquad Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad Te^{ik(x-L)} \tag{11}$$

と置く。完全透過では $r_L = 0$ であり、$x = 0$ の連続条件と跳び条件から

$$A = 1 - iC, \qquad B = iC. \tag{12}$$

$x = L$ で $X = Ae^{ikL}/T$、$Y = Be^{-ikL}/T$ と定義する。連続条件と微分の跳び条件は

$$X + Y = 1, \qquad i(1 - X + Y) = 2C, \tag{13}$$

なので $X = 1 + iC$、$Y = -iC$ となる。これらを割り合わせると

$$e^{2ikL} = \frac{B}{A}\frac{X}{Y} = -\frac{1 + iC}{1 - iC}. \tag{14}$$

$\theta = \tan^{-1} C$ と置けば右辺は $e^{i(\pi + 2\theta)}$ である。従って正の障壁間隔は

$$\boxed{L_n = \frac{\pi/2 + \tan^{-1} C + n\pi}{k}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

この条件では反射振幅がゼロで、実ポテンシャルの確率流保存により透過確率は 1 である。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 臨界点

状態方程式を粒子数密度 n で微分すると

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T = \frac{k_B T}{(1-bn)^2} - 2an, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_T = \frac{2bk_B T}{(1-bn)^3} - 2a. \tag{2}$$

両方をゼロとし、式を割り合わせると

$$\frac{2b}{1-bn_c} = \frac{1}{n_c}, \qquad \boxed{n_c = \frac{1}{3b}}. \tag{3}$$

第 2 式から臨界温度が得られ、状態方程式へ代入すれば臨界圧力は

$$\boxed{T_c = \frac{8a}{27k_B b}}, \qquad \boxed{P_c = \frac{a}{27b^2}}. \tag{4}$$

[2] 臨界密度での等温圧縮率

固定した粒子数 N について $n = N/V$ なので、$(\partial V/\partial n)_N = -V/n$ である。圧縮率の定義に連鎖律を使うと

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = -\frac{1}{V}\left(-\frac{V}{n}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T^{-1} = \left[n\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T\right]^{-1}. \tag{5}$$

$n = n_c = 1/(3b)$ を代入すると

$$K_T = \frac{1}{n_c}\left(\frac{9}{4}k_B T - \frac{2a}{3b}\right)^{-1} \tag{6}$$

$$= \boxed{\frac{4}{9n_c k_B (T - T_c)}} \qquad (T > T_c), \tag{7}$$

ここで $2a/(3b) = (9/4)k_B T_c$ を用いた。$T \downarrow T_c$ で圧縮率が発散する。

[3] 理想気体の自由エネルギーと状態量

運動量積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/(2mk_B T)}\, dp = \sqrt{2\pi m k_B T} \tag{8}$$

なので

$$Z_0 = \frac{V^N}{N! h^{3N}} (2\pi m k_B T)^{3N/2}. \tag{9}$$

Stirling 近似を使って $F_0 = -k_B T \ln Z_0$ を整理すると

$$F_0 = -N k_B T \left[\ln\!\left(\frac{V}{N}\right) + 1 + \frac{3}{2} \ln\!\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) \right]. \tag{10}$$

これを各変数で微分すると

$$P_0 = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)_{T,N} = \boxed{\frac{N k_B T}{V}}, \tag{11}$$

$$S_0 = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial T}\right)_{V,N} = \boxed{N k_B \left[\ln\!\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln\!\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) \right]}, \tag{12}$$

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial F_0}{\partial N}\right)_{T,V} = \boxed{-k_B T \left[\ln\!\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2} \ln\!\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) \right]}, \tag{13}$$

$$U_0 = F_0 + T S_0 = \boxed{\frac{3}{2} N k_B T}. \tag{14}$$

対数は組合せをまとめると無次元であり、例えば $\mu_0 = k_B T \ln[n\lambda_T^3]$、$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ と書ける。

[4] 高温・低密度での自由エネルギー

相互作用の積分は

$$\int_\ell^\infty r^2 \frac{u(r)}{k_B T}\, dr = -\frac{\epsilon \ell^3}{3 k_B T}. \tag{15}$$

また $4\pi\ell^3/3 = 2v$ だから、与えられた近似式の角括弧は $1 + 2\epsilon v/(k_B T V)$ となる。N が大きく、密度が低く、$\epsilon/(k_B T) \ll 1$ として引力に由来する対数を展開し、$N - 1 \simeq N$ とすれば

$$\ln A \simeq N \ln\left(1 - \frac{Nv}{V}\right) + \frac{N(N-1)}{2} \ln\left(1 + \frac{2\epsilon v}{k_B T V}\right) \tag{16}$$

$$\simeq N \ln\left(1 - \frac{Nv}{V}\right) + \frac{N^2 \epsilon v}{k_B T V}. \tag{17}$$

排除体積因子は問題文の形のまま保ち、引力補正のみを一次で近似する。従って

$$\boxed{F \simeq F_0 - N k_B T \ln\left(1 - \frac{Nv}{V}\right) - \frac{N^2 \epsilon v}{V}}. \tag{18}$$

低密度でさらに展開すれば排除体積補正の先頭は $N^2 v k_B T/V$ となる。排除体積は自由エネルギーを増やし、引力は減らす。

[5] 圧力と [6] 定数の対応

同じ近似で自由エネルギーを密度形に書くと

$$F \simeq -N k_B T \left[\ln\!\left(\frac{V - Nv}{N h^3}\right) + 1 + \frac{3}{2} \ln(2\pi m k_B T) + \frac{\epsilon v N}{k_B T V} \right]. \tag{19}$$

この形から体積微分を取ると

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{Nk_BT}{V - Nv} - \frac{\epsilon v N^2}{V^2} = \boxed{\frac{nk_BT}{1 - vn} - \epsilon v n^2}. \tag{20}$$

よって van der Waals 方程式と比較して

$$\boxed{b = v, \qquad a = \epsilon v}. \tag{21}$$

各項の次元は圧力であり、引力項の符号は負である。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 入射波の磁場

非磁性媒質では $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{H}$ である。入射電場は y 方向、波数は $-z$ 方向で、$E_y^{(i)} = E_0^{(i)} e^{-i(k_0 z + \omega t)}$、$k_0 = \omega n_0 / c$ である。したがって

$$-\frac{\partial E_y^{(i)}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x^{(i)}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H_0^{(i)} = +\frac{n_0}{c\mu_0} E_0^{(i)}}. \tag{1}$$

ここで $-\partial_z E_y$ は $\nabla \times \boldsymbol{E}$ の x 成分である。同符号の E_y, H_x は $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ が $-z$ 方向を向くことと整合する。

[1.2–1.3] 界面条件と振幅反射係数

表面電流がないので、境界面 $z = 0$ で接線成分が連続する。時刻 $t = 0$ の各振幅を用いれば

$$E_0^{(i)} + E_0^{(r)} = E_0^{(t)}, \qquad H_0^{(i)} + H_0^{(r)} = H_0^{(t)}. \tag{2}$$

反射波は $+z$ 方向へ進むので $H_0^{(r)} = -n_0 E_0^{(r)} / (c\mu_0)$、透過波は $-z$ 方向へ進むので $H_0^{(t)} = +n_g E_0^{(t)} / (c\mu_0)$ である。従って

$$n_0 (E_0^{(i)} - E_0^{(r)}) = n_g E_0^{(t)}. \tag{3}$$

これと電場条件を解いて

$$\boxed{r_0 = \frac{E_0^{(r)}}{E_0^{(i)}} = \frac{n_0 - n_g}{n_0 + n_g}}. \tag{4}$$

[2.1] 各層の電場と磁場

位相因子 $e^{-i\omega t}$ のもとで、$E_l^{(-)}$ の波は $-z$ 方向、$E_l^{(+)}$ の波は $+z$ 方向へ進む。Maxwell 方程式から符号をそれぞれ定めると

$$\boxed{H_l^{(-)} = +\frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{(-)}, \qquad H_l^{(+)} = -\frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{(+)}}. \tag{5}$$

[2.2] 境界での漸化式

境界面 $l-1$ で電場と磁場を連続させる。層 l 側では距離 d_l だけ伝搬した位相が付くので

$$E_{l-1}^{(-)} + E_{l-1}^{(+)} = E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} + E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}, \tag{6}$$

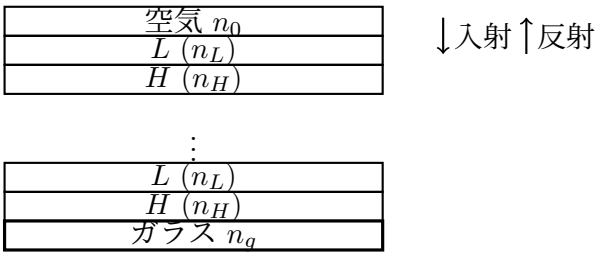
$$n_{l-1} (E_{l-1}^{(-)} - E_{l-1}^{(+)}) = n_l (E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} - E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}), \tag{7}$$

ただし $\Delta_l = n_l \omega d_l / c$ である。2 式を割り合わせれば問題文の漸化式となり

$$\boxed{\alpha_l = \frac{n_l}{n_{l-1}}}. \tag{8}$$

[2.3] 四分の一波長多層膜

空気からガラスへ向かう層の順序と終端を図示する。



図は媒質の順序を示す模式図であり、層の高さは物理的な厚さの比を表さない。

境界での場の比を $Y = c\mu_0 H_x / E_y$ とする。層 l の下端 z_l では、共通時間因子を省いて $E_y = E_l^{(-)} + E_l^{(+)}$、$c\mu_0 H_x = n_l (E_l^{(-)} - E_l^{(+)})$ なので

$$Y(z_l) = n_l \frac{E_l^{(-)} - E_l^{(+)}}{E_l^{(-)} + E_l^{(+)}}. \tag{9}$$

上端 $z_{l-1} = z_l + d_l$ では、位相厚さ $\Delta_l = \pi/2$ により二つの振幅の位相因子がそれぞれ $-i, +i$ となる。従って

$$E_y(z_{l-1}) = -i(E_l^{(-)} - E_l^{(+)}), \tag{10}$$

$$c\mu_0 H_x(z_{l-1}) = -i n_l (E_l^{(-)} + E_l^{(+)}), \tag{11}$$

$$Y(z_{l-1}) = n_l \frac{E_l^{(-)} + E_l^{(+)}}{E_l^{(-)} - E_l^{(+)}} = \frac{n_l^2}{Y(z_l)}. \tag{12}$$

ガラス内は透過波だけなので終端の比は n_g である。ガラスから空気へ遡ると一組の層は H、L の順になり、場の比は $Y \mapsto n_H^2 / Y \mapsto (n_L^2 / n_H^2) Y$ と変換される。これを N 組繰り返すと

$$Y_{\mathrm{in}} = n_g \left(\frac{n_L}{n_H} \right)^{2N}. \tag{13}$$

空気側の入射・反射振幅では $c\mu_0 H_x / E_y = n_0 (1 - r_1)/(1 + r_1)$ だから

$$\boxed{r_1 = \frac{n_0 - Y_{\mathrm{in}}}{n_0 + Y_{\mathrm{in}}} = \frac{n_0 n_H^{2N} - n_g n_L^{2N}}{n_0 n_H^{2N} + n_g n_L^{2N}}}. \tag{14}$$

設計波長で反射を消す条件は $r_1 = 0$、すなわち $Y_{\mathrm{in}} = n_0$ であり、

$$\boxed{\frac{n_L}{n_H} = \left(\frac{n_0}{n_g} \right)^{1/(2N)}}. \tag{15}$$

このとき積層の入口での場の比が空気の進行波の比に一致する。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 化学ポテンシャルと電荷移動

内部エネルギーを $U(S,V,N)$ とすると化学ポテンシャルは

$$dU = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN, \qquad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} \tag{1}$$

で定義される。孤立した M の電子化学ポテンシャルは $-W$、S では $-\phi_s$ である。接続すると電子は化学ポテンシャルの高い側から低い側へ移り、平衡では静電エネルギーを含む電気化学ポテンシャルが両側で一致する。$W > \phi_s$ なら S から M へ移って M 側が負、S 側が正になり、逆の大小関係なら電荷の向きは反転する。[1] では両方を含む電荷量の大きさを求める。

[1.2] 誘起表面電荷

面積 A の平行板容量は $C = \varepsilon_0 A/d$ である。S 側の符号付き電荷を q と置く（$q > 0$ なら電子は S から M へ移る）。静電エネルギーは

$$U_{\mathrm{es}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{dq^2}{2\varepsilon_0 A}. \tag{2}$$

電子が移ることで化学自由エネルギーは $-(W-\phi_s)q/e$ だけ変化する。従って全エネルギー

$$U(q) = \frac{dq^2}{2\varepsilon_0 A} - \frac{W-\phi_s}{e}q \tag{3}$$

を最小にする条件 $\partial U/\partial q = 0$ から、S 側の符号付き面電荷密度は $q/A = \varepsilon_0(W-\phi_s)/(ed)$ である。求める大きさは

$$\boxed{\rho = \frac{\varepsilon_0}{ed}|W-\phi_s|}. \tag{4}$$

ここでは ρ を大きさとして用いた。原問の M 側 $-\rho$、S 側 $+\rho$ という記号を符号付き密度と読めば、$W < \phi_s$ のとき ρ の符号が反転する。

[1.3] 板間の引力

一方の板が作る電場は $\rho/(2\varepsilon_0)$ である。もう一方の板に働く圧力は ρ とこの電場の積だから

$$F = A\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 A}{2e^2d^2}|W-\phi_s|^2}. \tag{5}$$

圧力の次元は $\mathrm{N/m^2}$ で、面積を掛けると力になる。

[1.4] 振動する間隔と電流

瞬時の平衡電荷密度は

$$\frac{q(t)}{A} = \frac{\varepsilon_0(W-\phi_s)}{e[d+\delta\sin(\Omega t)]} \simeq \frac{\varepsilon_0(W-\phi_s)}{ed}\left[1-\frac{\delta}{d}\sin(\Omega t)\right] \tag{6}$$

である。符号付き電荷の時間変化から $I(t) = dq/dt$ となり、振幅は

$$\boxed{I_0 = \frac{\varepsilon_0 A\delta\Omega}{ed^2}|W-\phi_s|}. \tag{7}$$

ここでは δ/d の一次まで残した。

[2.1] 半導体側のバンド曲がり

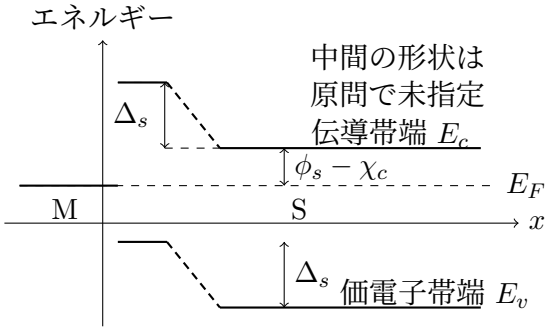
金属側の静電ポテンシャルを Φ_M、半導体の十分内部のものを Φ_S とし、同じ基準から測る。電子の静電エネルギーは $-e\Phi$ なので、平衡での電気化学ポテンシャルの一致は

$$-W - e\Phi_M = -\phi_s - e\Phi_S, \qquad e(\Phi_S - \Phi_M) = W - \phi_s. \tag{8}$$

界面固有の状態による追加のエネルギー変化を無視する原問の理想接合では、伝導帯端も静電エネルギーだけシフトする。従って界面と十分内部との伝導帯端の差は

$$\boxed{\Delta_s = -e(\Phi_M - \Phi_S) = W - \phi_s}. \tag{9}$$

これは半導体内部から界面までの伝導帯端の上昇である。E_F から界面伝導帯端までの障壁は $\Delta_s + (\phi_s - \chi_c) = W - \chi_c$。図ではこの二つの差を分けて示し、同じ静電シフトを価電子帯端にも適用した。図の縦横の長さは縮尺を表さず、異なるエネルギー差の大小比較には用いない。破線は端点を結ぶ案内で、空乏領域内の詳細な電位分布は原問で定まらない。



[2.2] 熱活性化と整流性

半導体内部のフェルミ準位は伝導帯端より $\phi_s - \chi_c > 0$ だけ低い。伝導帯内の状態のエネルギーを E、フェルミ準位を E_F とすると、非縮退近似でその状態の占有因子は $\exp[-(E-E_F)/(k_BT)]$ である。界面では伝導帯端が Δ_s だけ高くなるため、十分内部と同じ伝導帯端からのエネルギーを持つ状態同士の占有因子の比は

$$\frac{\exp[-(E+\Delta_s-E_F)/(k_BT)]}{\exp[-(E-E_F)/(k_BT)]} = \exp\left(-\frac{\Delta_s}{k_BT}\right). \tag{10}$$

従って平衡での界面近傍の伝導電子は少なく、半導体から金属への電子の供給は熱活性化によって抑えられる。

平衡をゼロとする外部からの印加電圧を $V = V_M - V_S$ とする。印加電圧が主に空乏層にかかる近似では、静電ポテンシャル差 $\Phi_M - \Phi_S$ は平衡値から V だけ変化する。電子の静電エネルギーは $-e\Phi$ なので、

$$\Delta_s(V) = \Delta_s(0) - eV. \tag{11}$$

以下では半導体内部の温度と電子密度を一定とし、障壁を越える熱放出が電流を支配する範囲を考える。障壁が残り、界面を通過する割合の電圧依存を無視できるとき、S から M への電子流は平衡時に比べて

$$\frac{\exp[-\Delta_s(V)/(k_BT)]}{\exp[-\Delta_s(0)/(k_BT)]} = \exp\left(\frac{eV}{k_BT}\right) \tag{12}$$

倍となる。一方、M のフェルミ準位と界面の伝導帯端はともに $-e\Phi_M$ だけ動くため、その間の障壁 $W - \chi_c$ は変わらず、M から S への電子流はほぼ一定である。

平衡では両向きの電子流が釣り合う。M を正にすると S から M への流れが増え、その差として正味の電子流が S から M へ生じる。M を負にすると S から M への流れが抑えられ、ほぼ一定の M から S への流れが残る。この非対称な電圧依存によって整流性が生じ、順方向の通常の電流は電子流と逆の M から S へ流れる。

物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 固定端をもつ質点ばね系の固有振動

質点 n の変位を $x_n(t)$ とし、固定端の条件を便宜上 $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$ と書く。質点 n に左右のばねが及ぼす力は $-k(x_n - x_{n-1})$ と $-k(x_n - x_{n+1})$ なので、

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2} = -k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \qquad n = 1, \dots, N. \tag{1}$$

従って、$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^{\mathsf{T}}$ に対する行列は

$$K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -K\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

提案された固有モードの内点成分について、恒等式 $\sin(q(n-1)) + \sin(q(n+1)) = 2\sin(qn)\cos q$ より

$$(K\boldsymbol{u}_\ell)_n = k\big(2(u_\ell)_n - (u_\ell)_{n-1} - (u_\ell)_{n+1}\big) \tag{3}$$

$$= 2k(1 - \cos q_\ell)(u_\ell)_n. \tag{4}$$

$n = 1, N$ でも、境界値 $(u_\ell)_0 = (u_\ell)_{N+1} = 0$ が $\sin 0 = 0$ および $\sin(q_\ell(N+1)) = \sin(\pi\ell) = 0$ に対応するため同じ式が成り立つ。したがって

$$K\boldsymbol{u}_\ell = \lambda_\ell \boldsymbol{u}_\ell, \qquad \lambda_\ell = 2k(1 - \cos q_\ell), \qquad q_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}. \tag{5}$$

モード ℓ を規格化するには、ℓ を固定して N 個の質点成分の二乗和を求める。$\sin^2 z = (1 - \cos 2z)/2$ を用い、問題文の和では $n = N+1$ の項が 1 であることに注意すると

$$\sum_{n=1}^{N} \sin^2(q_\ell n) = \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \cos(2q_\ell n) \tag{6}$$

$$= \frac{N}{2} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{N+1}{2}. \tag{7}$$

規格化定数を正に選ぶと

$$(u_\ell)_n = N_\ell \sin(q_\ell n), \qquad N_\ell = \sqrt{\frac{2}{N+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{N} (u_\ell)_n^2 = 1. \tag{8}$$

式 (5) の固有値は $0 < q_\ell < \pi$ で互いに異なる。K は実対称行列なので、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。N 次元空間にこのような規格化固有ベクトルが N 個あるため、完全正規直交基底をなす。

$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell(t)\boldsymbol{u}_\ell$ と展開し、固有基底上でベクトル運動方程式を成分ごとに比較すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha_\ell}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda_\ell}{m}\alpha_\ell = -\omega_\ell^2\alpha_\ell, \qquad \omega_\ell = \sqrt{\frac{2k}{m}(1-\cos q_\ell)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{q_\ell}{2}. \tag{9}$$

最後の形では $0 < q_\ell/2 < \pi/2$ なので正の正弦を用いた。分散曲線は $0 < q < \pi$ で単調増加し、二階微分が負なので上に凸である。小さい q では $\omega \simeq \sqrt{k/m}\,q$ となり、$q = \pi$ での極限値は $2\sqrt{k/m}$ である。許されるモードは、この曲線上の $q_\ell = \pi\ell/(N+1)$ に対応する N 個の点である。

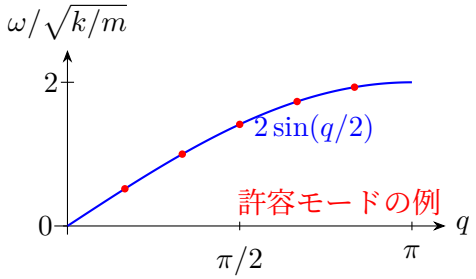


図 1: 固定端鎖の分散関係。赤点は $N = 5$ の許容波数を示す例である。

[2] 外力に対する静的応答

釣り合いでは慣性項が消え、$K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ となる。固有ベクトルで両辺を展開すると

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_\ell\alpha_\ell\boldsymbol{u}_\ell = \sum_{\ell=1}^{N} \beta_\ell\boldsymbol{u}_\ell, \qquad \lambda_\ell\alpha_\ell = \beta_\ell. \tag{10}$$

従って $\alpha_\ell = \beta_\ell/\lambda_\ell$ であり、各モードの変位は外力係数に比例する。その比例係数 $1/\lambda_\ell$ は外力の大きさによらない。各モードの外力係数が $\beta_\ell \neq 0$ のとき、設問の応答比はこの比例係数に等しく

$$\frac{\alpha_\ell}{\beta_\ell} = \frac{1}{\lambda_\ell} = \frac{1}{m\omega_\ell^2}. \tag{11}$$

外力係数がゼロのモードでは変位係数もゼロとなるが、比例係数 $1/\lambda_\ell$ は同じである。以下では、この外力に依存しない比例係数をモード間で比較する。q_ℓ は ℓ とともに増加し、$1-\cos q_\ell$ も狭義単調増加する。よって λ_ℓ が最小となるのは $\ell = 1$ だけであり、応答比の最大値は

$$\max_{1\le\ell\le N}\frac{1}{\lambda_\ell} = \frac{1}{4k\sin^2\!\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)} \tag{12}$$

$$\simeq \frac{(N+1)^2}{\pi^2 k} \qquad (N \gg 1), \tag{13}$$

である。近似では $\sin z \simeq z$ を用いた。

[3] 各質点に加えた調和ポテンシャル

追加ポテンシャル $\frac{1}{2}k_0x_n^2$ は質点 n に復元力 $-k_0x_n$ を加える。したがって運動方程式の剛性行列は

$$K_0 = K + k_0 I. \tag{14}$$

単位行列は全てのベクトルを同じ向きのまま保つため、固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_\ell$ のままで、固有値だけが k_0 増える。

$$\lambda_{\ell,0} = 2k(1-\cos q_\ell) + k_0 = 4k\sin^2\frac{q_\ell}{2} + k_0, \qquad \omega_\ell = \sqrt{\frac{4k\sin^2(q_\ell/2)+k_0}{m}}. \tag{15}$$

この式は k_0 と k が同じ単位（力/長さ）であることとも整合する。有限の N では最小値は $\ell = 1$ であり、$q_1 = \pi/(N+1) \to 0$ より

$$\lim_{N\to\infty} \min_{1\le\ell\le N} \omega_\ell = \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \tag{16}$$

図 2は例として $k_0 = k$ とした曲線を描く。一般には縦軸を $\sqrt{k/m}$ で規格化した式 $\omega/\sqrt{k/m} = \sqrt{4\sin^2(q/2)+k_0/k}$ に従い、$q = 0$ での縦軸切片は $\sqrt{k_0/k}$ となる。従って正の k_0 があると、長波長極限にも有限のギャップが残る。

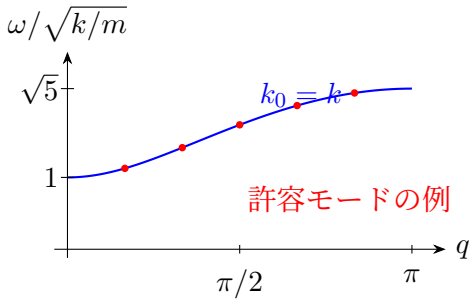


図 2: $k_0 = k$ の場合の分散関係。赤点は $N = 5$ の許容波数を示す例である。

物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1] 平面波とマクスウェル方程式

共通因子 $\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$ を省略すると、空間微分は $i\boldsymbol{k}$、時間微分は $-i\omega$ を掛けることに対応する。したがって

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0=\omega\boldsymbol{B}_0,\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0=-\omega\boldsymbol{D}_0. \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{D}_0=\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0$ である。第 1 式の両辺に左から $\boldsymbol{k}\times$ を作用させ、第 2 式を用いると

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0 \tag{2}$$

$$=\omega\mu_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0=-\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0. \tag{3}$$

よって

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)+\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{4}$$

[2] 行列表示

恒等式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ により、式(4)の左辺は $[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathsf{T}}-|\boldsymbol{k}|^2I+\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}]\boldsymbol{E}_0$ である。したがって

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_y^2-k_z^2 & k_xk_y & k_xk_z\\ k_xk_y & \omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_x^2-k_z^2 & k_yk_z\\ k_xk_z & k_yk_z & \omega^2\mu_0\varepsilon_2-k_x^2-k_y^2\end{pmatrix},\qquad \tilde{X}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{5}$$

[3] 2 つの波数

$\boldsymbol{k}=(0,k\sin\theta,k\cos\theta)^{\mathsf{T}}$ を代入すると、

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2 & 0 & 0\\ 0 & \omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2\cos^2\theta & k^2\sin\theta\cos\theta\\ 0 & k^2\sin\theta\cos\theta & \omega^2\mu_0\varepsilon_2-k^2\sin^2\theta\end{pmatrix}. \tag{6}$$

非零の $\boldsymbol{E}_0$ があるためには行列式がゼロである。式(6)の行列式は、1 つの成分と yz ブロックの行列式に分かれる。前者から

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2=0\quad\Longrightarrow\quad k_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}. \tag{7}$$

後者は

$$(\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2\cos^2\theta)(\omega^2\mu_0\varepsilon_2-k^2\sin^2\theta)-k^4\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{8}$$

$$=\omega^4\mu_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2-k^2\omega^2\mu_0(\varepsilon_1\sin^2\theta+\varepsilon_2\cos^2\theta)=0. \tag{9}$$

$k > 0$ より

$$k_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta}}. \tag{10}$$

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ と $0 < \theta < \pi/2$ のもとでは 2 つの波数は正で、互いに異なる。

[4] 各波数に対する電場

$k = k_1$ では第 1 成分の係数がゼロとなり、$\tilde{X}$ の核は x 方向に向く。$|\boldsymbol{E}_0| = E_0$ とする規格化解は

$$\boldsymbol{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

一方 $k = k_2$ では yz ブロックが特異となる。その第 1 行 $\tilde{X}_{yy}E_y + \tilde{X}_{yz}E_z = 0$ に式(10)を代入し、$k_2^2\sin\theta$ で割って ε_2 を掛けると $\varepsilon_1\sin\theta\,E_y + \varepsilon_2\cos\theta\,E_z = 0$ となる。したがって $E_z/E_y = -(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\tan\theta$ である。$k_1 \neq k_2$ なので $E_x = 0$ となり、核のベクトルは $(0, \varepsilon_2\cos\theta, -\varepsilon_1\sin\theta)^{\mathsf{T}}$ に比例する。従って

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta + \varepsilon_2^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2\cos\theta \\ -\varepsilon_1\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{12}$$

分母はこのベクトルのユークリッド長なので、いずれも指定された大きさをもつ。

[5] x 偏光のエネルギー流

式(1)から磁場振幅は

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0}{\omega\mu_0}. \tag{13}$$

と定まる。複素振幅に対する時間平均ポインティングベクトルは $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*)$ である。各固有偏光は線形偏光なので、実数の偏光ベクトルを代表として方向を調べればよい。一般に

$$\boldsymbol{E}_0 \times (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0) = |\boldsymbol{E}_0|^2\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}_0. \tag{14}$$

式(11)では $\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k} = 0$ であるから、$\langle\boldsymbol{S}\rangle$ は $\boldsymbol{k}$ と平行である。この偏光は $k = k_1$ に対応し、波数ベクトルも光線の進行方向も側面 A の法線方向のままなので、入射後に向きを変えない。

[6] yz 偏光のエネルギー流

式(12)を $\boldsymbol{k}$ と外積すると

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 = -\frac{kE_0(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta)}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta + \varepsilon_2^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

よって磁場は x 成分だけをもち、式(13)から $\langle\boldsymbol{S}\rangle$ の向きは

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle \;\parallel\; \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1\sin\theta \\ \varepsilon_2\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{16}$$

このベクトルが z 軸となす角を $\theta+\alpha$ とする。両成分は正なので角は第 1 象限にあり、

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\varepsilon_1\sin\theta}{\varepsilon_2\cos\theta}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\theta. \tag{17}$$

$\tan\alpha=\tan[(\theta+\alpha)-\theta]$ の公式を用いると

$$\tan\alpha=\frac{\tan(\theta+\alpha)-\tan\theta}{1+\tan(\theta+\alpha)\tan\theta} \tag{18}$$

$$=\frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2-1)\tan\theta}{1+(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\tan^2\theta} \tag{19}$$

$$=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin\theta\cos\theta}{\varepsilon_2\cos^2\theta+\varepsilon_1\sin^2\theta}>0. \tag{20}$$

したがってこの枝ではエネルギー流が波数方向から $+y$ 側へ α だけ傾く。

[7] 紙の文字に生じる二重像

側面 A の反対側から、その法線方向に紙の文字を見る場合を考える。側面 A から反対面までの法線方向の距離を d とする。紙上の同じ点を出た光のうち、x 偏光の光線は法線に沿って進む。yz 偏光のエネルギー流は結晶内で法線から $\alpha>0$ だけ傾くため、出射点は側面 A に平行な yz 面内方向へ $d\tan\alpha$ だけずれる。この向きは $+y$ 成分をもち、図 1では下向きである。

二つの出射面は平行であり、界面で波数の接線成分が保存される。結晶内の波数は法線方向だから、出射後の波数も法線方向となる。空気中では光線もこの方向に進む。出射光線を紙面までまっすぐ逆延長すると、x 偏光の光線は元の点に戻り、yz 偏光の光線はそこから図の下向きに $d\tan\alpha$ だけずれた位置に達する。従って、紙面に投影した見かけの位置が偏光によって異なり、文字の「Q」は上下にずれた二つの像として見える。

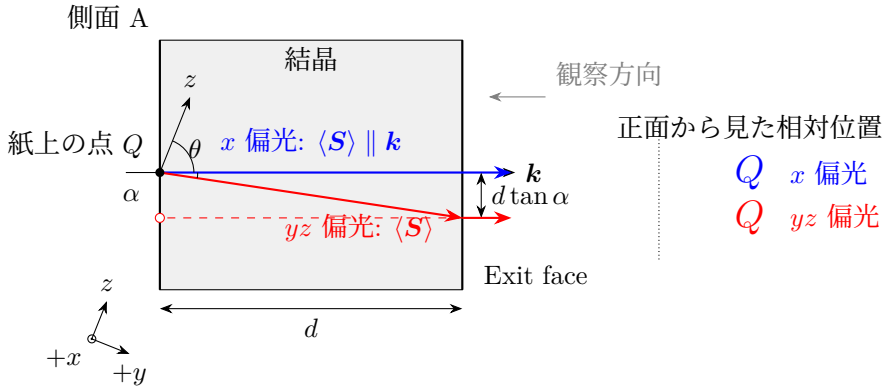


図 1: 紙上の同じ点から出た二つの光線。赤い破線は出射光線の逆延長を示し、紙面との交点は元の点より下にある。x 偏光の逆延長は元の点を通る。右の文字は正面から見た二つの像の相対位置を示し、実際の像面の位置は表していない。

物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1] 単原子理想気体の分配関数

古典気体では、N 個の同種粒子の分配関数は位相空間積分を $N!(2\pi\hbar)^{3N}$ で割ったものである。運動量を $\boldsymbol{p}_j = (p_{jx}, p_{jy}, p_{jz})$ とすると、

$$Z^{(g)}(V,\beta,N) = \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \int_{V^N} \mathrm{d}^{3N}r \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathrm{d}^{3N}p \, \exp\left[-\beta \sum_{j=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m}\right] \tag{1}$$

$$= \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m}\right) \mathrm{d}p\right)^{3N} \tag{2}$$

$$= \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2} \tag{3}$$

$$= \frac{V^N}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3N/2}. \tag{4}$$

ここで 1 成分ごとのガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2}\mathrm{d}p = \sqrt{\pi/a}$ を用いた。

[2] 気体の大分配関数

$$z(\beta,\mu) = e^{\beta\mu} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} \tag{5}$$

とおけば、式(4)より

$$Z_G^{(g)}(V,\beta,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{[Vz(\beta,\mu)]^N}{N!} \tag{6}$$

$$= \exp\left[V e^{\beta\mu} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2}\right]. \tag{7}$$

これは指数関数の級数展開そのものである。

[3] 圧力

式(7)を問題で与えられた式に代入すると

$$P(\beta,\mu) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V} \log Z_G^{(g)}(V,\beta,\mu) \tag{8}$$

$$= \frac{e^{\beta\mu}}{\beta} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} = e^{\beta\mu} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \beta^{-5/2}. \tag{9}$$

[4] 1 サイトの大分配関数

大分配重みは $e^{-\beta(E-\mu N)}$ である。空サイトは $(E,N)=(0,0)$ なので重みは 1、吸着状態は $(E,N)=(-\epsilon,1)$ なので重みは $e^{\beta(\epsilon+\mu)}$ となる。従って

$$\xi_G^{(a)} = 1 + e^{\beta(\epsilon+\mu)}. \tag{10}$$

[5] 吸着原子密度

サイトは独立なので全体の大分配関数は $Z_G^{(a)} = (\xi_G^{(a)})^{N_a}$ である。大分配関数の化学ポテンシャル微分から平均粒子数を求めると

$$n_a = \frac{1}{N_a\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z_G^{(a)} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Big(1+e^{\beta(\epsilon+\mu)}\Big) \tag{12}$$

$$= \frac{e^{\beta(\epsilon+\mu)}}{1+e^{\beta(\epsilon+\mu)}} = \frac{1}{1+e^{-\beta(\epsilon+\mu)}}. \tag{13}$$

この値は 1 サイトあたりの平均占有数なので、$0 < n_a < 1$ である。

[6] 圧力と温度による表示

式(9)から

$$e^{-\beta\mu} = \frac{1}{P}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\beta^{-5/2}. \tag{14}$$

これを式(13)に代入し、$\beta = 1/(k_BT)$ とすれば

$$n_a(P,T) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_BT)^{5/2}e^{-\epsilon/(k_BT)}} \tag{15}$$

$$= \frac{P}{P+P_*(T)}, \tag{16}$$

$$P_*(T) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_BT)^{5/2}e^{-\epsilon/(k_BT)}. \tag{17}$$

$P_*(T)$ は、密度を 1/2 にする圧力の尺度である。

[7] 圧力・温度依存性

温度一定では $P_*(T)$ は定数だから、$n_a = P/[P+P_*(T)]$ は圧力とともに単調増加する。$P\to 0$ で 0、$P\to\infty$ で 1 に近づく。

温度依存性は $P_*(T)$ の変化で決まる。その対数微分は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\log P_*(T) = \frac{5}{2T} + \frac{\epsilon}{k_BT^2} > 0, \qquad T>0. \tag{18}$$

従って一定圧力では $P_*(T)$ が厳密に増加し、n_a は厳密に減少する。$T\to 0^+$ では $P_*(T)\to 0$ なので $n_a\to 1$、$T\to\infty$ では $P_*(T)\to\infty$ なので $n_a\to 0$ である。図では $T_* = \epsilon/k_B$ および $P_{\mathrm{ref}} = P_*(T_*)$ を基準に取る。式(17)より $P_{\mathrm{ref}} = (m/(2\pi\hbar^2))^{3/2}\epsilon^{5/2}e^{-1}$ である。左図は $T=T_*$、右図は $P=P_{\mathrm{ref}}$ の例である。

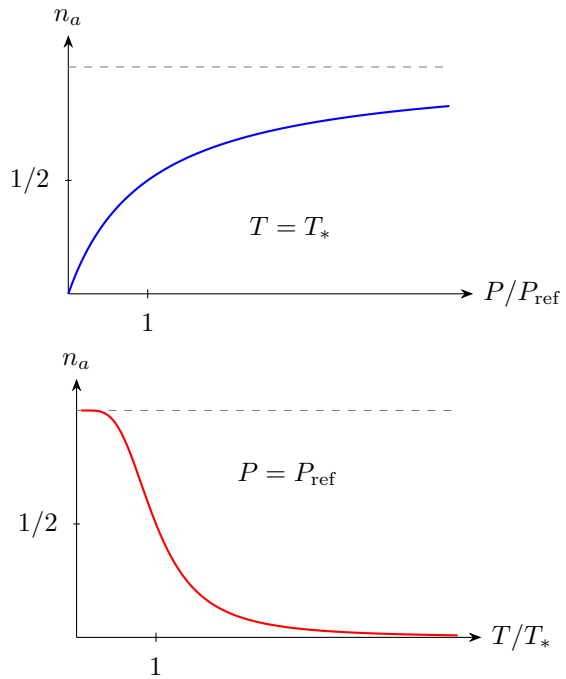


図 1: 吸着密度の圧力・温度依存性。左では $T = T_*$、右では $P = P_{\mathrm{ref}}$ を固定した。

物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1] ハミルトニアン

各方向の運動は一次元調和振動子である。定義された昇降演算子について

$$\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=\hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\frac{1}{2}\right),\qquad \frac{\hat{p}_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2=\hbar\omega\left(\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y+\frac{1}{2}\right).$$

従って全ハミルトニアンは

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y+1\right). \tag{1}$$

[2] エネルギーと縮退度

直積状態 $|n_x,n_y\rangle$ では各数演算子の固有値が n_x,n_y なので、

$$E_{n_x,n_y}=\hbar\omega(n_x+n_y+1),\qquad n_x,n_y=0,1,2,\ldots. \tag{2}$$

低い方から N 番目の準位は $n_x+n_y=N-1$ に対応する。非負整数解は $(n_x,n_y)=(0,N-1),(1,N-2),\ldots,(N-1,0)$ の N 通りであり、

$$E_N=N\hbar\omega,\qquad g_N=N\quad(N=1,2,3,\ldots). \tag{3}$$

[3] 角運動量と保存

昇降演算子の定義を足し引きすると

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_x+\hat{a}_x^\dagger),\qquad \hat{p}_x=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}_x^\dagger-\hat{a}_x),$$

であり、y 成分も同様である。直交する方向の演算子は互いに可換なので、

$$\hat{l}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x \tag{4}$$

$$=i\hbar(\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y). \tag{5}$$

$[\hat{a}_j,\hat{a}_j^\dagger]=1$ と異なる方向間の可換性から

$$[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x,\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x]=-\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x,\qquad [\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x]=\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x, \tag{6}$$

$$[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y]=\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y,\qquad [\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y,\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y]=-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y. \tag{7}$$

それぞれの和はゼロとなるため、式(1)より

$$[\hat{H},\hat{l}_z]=0. \tag{8}$$

従って $\hat{l}_z$ は時間に依らない保存量である。

[4] 交換関係による固有値の移動

仮定された交換関係を $|l_z\rangle$ に作用させると

$$\hat{l}_z\hat{A}|l_z\rangle = ([\hat{l}_z,\hat{A}]+\hat{A}\hat{l}_z)|l_z\rangle \tag{9}$$
$$= (\alpha+l_z)\hat{A}|l_z\rangle. \tag{10}$$

したがって $\hat{A}|l_z\rangle \neq 0$ ならば、これは固有値 $l_z+\alpha$ をもつ $\hat{l}_z$ の固有状態である。

[5] 角運動量を一単位ずつ上げ下げする演算子

式(5)から

$$[\hat{l}_z,\hat{a}_x^\dagger] = i\hbar\hat{a}_y^\dagger, \qquad [\hat{l}_z,\hat{a}_y^\dagger] = -i\hbar\hat{a}_x^\dagger. \tag{11}$$

よって $\hat{b}^\dagger = C\hat{a}_x^\dagger + D\hat{a}_y^\dagger$ が $[\hat{l}_z,\hat{b}^\dagger] = \alpha\hat{b}^\dagger$ を満たす条件は

$$-i\hbar D = \alpha C, \qquad i\hbar C = \alpha D. \tag{12}$$

非自明解では $\alpha^2=\hbar^2$ である。$\alpha=+\hbar$ なら $D=iC$、$\alpha=-\hbar$ なら $D=-iC$ となる。$C\geq 0$ と $|C|^2+|D|^2=1$ を用いると、二組は

$$\hat{b}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger), \qquad \hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y), \qquad \alpha_1=+\hbar, \tag{13}$$
$$\hat{b}_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger), \qquad \hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y), \qquad \alpha_2=-\hbar. \tag{14}$$

[6] 円偏光型演算子の交換関係

異なる Cartesian 方向間の交換子はゼロであるから、上の定義を展開して

$$[\hat{b}_1,\hat{b}_1^\dagger] = \tfrac{1}{2}\big([\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger] + (-i)i[\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger]\big) = 1, \tag{15}$$
$$[\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger] = \tfrac{1}{2}\big([\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger] + (-i)(-i)[\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger]\big) = 0. \tag{16}$$

同様にもう一つの対角交換子は 1 で、混合交換子の共役も 0 である。従って

$$[\hat{b}_1,\hat{b}_1^\dagger]=1, \quad [\hat{b}_2,\hat{b}_2^\dagger]=1, \quad [\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger]=0, \quad [\hat{b}_2,\hat{b}_1^\dagger]=0. \tag{17}$$

従って $\hat{b}_1,\hat{b}_2$ は互いに独立な二つのボース昇降演算子である。

[7] 円偏光型演算子での表示

逆変換は

$$\hat{a}_x = \frac{\hat{b}_1+\hat{b}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{a}_y = \frac{i(\hat{b}_1-\hat{b}_2)}{\sqrt{2}}$$

である。これを式(1), (5)に代入すると、整理前の積は

$$\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y = \frac{1}{2}\Big[(\hat{b}_1^\dagger+\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1+\hat{b}_2) + (\hat{b}_1^\dagger-\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\Big], \tag{18}$$
$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{2}\Big[(\hat{b}_1^\dagger-\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1+\hat{b}_2) + (\hat{b}_1^\dagger+\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\Big]. \tag{19}$$

いずれも括弧を展開すると、$\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2$ と $\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1$ の交差項がそれぞれ相殺する。従って

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + 1), \tag{20}$$

$$\hat{l}_z = \hbar(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2). \tag{21}$$

元の直積真空 $|0,0\rangle$ は $\hat{a}_x, \hat{a}_y$ に消されるので、上の定義から $\hat{b}_1|0,0\rangle = \hat{b}_2|0,0\rangle = 0$ である。交換関係を用いて $(\hat{b}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{b}_2^\dagger)^{n_2}|0,0\rangle$ を作ると、$\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$ の固有値はそれぞれ $n_j = 0, 1, 2, \ldots$ となる。同じ状態に式(21)の二つの演算子を作用させれば、エネルギーと角運動量が同時に対角化される。

[8] 第 N 準位の角運動量

式(21)から第 N 準位では $n_1 + n_2 = N - 1$ であり、$l_z = \hbar(n_1 - n_2)$ となる。$n_1 = 0, 1, \ldots, N-1$ を順に選ぶと

$$l_z = \hbar\big(-(N-1), -(N-3), \ldots, N-3, N-1\big), \tag{22}$$

すなわち同じ集合を大きい順に書けば

$$\boxed{l_z = \hbar(N-1),\ \hbar(N-3),\ \ldots,\ -\hbar(N-1)}. \tag{23}$$

値は N 個で、隣り合う値の差は $2\hbar$ である。例えば基底準位 $N = 1$ では $l_z = 0$ だけとなり、エネルギーと縮退度の結果にも一致する。

[9] スピン軌道相互作用

$\sigma_z = s = \pm 1$ は $\hat{l}_z$ と可換であるため、状態 $|n_1, n_2; s\rangle$ は全ハミルトニアンの固有状態である。固有エネルギーは

$$\boxed{E_{n_1,n_2,s} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) + \lambda\hbar s(n_1 - n_2)}, \qquad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = \pm 1. \tag{24}$$

この表示は各量子数に対する準位を与える。λ の値や符号によって準位の順序や縮退の一部が変わりうるため、ここでは特定の順序は仮定しない。

物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 時間発展演算子

時間に依らない $\hat{H}$ に対し、シュレーディンガー方程式の形式解は

$$\boxed{\hat{U}(t-t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]}. \tag{1}$$

指数中は無次元であり、$\hat{U}(0) = \hat{I}$ を満たす。$\hat{H}$ は時間に依存しないので、時間順序積は必要ない。

[2] ユニタリー性

$\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ より

$$\hat{U}(t-t_0)^\dagger = \exp\left[+\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right].$$

指数の中身は同じ演算子のスカラー倍なので互いに可換であり、

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \exp\left[+\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right] = \hat{I}. \tag{2}$$

従って $\hat{U}$ はユニタリーである。

[3] 状態ベクトルの内積

時間発展した状態について

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\hat{U}(t-t_0)^\dagger\hat{U}(t-t_0)|\psi_0\rangle \tag{3}$$

$$= \langle\psi_0|\hat{I}|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\psi_0\rangle, \tag{4}$$

となり、ノルムは保存される。

[4] z 軸周りの発展

$\hat{H} = a\hat{\sigma}_z$ なので、$\hat{\sigma}_z$ の固有値 $+1, -1$ に対応して時間発展演算子は

$$\boxed{\hat{U}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-ia\tau/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{ia\tau/\hbar} \end{pmatrix}}. \tag{5}$$

[5] 位相シフト

一つの選択として

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hbar\phi/\tau \end{pmatrix} \tag{6}$$

とすれば、$\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \mathrm{diag}(1, e^{i\phi}) = \hat{U}_\phi$ となる。$c\hat{I}_2$ を加えると時間発展全体に $e^{-ic\tau/\hbar}$ が掛かるため、絶対位相を無視する場合にはそのようなハミルトニアンも同じ相対位相を実現する。

[6] NOT ゲート

パウリ行列は $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{I}_2$ を満たす。この関係で指数級数を偶数次と奇数次に分けると、任意の実数 x について

$$e^{ix\hat{\sigma}_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\hat{I}_2 + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\hat{\sigma}_x = \cos x\, \hat{I}_2 + i \sin x\, \hat{\sigma}_x \tag{7}$$

となる。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_2 - \hat{\sigma}_x) = \frac{\pi\hbar}{2\tau}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

とすると

$$\hat{U}(\tau) = e^{-i\pi(\hat{I}_2 - \hat{\sigma}_x)/2} = e^{-i\pi/2} e^{i\pi\hat{\sigma}_x/2} = (-i)(i\hat{\sigma}_x) = \hat{\sigma}_x. \tag{9}$$

[7] 任意方向のパウリ演算子

$$\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \qquad \hat{N} = \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

とおく。$|\boldsymbol{n}| = 1$ であり、パウリの積 $\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \delta_{jk}\hat{I}_2 + i\sum_l \epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l$ の反対称項は $n_j n_k$ と縮約すると消える。よって $\hat{N}^2 = \hat{I}_2$ である。$c = \cos(a\tau/\hbar)$、$s = \sin(a\tau/\hbar)$ とこの節で略記する。$\hat{N}$ と $\hat{I}_2$ は可換で、[6] と同じ偶奇分離を $\hat{N}$ に適用すると

$$\hat{U}(\tau) = e^{-ib\tau/\hbar} e^{-ia\tau\hat{N}/\hbar} \tag{10}$$

$$= e^{-ib\tau/\hbar}\left[\cos\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\hat{I}_2 - i\sin\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\hat{N}\right] \tag{11}$$

$$= e^{-ib\tau/\hbar}\begin{pmatrix} c - is\cos\theta & -is\sin\theta e^{-i\phi} \\ -is\sin\theta e^{i\phi} & c + is\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{12}$$

[8] アダマールゲート

与えられた $\hat{U}_H$ はエルミートかつ $\hat{U}_H^2 = \hat{I}_2$ である。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_2 - \hat{U}_H) = \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{2}\tau}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

と選べば、$\exp[-i\hat{H}\tau/\hbar] = \hat{U}_H$ である。

[9] 制御位相シフト

計算基底の順を $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$ とする。対角ハミルトニアン

$$\hat{H} = \mathrm{diag}\left(0, 0, 0, -\frac{\hbar\phi}{\tau}\right) \tag{14}$$

を用いると $\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, e^{i\phi})$ となり、指定された $\hat{U}_{C-\phi}$ を得る。

[10] 制御 NOT

指定された $\hat{U}_{\mathrm{CNOT}}$ はエルミートで、$\hat{U}_{\mathrm{CNOT}}^2 = \hat{I}_4$ である。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_4 - \hat{U}_{\mathrm{CNOT}}) = \frac{\pi\hbar}{2\tau}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

とすれば $\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \hat{U}_{\mathrm{CNOT}}$ となる。

物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1] 次元の確認

密度 ρ の次元は ML^{-3}、体積の次元は L^3、加速度の次元は LT^{-2} である。従って運動方程式の左辺は力の次元

$$[\rho \Delta V\, \partial_t^2 \boldsymbol{u}] = (ML^{-3})L^3(LT^{-2}) = MLT^{-2}.$$

$\boldsymbol{F}$ は単位体積当たりの力なので $[\boldsymbol{F}] = ML^{-2}T^{-2}$ であり、$[\boldsymbol{F}\Delta V] = MLT^{-2}$ となる。両辺の次元は一致する。

[2] 下面に働く力

上面と下面が接する媒質の微小面に働く力は、作用・反作用により等しい大きさで逆向きである。上面の外向き法線は $+x_3$ 方向で、その応力ベクトルが $\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}', t)$ である。従って隣接する体積素が共有面を通じて下面に及ぼす応力ベクトルは

$$-\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}'', t). \tag{1}$$

この符号は、面の法線を反転したことに対応する。

[3] 面応力の合力

x_k に垂直な正側の面と負側の面が x_1 方向に及ぼす力の差は

$$\left[p_1^{(k)}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_k, t\right) - p_1^{(k)}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_k, t\right)\right]\Delta A_k, \qquad \Delta A_k = \prod_{r\neq k}\Delta x_r.$$

微小量の一次まで Taylor 展開すると、これは $\partial p_1^{(k)}/\partial x_k\, \Delta x_k \Delta A_k$ である。$\Delta x_k \Delta A_k = \Delta V$ だから、$k = 1, 2, 3$ の三対の面を足し、体積で割ると

$$F_1(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_1^{(k)}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_k}. \tag{2}$$

[4] 等方弾性体の運動方程式

$F_j = \sum_k \partial_k p_j^{(k)}$ と構成式を用いると

$$F_j = \frac{1}{2}\sum_{k,m,n} c_{jkmn}\partial_k(\partial_n u_m + \partial_m u_n) \tag{3}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\sum_{k,m,n} \delta_{jk}\delta_{mn}\partial_k(\partial_n u_m + \partial_m u_n) \tag{4}$$

$$+ \frac{\mu}{2}\sum_{k,m,n} (\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km})\partial_k(\partial_n u_m + \partial_m u_n). \tag{5}$$

各 Kronecker の縮約を行う。λ 項では $\delta_{jk}\delta_{mn}$ が $k=j, m=n$ を選び、$\lambda\partial_j \sum_m \partial_m u_m$ となる。二つの μ 項はそれぞれ

$$\frac{\mu}{2}\sum_k (\partial_k^2 u_j + \partial_k\partial_j u_k) \tag{6}$$

となるため、合わせて $\mu\nabla^2 u_j + \mu\partial_j(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ を与える。従って

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}), \qquad \boxed{A = \lambda + \mu}. \tag{7}$$

[5] 縦波・横波の位相速度

縦波の平面波 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ では $\boldsymbol{u}_0 \parallel \boldsymbol{k}$ なので $\nabla^2\boldsymbol{u} = -k^2\boldsymbol{u}$ と $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = -k^2\boldsymbol{u}$ である。運動方程式から

$$\rho\omega^2 = (\lambda+2\mu)k^2, \qquad \boxed{v_l = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}}.$$

横波では $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_0 = 0$ で発散項が消えるため

$$\rho\omega^2 = \mu k^2, \qquad \boxed{v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}.$$

[6] 横波のみの反射

構成式を表面法線 x_2 について縮約すると

$$p_1^{(2)} = \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2), \qquad p_2^{(2)} = \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u} + 2\mu\partial_2 u_2 \tag{8}$$

である。入射波と反射波の境界上の位相をそれぞれ $f = e^{i(k_t \sin\alpha_t x_1 - \omega_t t)}$、$f' = e^{i(k'_t \sin\alpha'_t x_1 - \omega'_t t)}$ と書く。横波の偏極ベクトルと波数ベクトルを代入すると

$$p_1^{(2)} = -i\mu\big[k_t\cos(2\alpha_t)u_t f + k'_t\cos(2\alpha'_t)u'_t f'\big], \qquad p_2^{(2)} = 2i\mu\big[k_t\sin\alpha_t\cos\alpha_t\, u_t f - k'_t\sin\alpha'_t\cos\alpha'_t\, u'_t f'\big]. \tag{9}$$

任意の x_1, t で非零の応力成分同士が相殺するには、両者の周波数と接線波数が等しくなければならない。$\alpha_t = \pi/4$ で $p_1^{(2)}$ の係数が消える場合も、$p_2^{(2)}$ の係数は非零である。境界 $x_2 = 0$ 上の位相は、位置 x_1 と時刻 t に依存する因子 $e^{i(qx_1-\omega t)}$ で決まる。時間に依らない平面境界では、入射波と反射波の周波数が等しく、境界上の接線方向波数も等しい。従って

$$\omega'_t = \omega_t, \qquad k'_t \sin\alpha'_t = k_t \sin\alpha_t. \tag{10}$$

同じ媒質中の横波であるから $k'_t = \omega'_t/v_t = k_t$ であり、角度範囲から

$$\boxed{\alpha'_t = \alpha_t, \quad \omega'_t = \omega_t, \quad \boldsymbol{k}'_t = k_t(\sin\alpha_t, -\cos\alpha_t)^{\mathsf{T}}}. \tag{11}$$

これは自由表面の全境界条件に対する位相整合である。$p_1^{(2)}$ だけを見るとその横波成分は $\cos 2\alpha_t$ に比例するため、$\alpha_t = \pi/4$ ではこの応力成分が位相整合の情報を持たない。この場合は、同じく自由端条件に含まれる $p_2^{(2)} = 0$ が非零の成分を与え、式(10)を課す。

[7] 横波だけで反射する角度

以下、式(10)により境界上で共通の位相因子をくくる。横波の発散はゼロであり、二つの表面応力成分は

$$p_1^{(2)} = -i\mu k_t \cos(2\alpha_t)(u_t + u'_t), \tag{12}$$

$$p_2^{(2)} = 2i\mu k_t \sin\alpha_t \cos\alpha_t (u_t - u'_t). \tag{13}$$

角度が $\alpha_t = 0$ のとき、式(13)は自動的にゼロであり、式(12)を満たす反射振幅は

$$\boxed{u'_t = -u_t \qquad (\alpha_t = 0)}. \tag{14}$$

この法線入射枝を、式(13)を因子で割るときに落としてはならない。

一方、$0 < \alpha_t < \pi/2$ では式(13)から $u'_t = u_t$。これを $p_1^{(2)} = 0$ に代入すると $\cos 2\alpha_t = 0$ なので

$$\boxed{\alpha_t = \frac{\pi}{4} \qquad (0 < \alpha_t < \pi/2)}. \tag{15}$$

従って問題の範囲における全ての入射角は 0 と $\pi/4$ である。

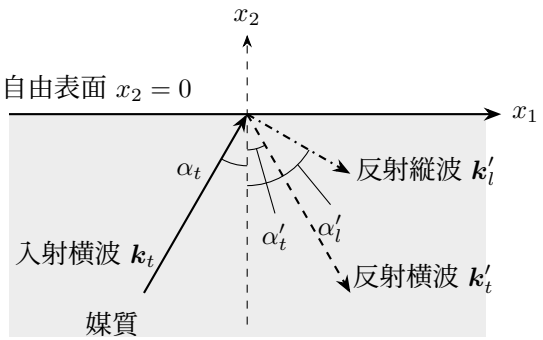


図 1: 自由表面での入射横波と、媒質内へ進む反射横波・縦波。$\lambda = \mu$、$\alpha_t = 30°$、$\alpha'_l = 60°$ の伝搬波の例。波数ベクトルの長さと接線成分は各波の速度と位相整合条件に合わせた。角度は表面の法線から測る。

[8] 接線方向波数の一致

境界 $x_2 = 0$ で応力を評価すると、各波の位相因子は $e^{i(k_x x_1 - \omega t)}$ となる。自由表面の二つの応力条件が任意の x_1, t で成り立つには、非零の反射応力が入射波と同じ時間周波数・接線方向波数を持つ必要がある。縦波では変位振幅は波数ベクトルに比例するので、比例係数を $A_l \neq 0$ として $\boldsymbol{u}'_{l0} = A_l \boldsymbol{k}'_l$ と書く。構成式から境界上の縦波応力は

$$\begin{pmatrix} p_{1,l}^{(2)} \\ p_{2,l}^{(2)} \end{pmatrix} = iA_l \begin{pmatrix} 2\mu k'_{l,1} k'_{l,2} \\ \lambda\{(k'_{l,1})^2 + (k'_{l,2})^2\} + 2\mu (k'_{l,2})^2 \end{pmatrix} e^{i(k'_{l,1} x_1 - \omega'_l t)}.$$

縦波の分散関係は $(k'_{l,1})^2+(k'_{l,2})^2=(\omega'_l/v_l)^2$ である。$\lambda,\mu>0$ のもとで二つの応力係数が同時に零にはならない。実際、第 1 係数が零なら波数成分の一方が零となり、非零周波数の分散関係から第 2 係数は非零である。この議論は法線成分が複素数の場合も成り立ち、二乗には複素共役を取らない。従って、位相整合条件は

$$\omega'_l=\omega_t\equiv\omega,\qquad k'_{l,1}=k_t\sin\alpha_t\equiv q.$$

実際に媒質内へ伝搬する縦波では $k'_l=\omega/v_l$ であり、$\boldsymbol{k}'_l=k'_l(\sin\alpha'_l,-\cos\alpha'_l)^{\mathsf{T}}$ と書けるので、

$$\boxed{k_t\sin\alpha_t=k'_l\sin\alpha'_l}. \tag{16}$$

これは境界に平行な並進対称性から生じる位相整合条件である。実数の反射角が存在する範囲は

$$\sin\alpha'_l=\frac{v_l}{v_t}\sin\alpha_t\le 1,\qquad \boxed{\sin\alpha_t\le\frac{v_t}{v_l}=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}}.$$

等号では縦波は表面に平行に伝搬する限界となる。これを超える入射角では、法線波数は分散関係から虚数となる。媒質が $x_2<0$ にあることから、内部へ減衰する枝は

$$k'_{l,2}=-i\sqrt{q^2-(\omega/v_l)^2},\qquad e^{ik'_{l,2}x_2}=e^{\sqrt{q^2-(\omega/v_l)^2}\,x_2}.$$

この場合は実反射角の射線表示を使えないが、接線成分 $k'_{l,1}=q$ の整合は保たれる。図 1は伝搬縦波が存在する範囲の例である。この内部減衰は入射横波に伴う散乱場の縦波成分である。原問は表面に局在する波の励起を除くが、その除外を散乱に伴う内部減衰成分にも適用すると、一般の超臨界角で自由表面条件を満たせない。ここでは必要な減衰縦波成分を残し、独立した表面固有波の励起は扱わない。

物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 箱中の運動量状態数

周期境界条件では各運動量成分が $p_j = 2\pi\hbar n_j/L$ と量子化される。運動量空間の 1 状態当たりの体積は $(2\pi\hbar/L)^3$ だから、単位体積当たり

$$\boxed{g_p = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3} \tag{1}$$

個の状態がある。粒子のスピン自由度は数えない。

[1.2] 三次元箱の状態密度

運動量の大きさが p から $p+dp$ の殻の体積は $4\pi p^2 dp$ であり、$\epsilon = p^2/(2m)$ より $dp/d\epsilon = m/p$ である。従って

$$D_3(\epsilon)d\epsilon = 4\pi p^2 \frac{dp}{d\epsilon} d\epsilon \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3, \tag{2}$$

$$D_3(\epsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}. \tag{3}$$

[1.3] 三次元箱の臨界温度

各 $\epsilon > 0$ の Bose 占有数は μ を 0 へ近づけるほど増える。凝縮直前は $\mu \to 0^-$ であり、連続近似で励起状態の最大粒子数は

$$N_{\mathrm{ex}}^{\max}(T) = \int_0^\infty \frac{D_3(\epsilon)}{e^{\epsilon/T}-1} d\epsilon \tag{4}$$

$$= \frac{L^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} T^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx \tag{5}$$

$$= L^3 \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \tag{6}$$

これが N に達する温度が臨界温度である。したがって

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left[\frac{N}{L^3\zeta(3/2)}\right]^{2/3}}. \tag{7}$$

積分は $\epsilon \to 0$ で $\epsilon^{-1/2}$ に比例して可積分である。

[1.4] 三次元箱の凝縮粒子数

離散的な基底状態の占有数は $N_0 = (e^{-\mu/T} - 1)^{-1}$ である。N_0 が巨視的になると $\mu \to 0^-$ となり、連続近似で数える励起状態は $\mu = 0$ での最大数を占める。従って $N = N_0 + N_{\rm ex}^{\max}(T)$ であり、$T < T_c$ では励起粒子数は $N_{\rm ex}(T) = N(T/T_c)^{3/2}$ であり、残りが基底状態に入るので

$$\boxed{N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]}. \tag{8}$$

[1.5] 二次元一様系

二次元箱では運動量空間の円環 $2\pi p\,dp$ と $dp/d\epsilon = m/p$ の積により、状態密度はエネルギーに依らない定数 $D_2 = mL^2/(2\pi\hbar^2)$ となる。$\mu < 0$ に対して

$$N_{\rm ex} = D_2 \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/T} - 1} \tag{9}$$

$$= -D_2 T \log(1 - e^{\mu/T}). \tag{10}$$

$\mu \to 0^-$ でこの数は対数発散する。従って有限温度で全粒子を収容する最大励起粒子数が有限にならず、この理想一様二次元系では有限温度の凝縮は起こらない。

[2.1] 二次元調和トラップの状態密度

エネルギー $\epsilon = n\hbar\omega$ の縮退度は $n+1$ である。エネルギーが ϵ 以下の状態数は、大きな $n = \epsilon/(\hbar\omega)$ について

$$N_{\rm st}(\epsilon) = \sum_{j=0}^{n}(j+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^2} + O\Big(\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\Big). \tag{11}$$

そのエネルギー微分の最高次項は

$$\boxed{D_{\rm tr}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(\hbar\omega)^2}}. \tag{12}$$

[2.2] トラップ中の臨界温度

臨界点では化学ポテンシャルは基底エネルギー 0 に達する。$\hbar\omega \ll T_c$ の連続近似で基底状態を別に扱い、励起状態数の主要項を積分すると、全粒子数は

$$N = \int_0^\infty \frac{D_{\rm tr}(\epsilon)}{e^{\epsilon/T_c} - 1} d\epsilon \tag{13}$$

$$= \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2. \tag{14}$$

よって

$$\boxed{T_c = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\hbar\omega\sqrt{N}}. \tag{15}$$

[2.3] 有限な臨界温度を保つ極限

与えられたポテンシャルは $V = V_0(x^2 + y^2)/L_0^2$ であり、調和振動子形 $m\omega^2(x^2 + y^2)/2$ と係数を比べると

$$\omega = \frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{2V_0}{m}}. \tag{16}$$

V_0 を固定すると $T_c \propto \sqrt{N}/L_0$ である。$N \to \infty$ でも T_c が有限かつ非零に保たれる条件は

$$\boxed{L_0 \propto N^{1/2}}. \tag{17}$$

[2.4] トラップ中の凝縮粒子数

臨界以下では励起粒子数は $N_{\rm ex}(T) = N(T/T_c)^2$ なので

$$\boxed{N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]}. \tag{18}$$

物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1] 静的な双極子ポテンシャル

点 1,2 の位置は $z = \pm l/2$ なので、$r_\pm = (r^2 \mp rl\cos\theta + l^2/4)^{1/2}$ である。l/r の一次まで

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{l\cos\theta}{r^2} + O(l^3/r^4).$$

従って $ql = \alpha_0 E_0$ を用いれば

$$\varphi = \frac{\alpha_0 E_0 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \boxed{C = 0, \quad D = 1}.$$

[2] 遅延ポテンシャル

$\tau = t - r/c$ とおくと、$r_\pm \simeq r \mp (l/2)\cos\theta$ より

$$q(t - r_\pm/c)l = \alpha_0 E_0 \cos\left(\omega_0\tau \pm \frac{\omega_0 l\cos\theta}{2c}\right) \simeq \alpha_0 E_0 \left[\cos(\omega_0\tau) \mp \frac{\omega_0 l\cos\theta}{2c}\sin(\omega_0\tau)\right].$$

また $1/r_\pm \simeq r^{-1} \pm l\cos\theta/(2r^2)$. 代入すると

$$\varphi = \frac{\alpha_0 E_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\omega_0}{cr}\sin(\omega_0\tau) + \frac{1}{r^2}\cos(\omega_0\tau)\right],$$

ゆえに

$$\boxed{F = -\frac{\omega_0}{c}\sin(\omega_0\tau), \qquad G = \cos(\omega_0\tau)}.$$

[3] ベクトルポテンシャル

$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$ かつ $\dot{p}(\tau) = -\alpha_0 E_0\omega_0\sin(\omega_0\tau)$ より

$$\boxed{\boldsymbol{A} = -\frac{\alpha_0 E_0\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin(\omega_0\tau)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)}.$$

[4] スカラーポテンシャルの勾配

放射場の次数だけを保つ。遅延時刻 $\tau = t - r/c$ を用いると、例えば

$$\partial_r\frac{\sin(\omega_0\tau)}{r} = -\frac{\omega_0\cos(\omega_0\tau)}{cr} - \frac{\sin(\omega_0\tau)}{r^2} \tag{1}$$

であり、遅延引数の微分から $1/r$ 項が生じる。角度微分は $1/r^2$ にとどまる。

$$\boxed{\nabla\varphi = \frac{\alpha_0 E_0\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_r + O(r^{-2})}.$$

[5] 放射電場と磁束密度

時間微分は $\partial_t \boldsymbol{A} = -\alpha_0 E_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0\tau)(\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta)/(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)$. その動径成分は $-\nabla\varphi$ の動径成分と相殺し、

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_\theta}, \qquad \boxed{\boldsymbol{B} = -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_\phi}.$$

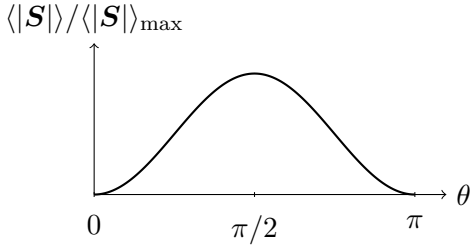
磁場の方位角成分は $B_\phi = r^{-1}\{\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r\}$ である。$\partial_r\tau = -1/c$ により第 1 項から上の $1/r$ 項が生じ、第 2 項は $O(r^{-2})$ である。従って $B_\phi = E_\theta/c$。両場は動径方向に直交し、$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$。

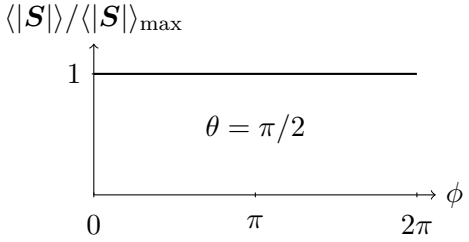
[6] ポインティングベクトルと角度分布

$\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_r$ なので、瞬時値は

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{(\alpha_0 E_0 \omega_0^2)^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_r}.$$

従って距離依存は r^{-2}、方位角 ϕ に依らない。時間平均した角度分布は $\langle|\boldsymbol{S}|\rangle \propto \sin^2\theta$ で、$\theta = 0, \pi$ で零、$\theta = \pi/2$ で最大となる。下図は距離 r を固定した時間平均の角度分布である。左は θ 依存性、右は $\theta = \pi/2$ に固定した ϕ 依存性を示す。瞬時値にも同じ角度因子があり、時刻による変化は $\cos^2(\omega_0\tau)$ による。





[7] 変調された分極率と側帯波

[2] の同じ一次展開を任意の時間依存 $p(t)$ に適用し、[3] の電流からのポテンシャルと合わせると

$$\varphi = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p(\tau)}{r^2} + \frac{\dot{p}(\tau)}{cr}\right], \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\dot{p}(\tau)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_z. \tag{2}$$

$\partial_r\tau = -1/c$ より、放射場の $1/r$ 項は

$$-\nabla\varphi\big|_{1/r} = \frac{\ddot{p}(\tau)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_r, \tag{3}$$

$$-\partial_t\boldsymbol{A} = -\frac{\ddot{p}(\tau)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta). \tag{4}$$

動径成分が相殺するので、$\boldsymbol{E} = \sin\theta\,\ddot{p}(\tau)\boldsymbol{e}_\theta/(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)$ となる。積和公式を使うと

$$p(\tau) = E_0\left[\alpha_0\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\right],$$

$$\ddot{p}(\tau) = -E_0\left[\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0+\omega_v)^2\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0-\omega_v)^2\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\right].$$

従って

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{E_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\Big[\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0+\omega_v)^2\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0-\omega_v)^2\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\Big]\boldsymbol{e}_\theta.$$

散乱波に含まれる正の角振動数は $\boxed{\omega_0,\ \omega_0+\omega_v,\ \omega_0-\omega_v}$ である（$\omega_v \ll \omega_0$）。

物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] ハミルトニアンと振幅方程式

$B_x = B_1\cos\omega t,\ B_y = B_1\sin\omega t,\ B_z = B_0$ を問題の行列表式に代入する。$\omega_0 = -2\mu B_0/\hbar$, $\omega_1 = -2\mu B_1/\hbar$ より

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}.$$

$i\hbar\, d|\psi\rangle/dt = \hat{H}|\psi\rangle$ に $|\psi\rangle = (\alpha,\beta)^T$ を代入して

$$i\dot{\alpha} = \frac{\omega_0}{2}\alpha + \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}\beta, \qquad i\dot{\beta} = \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}\alpha - \frac{\omega_0}{2}\beta.$$

[1.2] 回転枠

$\alpha = ae^{-i\omega_0 t/2}$, $\beta = be^{i\omega_0 t/2}$ と書き換えると、対角項は相殺される。

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\omega-\omega_0)t} \\ e^{i(\omega-\omega_0)t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \boxed{A(t) = e^{-i(\omega-\omega_0)t}}.$$

以下 $\Delta = \omega - \omega_0$ とする。静磁場だけの区間では a, b は一定であり、実験室系の位相因子のみが進む。

[2.1] 単一パルスの遷移確率

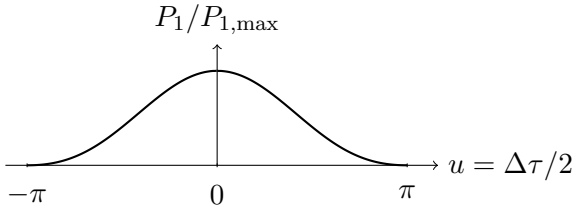
初期状態 $|-\rangle$ は $a(0) = 0, b(0) = 1$ である。弱遷移近似 $b \simeq 1$ のもとで

$$\dot{a} = -\frac{i\omega_1}{2}e^{-i\Delta t}, \qquad a(\tau) = \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta\tau} - 1).$$

したがって

$$\boxed{P_1(\omega) = \frac{\omega_1^2}{\Delta^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) = \frac{\omega_1^2\tau^2}{4}\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)}. \quad \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}.$$

$\Delta \to 0$ では連続的に $P_1(\omega_0) = \omega_1^2\tau^2/4$ となる。共鳴で最大、最近傍の零点は $\boxed{\omega = \omega_0 \pm 2\pi/\tau}$。図はピークを 1 に規格化した中央ローブで、横軸は $u = \Delta\tau/2$ とする。



[2.2] 単一パルスの励起スペクトル

周波数の離調に対して中央ローブは sinc^2 形であり、両側の最近接零点は共鳴から等距離にある。パルス時間 τ を長くすると、零点間隔 $4\pi/\tau$ が狭くなる。

[3.1] 二つのパルスと Ramsey 干渉

第一パルス後の回転枠振幅は

$$a(\tau) = \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta\tau} - 1).$$

自由発展中は a, b が一定である。第二パルス中も同じ実験室位相の回転場が続くので、$\dot{a} = -i\omega_1 e^{-i\Delta t}/2$ を T から $T+\tau$ まで積分すると

$$\begin{aligned} a(T+\tau) &= a(\tau) + \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta(T+\tau)} - e^{-i\Delta T}) \\ &= \frac{\omega_1}{2\Delta}(1 + e^{-i\Delta T})(e^{-i\Delta\tau} - 1). \end{aligned}$$

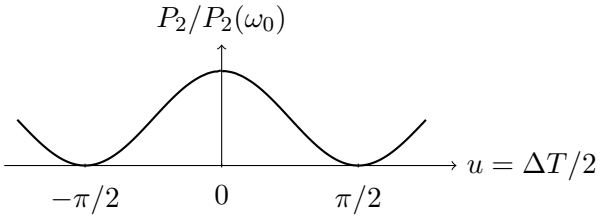
従って

$$\boxed{P_2(\omega) = \frac{4\omega_1^2}{\Delta^2}\cos^2\left(\frac{\Delta T}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)}.$$

共鳴極限は $P_2(\omega_0) = \omega_1^2\tau^2$ で、弱遷移条件はこの値が十分小さいことを含む。$T \gg \tau$ では sinc^2 包絡内に細い干渉縞が並び、最近接零点は Ramsey 因子から

$$\boxed{\Omega_1 = \omega_0 - \frac{\pi}{T}, \qquad \Omega_2 = \omega_0 + \frac{\pi}{T}}, \qquad \boxed{\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T}}.$$

この線幅で定義する測定精度は、間隔 T を長くすると改善する。規格化スペクトルの模式図は $\tau/T = 0.1$ の例で、包絡の最近傍零点より内側にある最初の Ramsey 零点を示す。



[4.1] 二重スリットとの対応

二重スリットの干渉因子の隣接暗線間隔 $\lambda L/l$ に、Ramsey 零点間隔 $2\pi/T$ が対応する。また単スリット包絡の最初の暗線間隔 $2\lambda L/D$ に、パルス包絡の最初の零点間隔 $4\pi/\tau$ が対応する。両者を比較して

$$\frac{2\pi}{T} \leftrightarrow \frac{\lambda L}{l}, \qquad \frac{4\pi}{\tau} \leftrightarrow \frac{2\lambda L}{D}; \qquad \boxed{T \leftrightarrow l, \quad \tau \leftrightarrow D}.$$

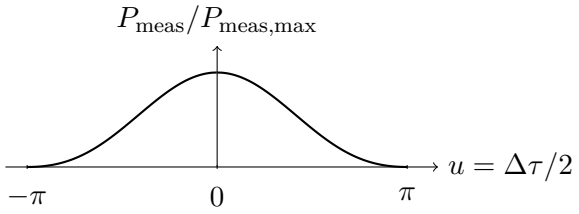
T は二つのパルス間隔に由来する細かい干渉縞、τ は有限パルス長に由来する広い回折包絡を決める。

[4.2] 中間測定による干渉の消失

中間時刻 $\tau < t < T$ の z 測定で $|+\rangle$ を得る確率は P_1、$|-\rangle$ は $1-P_1$ である。測定により二つのパルス間の相対位相は失われる。$|+\rangle$ から始める第二パルスでは $a \simeq 1$ として振幅方程式を使うと、$b(T+\tau) - b(T) = -(i\omega_1/2)\int_T^{T+\tau} e^{i\Delta t}\,dt$ である。その絶対値二乗は P_1 なので、第二パルスはどちらの基底状態からも反対状態への遷移確率が P_1 となる。最後に $|+\rangle$ を得る全確率は

$$P_{\mathrm{meas}} = (1-P_1)P_1 + P_1(1-P_1) = 2P_1(1-P_1) \simeq 2P_1 \qquad (P_1 \ll 1).$$

従って二重パルスの細かい Ramsey 干渉縞は消え、$P_1(\omega)$ と同じ単一パルスの広い sinc^2 形が残る（高さは弱遷移近似で約 2 倍）。図は弱遷移近似の $2P_1$ をピークで規格化して描く。



物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 一様な無限鎖

n 番目の質点は左右のばねから $k(x_{n+1}-x_n)$, $k(x_{n-1}-x_n)$ の力を受けるため

$$\boxed{m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})}.$$

[1.2] 平面波の分散関係

$x_n = e^{iqn}c_q(t)$ と置くと

$$\boxed{\ddot{c}_q + \frac{2k}{m}(1-\cos q)c_q = 0} \quad \left(= \ddot{c}_q + \frac{4k}{m}\sin^2\frac{q}{2}\,c_q = 0\right).$$

物理変位はこの複素解の実部である。

[1.3] 固有振動数

$0 < q < 2\pi$ では

$$\boxed{\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\frac{q}{2}\right|}, \qquad c_q(t) = C_+e^{i\omega_q t} + C_-e^{-i\omega_q t}.$$

k/m の次元は s^{-2} であり、ω_q は角振動数の次元を持つ。

[1.4] 一様変位モード

$q = 0$ では復元力が消え、$\ddot{c}_0 = 0$ より

$$\boxed{c_0(t) = At + B}.$$

定数項は鎖全体の並進、時間一次項は一様速度の並進に対応する。

[2.1] 質量欠陥を含む運動方程式

質量が変わる原点と通常のサイトでは

$$M\ddot{x}_0 = k(x_1 - 2x_0 + x_{-1}), \qquad m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (n \neq 0).$$

隣り合うばねは両質点に等大反対向きの力を及ぼすので、原点の質量だけを M に置き換える。

[2.2] バルクの振動数

欠陥から離れた $n \le -2$ と $n \ge 1$ では質量は m である。$e^{\pm iqn - i\omega_q t}$ を代入すれば

$$\boxed{m\omega_q^2 = 2k(1-\cos q) = 4k\sin^2\frac{q}{2}},$$

すなわち [1.3] の分散関係が両側で成り立つ。

[2.3] 界面での連立方程式

入射・反射・透過波を

$$x_n(t) = \begin{cases} (e^{iqn} + R_q e^{-iqn})e^{-i\omega_q t}, & n \le -1, \\ T_q e^{iqn} e^{-i\omega_q t}, & n \ge 0 \end{cases}$$

とする。原点では $x_0 = T_q e^{-i\omega_q t}$, $x_1 = T_q e^{iq} e^{-i\omega_q t}$, $x_{-1} = (e^{-iq} + R_q e^{iq})e^{-i\omega_q t}$. これを質量 M の運動方程式に代入すると

$$\left(2 - \frac{M\omega_q^2}{k} - e^{iq}\right) T_q - e^{iq} R_q = e^{-iq}.$$

$n = -1$ の式には $x_{-2} = (e^{-2iq} + R_q e^{2iq})e^{-i\omega_q t}$ を代入し、バルク分散を使うと

$$2\cos q(e^{-iq} + R_q e^{iq}) = e^{-2iq} + R_q e^{2iq} + T_q \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T_q - R_q = 1}.$$

従って

$$\boxed{\left(2 - e^{iq} - \frac{4M}{m}\sin^2\frac{q}{2}\right) T_q - e^{iq} R_q = e^{-iq}, \qquad R_q = T_q - 1}.$$

[2.4] 透過・反射振幅

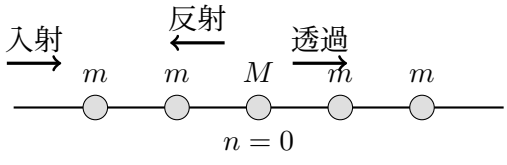
$R_q = T_q - 1$ を界面式へ代入し、$m\omega_q^2/k = 2 - 2\cos q$ を用いると

$$\boxed{T_q = \frac{e^{-iq} - e^{iq}}{2(1-M/m) + (M/m)e^{-iq} - (2-M/m)e^{iq}}}, \qquad \boxed{R_q = T_q - 1}.$$

この複素振幅には界面の位相も含まれる。

[2.5] 質量極限の解釈

$M = m$ では分子・分母が等しく $T_q = 1, R_q = 0$ となり、鎖は一様で散乱しない。$M \to \infty$ では有限な $0 < q < \pi$ に対して $T_q \to 0$, $R_q \to -1$ であり、原点が動かない固定端から位相反転して反射する。



[3.1] 周期境界条件

周期条件 $A_q = C_q e^{iqL}$, $B_q = D_q e^{-iqL}$ は $C_q = A_q e^{-iqL}$, $B_q = D_q e^{-iqL}$ と同値である。$\binom{C_q}{B_q} = S_q \binom{A_q}{D_q}$ と合わせると、入射係数ベクトルは S_q の固有ベクトルで固有値 e^{-iqL} を持つ。従って

$$\det(S_q - e^{-iqL} I) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{e^{-iqL} = T_q + R_q \quad \text{or} \quad e^{-iqL} = T_q - R_q}.$$

S_q は $(1,1)^{\mathsf{T}}$ と $(1,-1)^{\mathsf{T}}$ にそれぞれ固有値 $T_q + R_q$ と $T_q - R_q$ で作用する。二固有値が異なれば、各根は独立な一つの振動モードを与える。

[3.2] 一様質量 $M = m$

このとき $T_q = 1, R_q = 0$ なので

$$e^{-iqL} = 1, \qquad \boxed{q = \frac{2\pi l}{L}}.$$

$0 < q < \pi$ では $l = 1, \ldots, L/2 - 1$。各許容 q で二方向の平面波が独立なので正の内部モードは $L - 2$ 個で、

$$\boxed{\omega_l = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{l\pi}{L}}.$$

開区間に含めない $q = 0$ は一様並進、$q = \pi$ は隣り合う質点が逆向きに動く帯域端モードであり、合わせて一様鎖の L 個の座標自由度を満たす。

[3.3] 質量 $M = 2m$

透過振幅は

$$T_q = \frac{e^{-iq} - e^{iq}}{2(e^{-iq} - 1)}, \qquad T_q - R_q = 1, \qquad T_q + R_q = 2T_q - 1 = e^{iq}.$$

従って二つの固有値条件から

$$q = \frac{2\pi l}{L} \quad (l = 1, \ldots, L/2 - 1), \qquad q = \frac{2\pi l}{L+1} \quad (l = 1, \ldots, L/2),$$

いずれも $0 < q < \pi$ を満たす。対応する振動数は両系列について

$$\boxed{\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{q}{2}}.$$

系列間に重複はなく、式 (2) 型の伝搬モード数は $(L/2 - 1) + L/2 = L - 1$ 個となる。残り 1 個は $q = 0$ の一様並進モードである。これら L 個で全座標自由度を満たすため、別の局在高周波モードは加わらない。

[3.4] 固定質点極限 $M \to \infty$

この極限では $T_q \to 0$, $R_q \to -1$ となり、周期条件の固有値は ± 1。従って

$$e^{-iqL} = \pm 1, \qquad \boxed{q_j = \frac{j\pi}{L} \quad (j = 1, \ldots, L-1)}.$$

固有振動数は $\boxed{\omega_j = 2\sqrt{k/m}\sin(j\pi/(2L))}$. 中央の質点は動かないため、有限質量の自由度は他の $L - 1$ 個だけであり、上の解が全ての正の振動モードを数え尽くす。

物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1] 異種最近接対と内部エネルギー

一つの A 原子には z 個の最近接サイトがあり、その B 原子占有確率は $(1-x)$ と近似する。A 原子を持つサイトから数えれば異種対を重複なく数えるため

$$N_{AB} = N_A z \frac{N_B}{N} = zNx(1-x), \qquad \boxed{E = zNVx(1-x)}.$$

[2] 配置エントロピー

$N_A = xN$, $N_B = (1-x)N$ の配置数は $N!/(N_A!N_B!)$ である。Stirling 近似より

$$\begin{aligned} S &= k_B \log \frac{N!}{N_A!N_B!} \\ &\simeq k_B[N\log N - N_A \log N_A - N_B \log N_B] \\ &= \boxed{-k_B N[x\log x + (1-x)\log(1-x)]}. \end{aligned}$$

[3] 自由エネルギー

$$\boxed{F = E - TS = N\left\{zVx(1-x) + k_B T[x\log x + (1-x)\log(1-x)]\right\}}, \qquad f(x) = F/N.$$

したがって

$$f(x) = zVx(1-x) + k_B T[x\log x + (1-x)\log(1-x)].$$

微分すると

$$f'(x) = zV(1-2x) + k_B T \log\frac{x}{1-x}.$$

[4] 停留条件関数

$f'(x) = 0$ を問題の形に整理すると

$$\frac{zV}{k_B T}(2x-1) = g(x), \qquad \boxed{g(x) = \log\frac{x}{1-x}}.$$

$g(1-x) = -g(x)$ で、$g'(x) = 1/[x(1-x)]$、特に $g'(1/2) = 4$。

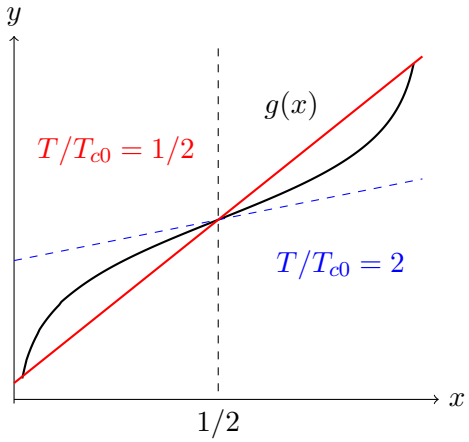
[5] 臨界温度

中心近傍で交点の個数が変わるのは、直線と $g(x)$ の傾きの差 $g'(x) - 2zV/(k_BT)$ が中心でゼロになるときである。$g'(x) = 1/[x(1-x)]$ は中心で最小値 4 を取るため、臨界点では直線の傾き $2zV/(k_BT)$ と $g'(1/2) = 4$ が一致する。従って

$$\boxed{T_{c0} = \frac{zV}{2k_B}}.$$

[6] 交点による臨界温度の判定

以下の図では同じ $g(x)$ と、傾き $zV/(k_BT)$ に比例する直線を比較する。$T > T_{c0}$ では中心 $x = 1/2$ でのみ交わる。$T < T_{c0}$ では中心に加えて二つの対称な交点 $x = 1/2 \pm \delta_0$ が生じる。



図の直線の傾きは高温側で $2zV/(k_BT) < 4$、低温側で $2zV/(k_BT) > 4$ である。ここで青・赤の直線はそれぞれ代表温度を表す。

[7] 変曲点の位置

$$f''(x) = -2zV + k_BT\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = -2zV + \frac{k_BT}{x(1-x)}.$$

$f''(x) = 0$ から

$$x(1-x) = \frac{k_BT}{2zV}, \qquad \boxed{\delta_1(T) = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_BT}{2zV}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{T}{T_{c0}}}}.$$

$T < T_{c0}$ なら二つの実変曲点がある。原問は $T = T_{c0}$ も変曲点の範囲に含めるが、この極限では $\delta_1 = 0$ かつ $f''(1/2) = 0$ で、f'' はその両側で正となる。したがって臨界組成は曲率がゼロになる退化点であり、厳密には変曲点ではない。

[8] 低温の自由エネルギー曲線

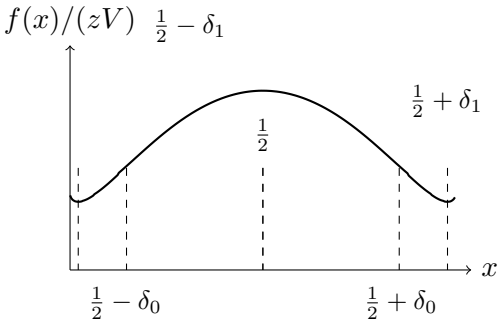
$0 < T < T_{c0}$ では中心で $f'(1/2) = 0$、$f''(1/2) < 0$ なので、$x = 1/2$ は局所最大である。右側では

$$f''(x) < 0 \quad \left(\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \delta_1\right), \qquad f'\left(\frac{1}{2} + \delta_1\right) < 0.$$

その外側では $f''(x) > 0$ であり、$f'(x)$ は増加して $x \to 1$ で $+\infty$ に発散する。従って再び $f'(x) = 0$ となる点は変曲点より外側に一つだけあり、これが $x = 1/2 + \delta_0$ の極小である。対称性 $f(1-x) = f(x)$ より左側にも同じ高さの極小があり、

$$\boxed{0 < \delta_1 < \delta_0 < \frac{1}{2}}.$$

この符号変化から、二つの外側極小が全区間での最小値を与える。変曲点は各極小と中心極大の間にある。端点で $f'(x)$ は対数発散するが $f(x)$ 自体は有限である。



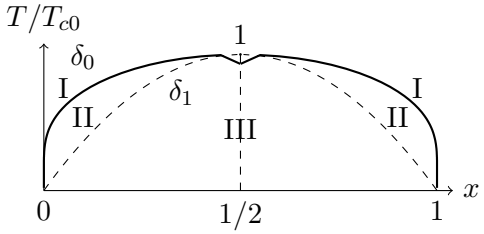
この図は $T/T_{c0} = 1/2$ の例で、$\delta_1 = \sqrt{2}/4$、$\delta_0 \simeq 0.478752$ である。

[9] 停留点の温度依存

外側停留点は

$$\frac{4\delta_0}{T/T_{c0}} = \log\frac{1+2\delta_0}{1-2\delta_0} \quad (0 < \delta_0 < 1/2)$$

を満たす。これは $\delta_0 = 0$ という中心解を除いた正の解である。温度曲線は左右対称で、δ_0, δ_1 はともに $T \to T_{c0}$ で 0、$T \to 0$ で $1/2$ に近づき、$0 < T < T_{c0}$ では $\delta_0 > \delta_1$ となる。



実線は $u > 0$ に対し $2\delta_0 = \tanh u$、$T/T_{c0} = \tanh u/u$ で表せ、臨界点は $u \to 0$ の極限にあたる。実線は外側極小の組成 $x = 1/2 \pm \delta_0$、点線は $f'' = 0$ となる組成 $x = 1/2 \pm \delta_1$ を表す。これらの曲線と図中の領域 (I)–(III) の安定性を、以下で相分離後の自由エネルギーと比較して判定する。

[10] 相分離のレバー則

A 原子数保存より $x_0 N = s x_1 N + (1-s) x_2 N$ なので

$$\boxed{s = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}}, \qquad 1 - s = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

[11] 相分離後の自由エネルギー

二相のサイト比で平均した自由エネルギーは

$$\boxed{f^* = sf(x_1) + (1-s)f(x_2) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}.$$

この式は、$f(x_1)$ と $f(x_2)$ を結ぶ直線の $x = x_0$ での高さである。組成 x_0 を保つ二相分離で一様相の自由エネルギーを下げられるかどうかは、この高さと $f(x_0)$ の比較で決まる。

$0 < T < T_{c0}$ では [8] の対称な二極小について

$$f\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right) = f\left(\frac{1}{2} + \delta_0\right), \qquad f'\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right) = f'\left(\frac{1}{2} + \delta_0\right) = 0.$$

従って両極小を結ぶ水平線は、両点で曲線に接し、全組成で曲線より下にある共通接線である。$|x_0 - 1/2| < \delta_0$ のとき、$x_1 = 1/2 - \delta_0$、$x_2 = 1/2 + \delta_0$ と選べばレバー則で $0 < s < 1$ となり、

$$f^* = f\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right) < f(x_0).$$

どの相の f もこの極小値以上なので、この二相の組成で固定組成の最小自由エネルギーに達する。

一方、$x_0 \le 1/2 - \delta_0$ の外側枝では $f'' > 0$、$f'(x_0) \le 0$ である。凸な左側枝は x_0 での接線より上にあり、その接線は $x \ge 1/2 - \delta_0$ でも極小値以下にとどまる。従って全区間で

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

これを x_1, x_2 に適用し、レバー則の重みで足すと

$$\begin{aligned} f^* &\ge f(x_0) + f'(x_0)\{sx_1 + (1-s)x_2 - x_0\} \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

右側の $x_0 \ge 1/2 + \delta_0$ も対称性から同じであり、外側では一様相が最小自由エネルギーを与える。相分離を許した最小自由エネルギーの曲線は、外側の $f(x)$ を残し、二極小の間を共通接線で置き換えた形となる。この曲線は f の下側凸包であり、二極小の組成 $x = 1/2 \pm \delta_0$ が共存境界を与える。

[12] 微小ゆらぎに対する局所安定性

$x_1 = x_0 - \delta$, $x_2 = x_0 + \delta$ $(0 < \delta < \min(x_0, 1 - x_0))$ のとき、二相の組成比は $s = 1/2$ となる。Taylor 展開を両側で足すと奇数次項が相殺し、

$$f^* - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)\delta^2 + \frac{1}{24} f''''(x_0)\delta^4 + O(\delta^6). \tag{1}$$

従って二次の自由エネルギー変化が正となる条件は

$$\boxed{f''(x_0) > 0}.$$

これが二次で判定する局所安定条件であり、$f''(x_0) < 0$ なら十分小さいゆらぎで自由エネルギーが下がる。$f''(x_0) = 0$ では二次の判定だけでは結論できず、高次項が必要となる。ここで

$$f'''(x) = k_B T \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right], \tag{2}$$

$$f''''(x) = 2k_B T \left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3}\right] > 0 \qquad (T > 0). \tag{3}$$

特に臨界点 $x_0 = 1/2, T = T_{c0}$ では $f'' = f''' = 0$、$f'''' = 16zV$ なので、

$$f^* - f(1/2) = \frac{2}{3} zV\delta^4 + O(\delta^6) > 0. \tag{4}$$

二次項がゼロでも、この対称ゆらぎに対して一様相は安定である。

[13] 安定・準安定・不安定領域

$T < T_{c0}$ において $|x - 1/2| < \delta_1$ では $f''(x) < 0$ であり、微小ゆらぎでも相分離するので領域 (III)。$\delta_1 < |x - 1/2| < \delta_0$ では局所安定だが全体として一様相が最安定ではなく、準安定領域 (II)。$|x - 1/2| > \delta_0$ では一様相が最安定で領域 (I) である。これらの開領域は [9] の δ_0 と δ_1 の曲線の間隔に対応する。

低温のスピノーダル境界 $|x_0 - 1/2| = \delta_1$ では $f''(x_0) = 0$ だが、$f'''(x_0) \neq 0$ である。左右の組成変化を $x_1 = x_0 - \delta_-$、$x_2 = x_0 + \delta_+$ $(\delta_-, \delta_+ > 0)$ とすると、レバー則から $s = \delta_+/(\delta_- + \delta_+)$ となり、Taylor 展開の三次までの平均は

$$f^* - f(x_0) = \frac{\delta_- \delta_+(\delta_+ - \delta_-)}{6} f'''(x_0) + O\big((\delta_- + \delta_+)^4\big)\,. \tag{5}$$

$\delta_+ - \delta_-$ を $f'''(x_0)$ と逆符号に選び、固定した比で両方を小さくすれば自由エネルギーを下げられる。従ってこの境界は、一般の非対称な微小相分離に対して局所安定ではない。対称ゆらぎだけの四次項が正であることとは区別する。

一方、臨界温度では

$$f''(x) = zV\left[\frac{1}{2x(1-x)} - 2\right] \geq 0, \tag{6}$$

等号は $x = 1/2$ の一点だけである。$T > T_{c0}$ なら $f''(x) \geq 4k_BT - 2zV > 0$ となる。いずれも傾き f' は厳密に増加するため、異なる二組成を結ぶ直線は中間の自由エネルギー曲線より上にある。従って任意の非自明な二相分離に対して $f(x_0) < f^*$ となり、臨界点を含めて $T \geq T_{c0}$ では全組成が (I) である。低温の共存境界 $|x - 1/2| = \delta_0$ 上の組成も一様相が最安定である。

物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の運動方程式

電荷が $-q$ なので、電場から受ける力は $-q\boldsymbol{E}(t)$ である。復元力と減衰力を加えた Newton の式は

$$\boxed{m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -q\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} - m\omega_0^2\boldsymbol{x} - m\gamma\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}}.$$

[1.2] 定常応答

$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 e^{-i\omega t}$ とすると、$\dot{\boldsymbol{x}} = -i\omega\boldsymbol{x}$、$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega^2\boldsymbol{x}$ である。運動方程式に代入し、$\boldsymbol{x}_0$ をまとめると

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)\boldsymbol{x}_0 = -\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_0, \qquad \boxed{\boldsymbol{x}_0 = -\frac{q\boldsymbol{E}_0}{m\left[(\omega_0^2-\omega^2) - i\gamma\omega\right]}}.$$

ここで減衰項の $-i\gamma\omega$ は、与えられた $e^{-i\omega t}$ 規約から決まる。

[1.3] 複素感受率

単位体積当たりの分極振幅は

$$\boldsymbol{P}_0 = -Nq\boldsymbol{x}_0 = \frac{Nq^2}{m[(\omega_0^2-\omega^2) - i\gamma\omega]}\boldsymbol{E}_0 = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}_0.$$

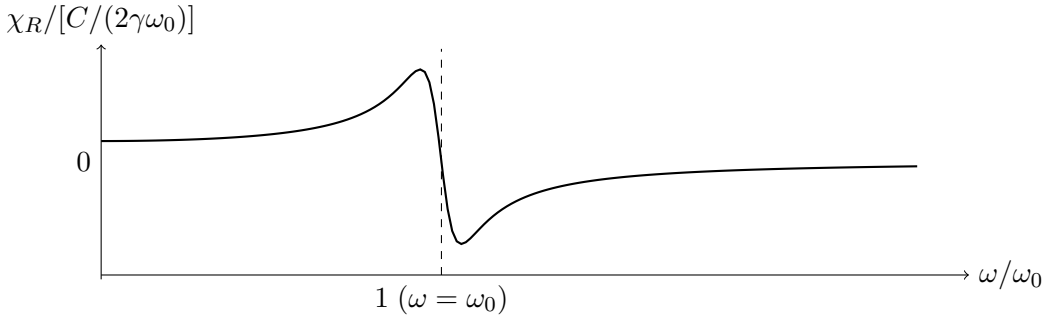
$C = Nq^2/(\varepsilon_0 m)$, $A = \omega_0^2 - \omega^2$, $B = \gamma\omega$ とおき、分母に共役複素数を掛けると

$$\chi = C\frac{A+iB}{A^2+B^2}, \qquad \boxed{\chi_R = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}, \qquad \boxed{\chi_I = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}.$$

実場の周期平均を取ると $\langle\boldsymbol{E}\cdot\partial_t\boldsymbol{P}\rangle = \varepsilon_0\omega\chi_I|\boldsymbol{E}_0|^2/2 > 0$ となる。従って正の χ_I はこの時間規約で受動媒質の吸収に対応する。

[1.4] χ_R の周波数依存性

$\omega < \omega_0$ では $\chi_R > 0$、$\omega = \omega_0$ で零を通り、$\omega > \omega_0$ では負となる。共鳴近傍では正負の分散形となり、高周波では $\chi_R \to 0^-$ である。図は $\gamma/\omega_0 = 0.12$ の例で、縦軸は正の尺度 $C/(2\gamma\omega_0)$ で規格化した概形である。



[2.1] 境界での接線電場

Faraday の法則 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$ を、長辺が y 方向で境界をまたぐ微小長方形に積分する。短辺の線積分は $\Delta z \to 0$ で消え、磁束の時間変化も面積 $O(\Delta y \Delta z)$ に比例して消える。したがって上下の長辺の寄与が等しくなり、$E_y(z = 0^+) = E_y(z = 0^-)$ を得る。面上では共通の時間因子を省いて

$$\boxed{E_0 e^{ik \sin\theta_0 x} + E_m e^{iK_{mx} x} = E_t e^{iK_{tx} x}}.$$

この関係は境界面上のすべての x で成り立つ。

[2.2] 接線波数の一致

境界に沿った位相が任意の x で一致する必要があるため、入射・反射・透過波の接線成分は等しい。よって

$$\boxed{K_{mx} = K_{tx} = k \sin\theta_0}.$$

[2.3] Maxwell 方程式と分散関係

自由電荷がなく一様な各媒質内では $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ なので $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ である。Faraday の法則の両辺に回転を作用させ、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$、$\nabla \times \boldsymbol{H} = \partial_t \boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E}$ を順に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{H}) \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

二重回転の公式と $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ より左辺は $-\nabla^2 \boldsymbol{E}$ なので、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

を得る。真空では $\chi = 0$。平面波を代入すれば

$$\boxed{k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}, \qquad \boxed{K_{mx}^2 + K_{mz}^2 = k^2}, \qquad \boxed{K_{tx}^2 + K_{tz}^2 = (1 + \chi) k^2}.$$

[2.4] 反射波の法線成分

反射波は真空内で $+z$ 方向へ進み、その波数の大きさは k である。接線成分を [2.2] に代入すると

$$K_{mz} = +\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2\theta_0} = \boxed{k \cos\theta_0}.$$

[2.5] 臨界角と透過波の枝

$K_{tx} = k\sin\theta_0$ を誘電体の分散関係に代入すると

$$K_{tz}^2 = k^2(1 + \chi - \sin^2\theta_0) = k^2(\chi + \cos^2\theta_0).$$

境目 $K_{tz} = 0$ は $\sin^2\theta_c = 1 + \chi$、すなわち

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\sqrt{1+\chi} = \arccos\sqrt{-\chi}}.$$

$\theta_0 < \theta_c$ では透過波は誘電体の深部 $z < 0$ へ伝わる。したがって負の法線成分を選び

$$\boxed{K_{tz} = -k\sqrt{1 + \chi - \sin^2\theta_0} \quad (\theta_0 < \theta_c)}.$$

$\theta_0 > \theta_c$ では K_{tz} は純虚数となる。$\kappa = k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} > 0$ と置く。場の依存性は $e^{iK_{tz}z}$ で、媒質は $z \le 0$ にあるので、$z \to -\infty$ で減衰する枝は $K_{tz} = -i\kappa$ である：

$$\boxed{K_{tz} = -ik\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} \quad (\theta_0 > \theta_c)}.$$

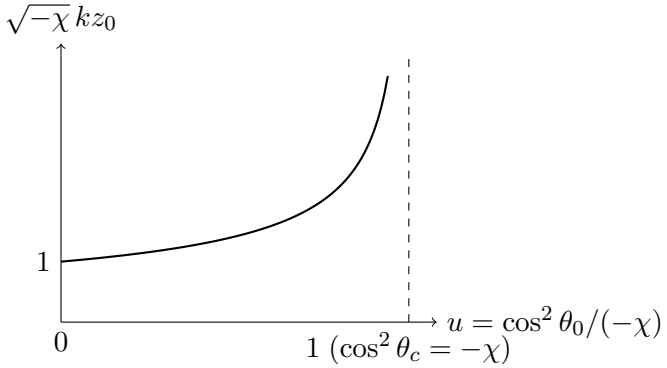
実際 $e^{iK_{tz}z} = e^{\kappa z} = e^{-\kappa|z|}$ となる。逆の虚数符号では負の z へ進むにつれて場が増大する。

[2.6] $1/e$ 減衰深さ

振幅が境界値の $1/e$ となる深さの大きさ $z_0 = |z|$ は $e^{-\kappa z_0} = e^{-1}$ より

$$\boxed{z_0 = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)}} = \frac{1}{k\sqrt{-\chi - \cos^2\theta_0}}}, \qquad 0 \le \cos^2\theta_0 < -\chi.$$

固定した χ では z_0 は $\cos^2\theta_0$ とともに増え、臨界値 $\cos^2\theta_c = -\chi$ に下側から近づくと発散する。図は無次元変数 $u = \cos^2\theta_0/(-\chi)$ を用いて形を示す。



物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 1 次元無限深井戸の固有状態

井戸の内部 $-a < x < a$ では $-\hbar^2\psi''/(2m) = E\psi$、壁では $\psi(\pm a) = 0$ である。規格化された非零の固有状態について、部分積分と壁の条件から

$$E = \int_{-a}^{a} \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' \right) dx = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a}^{a} |\psi'|^2 dx > 0. \tag{1}$$

従って $k = \sqrt{2mE}/\hbar > 0$ は実数である。内部の一般解は正弦と余弦の線形結合であり、左端の条件を満たす形は $\psi(x) = C\sin[k(x+a)]$ となる。右端の条件は

$$\psi(a) = C\sin(2ka) = 0. \tag{2}$$

非零状態では $C \neq 0$ なので、$2ka = n\pi$、すなわち $k_n = n\pi/(2a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を得る。奇数 $n = 2l+1$ $(l = 0, 1, \ldots)$ では余弦、偶数 $n = 2l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ では正弦が境界条件を満たす。規格化を行うと

$$\boxed{\psi_{2l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2l+1)\pi x}{2a} \right) \quad (l = 0, 1, \ldots)}, \qquad \boxed{\psi_{2l}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a} \right) \quad (l = 1, 2, \ldots)}.$$

したがって全準位のエネルギーは

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

特に $\psi_1(x) = a^{-1/2}\cos(\pi x/2a)$ を含む。

[1.2] 反転パリティ

奇数準位の余弦は偶関数、偶数準位の正弦は奇関数なので

$$\hat{P}\psi_n(x) = \psi_n(-x) = \boxed{(-1)^{n+1}\psi_n(x)}.$$

固有値は n が奇数なら $+1$、偶数なら -1 である。

[2.1] 座標交換

分離解のエネルギーは $E_{n_x,n_y} = E_{n_x} + E_{n_y} = \hbar^2\pi^2(n_x^2 + n_y^2)/(8ma^2)$ である。座標を交換すると

$$\hat{M}\Psi_{1,1} = \psi_1(y)\psi_1(x) = \Psi_{1,1}, \qquad \hat{M}\Psi_{2,2} = \psi_2(y)\psi_2(x) = \Psi_{2,2}.$$

両状態の $\hat{M}$ 固有値は $+1$ である。

[2.2] $\hat{H}$ と $\hat{M}$ の同時固有状態

第一励起部分空間の二つの直交した積状態は縮退している。交換演算子はこれらを入れ替えるので、正の実係数の規約に従う規格化同時固有状態は

$$\boxed{|\Psi_+\rangle = \frac{\Psi_{2,1}+\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{M}|\Psi_+\rangle = +|\Psi_+\rangle}, \qquad \boxed{|\Psi_-\rangle = \frac{\Psi_{2,1}-\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{M}|\Psi_-\rangle = -|\Psi_-\rangle}.$$

[2.3] 交換固有状態の角運動量

$x \leftrightarrow y$ は $\hat{L} = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$ の符号を反転するため

$$\hat{M}\hat{L}\hat{M} = -\hat{L}.$$

$\hat{M}|\Psi_\pm\rangle = \pm|\Psi_\pm\rangle$ より

$$\langle\Psi_\pm|\hat{L}|\Psi_\pm\rangle = \langle\Psi_\pm|\hat{M}(-\hat{L})\hat{M}|\Psi_\pm\rangle = -\langle\Psi_\pm|\hat{L}|\Psi_\pm\rangle, \qquad \boxed{\langle\hat{L}\rangle_\pm = 0}.$$

[2.4] 四回回転の固有値

ψ_1 は偶関数、ψ_2 は奇関数であり、$\hat{C}_4\Psi(x,y) = \Psi(-y,x)$ だから

$$\hat{C}_4\Psi_{1,1} = \psi_1(-y)\psi_1(x) = \Psi_{1,1}, \qquad \hat{C}_4\Psi_{2,2} = \psi_2(-y)\psi_2(x) = -\Psi_{2,2}.$$

固有値はそれぞれ $+1, -1$ である。

[2.5] $\hat{H}$ と $\hat{C}_4$ の同時固有状態

第一励起部分空間では

$$\hat{C}_4\Psi_{2,1} = -\Psi_{1,2}, \qquad \hat{C}_4\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1}.$$

従って、正の実係数の規約で規格化された回転固有状態は

$$\boxed{|\Psi'_+\rangle = \frac{\Psi_{2,1}+i\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{C}_4|\Psi'_+\rangle = +i|\Psi'_+\rangle}, \qquad \boxed{|\Psi'_-\rangle = \frac{\Psi_{2,1}-i\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{C}_4|\Psi'_-\rangle = -i|\Psi'_-\rangle}.$$

[2.6] 回転固有状態の角運動量

$A = \langle\psi_2|x|\psi_1\rangle$ と $B = \langle\psi_1|\hat{p}|\psi_2\rangle$ とおく。問題の積分公式を用いると

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} x\sin\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{2a}\Big)\,dx = \frac{32a}{9\pi^2}, \qquad B = -\frac{i\hbar\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}\cos\Big(\frac{\pi x}{2a}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\,dx = -\frac{4i\hbar}{3a}.$$

ここで $\hat{L} = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$ である。異なる積状態間の行列要素は

$$\langle\Psi_{2,1}|\hat{L}|\Psi_{1,2}\rangle = AB - \langle\psi_2|\hat{p}|\psi_1\rangle A = A(B - B^*) = -\frac{256i\hbar}{27\pi^2}.$$

対角要素は実の積状態の運動量平均がゼロなので消える。$C = \langle\Psi_{2,1}|\hat{L}|\Psi_{1,2}\rangle = -256i\hbar/(27\pi^2)$ と書けば、Ψ'_+ の交差項は $i(C - C^*)/2 = 256\hbar/(27\pi^2)$ であり、Ψ'_- ではその符号が反転する。従って

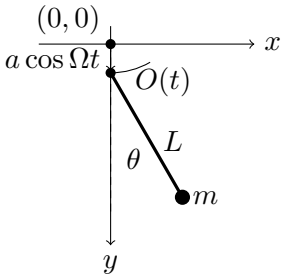
$$\boxed{\langle\Psi'_\pm|\hat{L}|\Psi'_\pm\rangle = \pm\frac{256\hbar}{27\pi^2}}.$$

回転固有値 $\pm i$ の状態が反対符号の角運動量を持つ。

物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

図の幾何では y は下向き正で、棒の方向単位ベクトルは $(\sin\theta, \cos\theta)$ である。振動する支点の変位は鉛直成分だけに加わる。



[1] おもりの座標

支点からおもりへの変位は $(L\sin\theta, L\cos\theta)$ なので

$$\boxed{x = L\sin\theta, \qquad y = a\cos\Omega t + L\cos\theta}.$$

[2] Cartesian の運動方程式

張力は支点へ向かうため x 成分は $-T\sin\theta$、下向き y 成分は $-T\cos\theta$。重力は下向き正だから

$$\boxed{m\ddot{x} = -T\sin\theta, \qquad m\ddot{y} = mg - T\cos\theta}.$$

[3] 座標の二階微分

[1] を時間微分すると

$$\boxed{\ddot{x} = L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)}, \qquad \boxed{\ddot{y} = -a\Omega^2\cos\Omega t - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)}.$$

[4] 張力を消去した角運動方程式

第一式に $\cos\theta$ を掛け、第二式に $-\sin\theta$ を掛けて加えると張力が消え、

$$m(\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta) = -mg\sin\theta.$$

[3] の加速度を代入すると $\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta = L\ddot{\theta} + a\Omega^2\cos\Omega t\sin\theta$ なので

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{a\Omega^2}{L}\cos\Omega t\sin\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta}.$$

[5] 支点が静止したときの小振動

微小角では $\sin\theta \simeq \theta$。$a = 0$ の方程式は

$$\ddot{\theta}_0 + \frac{g}{L}\theta_0 = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

初期条件 $\theta_0(0) = A$, $\dot{\theta}_0(0) = 0$ より

$$\boxed{\theta_0(t) = A\cos\omega_0 t}.$$

[6] 振幅 a の一次応答

小角の方程式を $\theta = \theta_0 + a\theta_1$ として展開する。a^0 の項は [5] の式、a^1 の項は

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = -\frac{\Omega^2}{L}\theta_0(t)\cos\Omega t = -\frac{A\Omega^2}{2L}\left\{\cos[(\Omega+\omega_0)t] + \cos[(\Omega-\omega_0)t]\right\}.$$

右辺には積和公式による二つの側帯波が現れる。

[7] 二つの側帯波をもつ特解

特解 $\theta_1 = u_1\cos[(\Omega+\omega_0)t] + u_2\cos[(\Omega-\omega_0)t]$ を [6] に代入する。各周波数の係数条件は

$$\left[\omega_0^2 - (\Omega+\omega_0)^2\right]u_1 = -\frac{A\Omega^2}{2L}, \qquad \left[\omega_0^2 - (\Omega-\omega_0)^2\right]u_2 = -\frac{A\Omega^2}{2L}.$$

$\Omega > 0$ なので第 1 の分母は零にならず、第 2 の分母が零となるのは $\Omega = 2\omega_0$ のときである。$A \neq 0$ のとき、有限な二側帯波特解が存在する条件は

$$\boxed{\Omega \neq 2\sqrt{\frac{g}{L}}}.$$

そのとき

$$\boxed{u_1 = \frac{A\Omega}{2L\left(\Omega + 2\sqrt{g/L}\right)}, \qquad u_2 = \frac{A\Omega}{2L\left(\Omega - 2\sqrt{g/L}\right)}}.$$

共鳴点 $\Omega = 2\omega_0$ では差周波側帯波が固有振動と一致し、通常は永年項を含むためこの有界な形の特解は得られない。$A = 0$ なら一次の駆動自体がなく、$\theta_1 = 0$ は共鳴点でも解である。

物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 静止円柱内の 1 粒子分配関数

確率密度の規格化は

$$1 = \frac{1}{h^3 L \widetilde{Z}_1} \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{x^2+y^2\le R^2} dx\, dy \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\, e^{-p^2/(2mkT)}.$$

運動量積分は $(2\pi mkT)^{3/2}$、断面積は πR^2、高さ積分は L なので

$$\widetilde{Z}_1(T,R) = \frac{\pi R^2}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2} = \boxed{\gamma R^2 (kT)^{3/2}}, \qquad \gamma = \frac{\pi^{5/2}(2m)^{3/2}}{h^3}.$$

[1.2] 自由エネルギー密度

古典的な同種粒子の分配関数は $Z_N = [L\widetilde{Z}_1]^N/N!$ である。Stirling 近似から

$$F = -kT \log Z_N \simeq -NkT \left[\log\left(\frac{L\widetilde{Z}_1}{N} \right) + 1 \right].$$

$\nu = N/L$ を固定して割り算すると

$$\boxed{\widetilde{F} = \frac{F}{L} = -\nu kT \left[\log\left(\frac{\widetilde{Z}_1}{\nu} \right) + 1 \right] = -\nu kT (\log \widetilde{Z}_1 - \log \nu + 1)}.$$

[1.3] 静止容器の側圧

半径を dR だけ準静的に増やすと体積変化は $dV = 2\pi RL\, dR$。したがって

$$P = -\frac{1}{2\pi R}\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial R} \right)_{T,\nu} = \boxed{\frac{\nu kT}{2\pi R \widetilde{Z}_1}\left(\frac{\partial \widetilde{Z}_1}{\partial R} \right)_T}.$$

ここで [1.1] の $\widetilde{Z}_1 \propto R^2$ を使うと

$$\boxed{P = \frac{\nu kT}{\pi R^2}}.$$

[2.1] 回転系ハミルトニアンの最小値

$r^2 = x^2 + y^2$ とし平方完成すると

$$H_1 - \omega M_1 = \frac{(p_x + m\omega y)^2 + (p_y - m\omega x)^2 + p_z^2}{2m} - \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

$r \le R$ のもとでは二乗項をゼロにし、$r = R$ としたとき最小になる。よって

$$\boxed{\min(H_1 - \omega M_1) = -\frac{m\omega^2 R^2}{2} = -\epsilon}, \qquad \epsilon = \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

$\omega = 0$ では最小値は 0 である。

[2.2] 平衡流の速度場

位置 $\boldsymbol{r}$ を固定した運動量分布は

$$\exp\left[-\frac{(p_x + m\omega y)^2 + (p_y - m\omega x)^2 + p_z^2}{2mkT}\right]$$

に比例するガウス分布である。その中心運動量を m で割れば局所平均速度となる：

$$\boxed{v_x(\boldsymbol{r}) = -\omega y, \qquad v_y(\boldsymbol{r}) = \omega x, \qquad v_z(\boldsymbol{r}) = 0}.$$

これは z 軸周りの剛体回転 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ である。

[2.3] 回転系の規格化定数

平方完成した運動量積分は通常の Gaussian と同じであり、位置に残る重みは $e^{m\omega^2 r^2/(2kT)}$ である。$\lambda = \epsilon/(kT)$ とすると

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}_1(T, R, \omega) &= \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}\, 2\pi \int_0^R r\, e^{m\omega^2 r^2/(2kT)} dr \\
&= \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \frac{2\pi kT}{m\omega^2} (e^{\lambda} - 1) \\
&= \boxed{\gamma R^2 (kT)^{3/2} \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}} = \boxed{\frac{2\gamma (kT)^{5/2}}{m\omega^2} (e^{\epsilon/(kT)} - 1)}.
\end{aligned}$$

ここでは $\omega \neq 0$ とした。$\lambda \to 0$ で $(e^{\lambda} - 1)/\lambda \to 1$ となり、[1.1] の非回転極限に戻る。

[2.4] 回転容器の側圧

全粒子の角運動量を $M = \sum_j M_{1,j}$ とし、逆温度を $\beta = 1/(kT)$ と書く。角速度 ω の容器が粒子に及ぼすトルクの仕事率は $\omega\, d\langle M \rangle/dt$ なので、準静的な変化での第一法則は

$$d\langle H \rangle = T\, dS + \omega\, d\langle M \rangle - P\, dV \qquad (N \text{ 固定})$$

である。回転分布 $e^{-\beta(H-\omega M)}$ から得る熱力学ポテンシャルを F_ω と書くと、[1.2] と同じ粒子数の数え上げにより

$$\begin{aligned} F_\omega &= -kT\log\frac{[L\widetilde{Z}_1(T,R,\omega)]^N}{N!} = \langle H\rangle - TS - \omega\langle M\rangle \\ &\simeq -NkT\left[\log\left(\frac{L\widetilde{Z}_1(T,R,\omega)}{N}\right)+1\right], \\ dF_\omega &= -S\,dT - \langle M\rangle\,d\omega - P\,dV. \end{aligned}$$

従って側圧は T,ω,N,L 固定での半径微分から得られる。$dV = 2\pi RL\,dR$ と [2.3] を用いると

$$P = \frac{\nu kT}{2\pi R}\left(\frac{\partial\log\widetilde{Z}_1}{\partial R}\right)_{T,\omega} = \boxed{\frac{\nu m\omega^2}{2\pi(1-e^{-\lambda})}}, \qquad \lambda = \frac{mR^2\omega^2}{2kT}.$$

角速度固定で $T\to 0$、すなわち $\lambda\to\infty$ とすると

$$\boxed{P \longrightarrow \frac{\nu m\omega^2}{2\pi}}.$$

また $\lambda\to 0$ では $P\to \nu kT/(\pi R^2)$ となり、静止容器の式と一致する。

[2.5] 慣性モーメント

既に得た局所平均速度は $\langle \boldsymbol{v}\mid r\rangle = (-\omega y,\omega x,0)$ である。よって一粒子の軸まわり角運動量は $\langle M_1\mid r\rangle = x(m\omega x) - y(-m\omega y) = m\omega r^2$、全粒子について $\langle M\rangle = Nm\omega\langle r^2\rangle$ となる。ここで $I = Nm\langle r^2\rangle$ が質量分布の慣性モーメントである。回転分配関数は $e^{\beta\omega M_1}$ を含むため

$$I = \frac{\langle M\rangle}{\omega} = \frac{NkT}{\omega}\left(\frac{\partial\log\widetilde{Z}_1}{\partial\omega}\right)_{T,R}.$$

$$\log\widetilde{Z}_1 = (\text{terms independent of }\omega) - 2\log|\omega| + \log(e^\lambda - 1), \qquad \partial_\omega\lambda = \frac{2\lambda}{\omega}.$$

従って $\omega\neq 0$ で

$$\boxed{I = \frac{2N}{\omega^2}\left[\frac{\epsilon}{1-e^{-\epsilon/(kT)}} - kT\right]}.$$

極限 $\omega\to 0$ では $I\to NmR^2/2$、$T\to 0$ では $I\to NmR^2$ で、後者は粒子が側壁近くに集まることに対応する。

[2.6] 固定角速度の熱容量

固定した R,L,N,ω のもとで加熱すると、[2.4] の第一法則から、加えた熱は回転仕事を差し引いた

$$\delta Q = d\langle H\rangle - \omega\,d\langle M\rangle = d\langle H-\omega M\rangle$$

となる。従って固定角速度の熱容量では共回転系の平均 $U_\omega = \langle H-\omega M\rangle$ を温度微分する。回転分布の逆温度微分もこの同じ平均を与え、

$$U_\omega = \langle H-\omega M\rangle = -N\left(\frac{\partial\log\widetilde{Z}_1}{\partial\beta}\right)_{\omega,R}.$$

同じ式は $\langle H\rangle = \frac{3}{2}NkT + \frac{1}{2}I\omega^2$ と $\langle M\rangle = I\omega$ から $U_\omega = \frac{3}{2}NkT - \frac{1}{2}I\omega^2$ としても得られる。$\widetilde{Z}_1 \propto \beta^{-5/2}(e^{\beta\epsilon}-1)$ より

$$U_\omega = \frac{5}{2}NkT - \frac{N\epsilon}{1-e^{-\epsilon/(kT)}}.$$

よって ω 固定の熱容量は

$$\boxed{C_\omega = \left(\frac{\partial U_\omega}{\partial T}\right)_\omega = \frac{5}{2}Nk - \frac{N\epsilon^2}{kT^2}\frac{e^{-\epsilon/(kT)}}{\left(1-e^{-\epsilon/(kT)}\right)^2}}.$$

上式の減算項を $Nk\lambda^2 e^{-\lambda}/(1-e^{-\lambda})^2$ と書けば、高温の $\lambda \to 0$ では $1-e^{-\lambda} \sim \lambda$ から Nk に、低温の $\lambda \to \infty$ では 0 に近づく。従って非零の ω を固定した高温極限では $C_\omega \to \frac{3}{2}Nk$、低温極限では $C_\omega \to \frac{5}{2}Nk$ である。$\omega = 0$ では式の連続極限から $C_0 = \frac{3}{2}Nk$ がすべての T で得られる。

物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] Laplace 方程式の制約

真空中では $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ である。$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ と $\phi = ax^2 + by^2 + cz^2$ を代入すると

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla^2\phi = -2(a+b+c), \qquad \boxed{a+b+c=0}.$$

[1.2] Newton–Lorentz 方程式

電場力は $-q\nabla\phi$、磁場力は $q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ だから

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -q\nabla\phi(\boldsymbol{r}(t)) + q\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \boldsymbol{B}}.$$

以降 $a = b = -c/2 < 0$ なので $c > 0$ である。$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とすると

$$m\ddot{x} = qcx + qB\dot{y}, \qquad m\ddot{y} = qcy - qB\dot{x}, \qquad m\ddot{z} = -2qcz.$$

[1.3] z 方向の単振動

$m\ddot{z} = -2qcz$ は復元力をもつ調和振動子であり、角振動数は

$$\boxed{\omega_z = \sqrt{\frac{2qc}{m}}}.$$

[1.4] xy 面内の複素方程式

$u = x + iy$ とおく。上の x, y 方程式の第 2 式に i を掛けて第 1 式に加えると

$$m\ddot{u} = qc(x + iy) + qB(\dot{y} - i\dot{x}) = qcu - iqB\dot{u},$$

したがって

$$\boxed{m\ddot{u} + iqB\dot{u} - qcu = 0}.$$

[1.5] 横方向の束縛条件

固有解 $u(t) = u_0 e^{-i\sigma t}$ を代入すると

$$m\sigma^2 - qB\sigma + qc = 0, \qquad \boxed{\sigma_\pm = \frac{qB \pm \sqrt{q^2B^2 - 4mqc}}{2m}}.$$

初期値によらず有界な振動解を得るには、2 根が実数かつ異なる必要がある。判別式が正なら両根は実数で解は 2 つの振動の重ね合わせとなる。判別式が負なら指数的に増大する解があり、ゼロなら重根に伴う $te^{-i\sigma t}$ 型の解があり、いずれも全初期条件で有界とはならない。$q>0$ を用いると条件は

$$q^2B^2 - 4mqc > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{qB^2 > 4mc}.$$

[2.1] Mathieu 方程式の係数

磁場を無視した x 方向の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2q\alpha x\cos\omega t.$$

$\tau = \omega t/2$ とすると $d^2/dt^2 = (\omega^2/4)d^2/d\tau^2$ かつ $\cos\omega t = \cos 2\tau$ だから

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{8q\alpha}{m\omega^2}x\cos 2\tau = 0.$$

式 (3) と係数を比較して

$$\boxed{\lambda = \frac{4q\alpha}{m\omega^2}}.$$

[2.2] Fourier 係数の漸化式

式 (4) の各項を 2 回微分すると係数は $-(2n+\Omega)^2C_n$ となる。また

$$2\lambda\cos 2\tau\cos[(2n+\Omega)\tau] = \lambda\cos[(2(n+1)+\Omega)\tau] + \lambda\cos[(2(n-1)+\Omega)\tau].$$

同じ周波数ごとに係数を比べると

$$\boxed{(2n+\Omega)^2C_n = \lambda(C_{n-1}+C_{n+1})}.$$

[2.3] 小さい λ での周波数

$C_{\pm 2}$ を無視した $n=\pm 1$ の式と、$n=0$ の式は

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\lambda}{(2+\Omega)^2}, \qquad \frac{C_{-1}}{C_0} = \frac{\lambda}{(\Omega-2)^2}, \qquad \Omega^2 = \lambda\frac{C_{-1}+C_1}{C_0} = \lambda^2\left[\frac{1}{(2-\Omega)^2} + \frac{1}{(2+\Omega)^2}\right].$$

$0<\Omega<1$ の枝では角括弧内の分母がゼロにならず、$\lambda\to 0$ で上の中心式から $\Omega^2/\lambda^2 \to 1/2$ を得る。従って $\Omega = O(\lambda)$ であり、分母の Ω 依存を 1 次近似の係数比で落とすと

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\lambda}{4} + O(\lambda^2), \qquad \frac{C_{-1}}{C_0} = \frac{\lambda}{4} + O(\lambda^2).$$

中心式の右辺は $\lambda^2[1/2 + O(\Omega^2)]$ であり

$$\Omega^2 = \frac{\lambda^2}{2} + O(\lambda^4), \qquad \Omega = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + O(\lambda^3).$$

問題の $0<\Omega<1$ と $\lambda>0$ に合う枝を選ぶと、求める 1 次の定数は

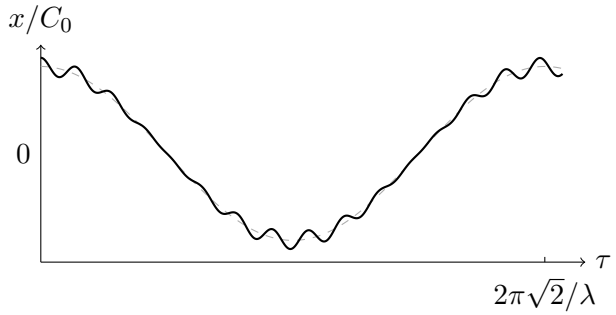
$$\boxed{\frac{C_{-1}}{C_0} = \epsilon\lambda, \quad \frac{C_1}{C_0} = \epsilon\lambda, \quad \Omega = \delta\lambda, \qquad \epsilon = \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

[2.4] 近似解と概形

3 つのモードを残すと

$$x(\tau) = C_0\left[\cos(\Omega\tau) + \frac{\lambda}{4}\cos((2+\Omega)\tau) + \frac{\lambda}{4}\cos((2-\Omega)\tau)\right] + O(\lambda^2)$$
$$= \boxed{C_0\left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos 2\tau\right)\cos\left(\frac{\lambda\tau}{\sqrt{2}}\right)} + O(\lambda^2).$$

ここで $O(\lambda^2)$ の精度は、図に示す緩やかな振動の一周期程度、すなわち $\tau = O(\lambda^{-1})$ までを対象とする。さらに長時間では Ω の省略項による位相誤差が蓄積する。緩やかな余弦が長周期振動を表し、因子 $1 + (\lambda/2)\cos 2\tau$ が小さな速い変調を加える。下図は例として $\lambda = 0.2$ とした x/C_0 の概形で、横軸は τ である。



破線は緩やかな振動のみ、実線は 1 次の速い変調も含む。

物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

出典：2023 年 8 月 29 日実施の物理学入学試験、第 1 問（原本 PDF の 2–3 ページ）。棒の下端を P、回転軸上の点を O とする。P から O までが l_1、P から上端までが l_0 であり、$l_1 > l_0/2$ だから重心は O より下にある。

[1] 棒の慣性モーメント

[1.1] 中心軸に関する慣性モーメント

棒の密度は一様なので、中心軸に垂直な断面内でも質量は一様に分布する。半径 r、幅 $\mathrm{d}r$ の円環が全質量に占める割合は $2\pi r\,\mathrm{d}r/(\pi a^2)$ である。この円環の質量は $\mathrm{d}m = M(2\pi r\,\mathrm{d}r)/(\pi a^2) = 2Mr\,\mathrm{d}r/a^2$。各円環の寄与 $r^2\mathrm{d}m$ を積分して

$$I_{\parallel} = \int_0^a r^2\,\mathrm{d}m = \int_0^a r^2 \frac{2M}{a^2} r\,\mathrm{d}r = \boxed{\frac{1}{2}Ma^2}.$$

[1.2] 薄い円板の直径に関する慣性モーメント

円板の質量は $\Delta M = M\Delta l/l_0$ である。円板面内で互いに直交する二本の直径に関する慣性モーメントは対称性から等しい。垂直軸の定理より、その和は中心軸に関する $\Delta M a^2/2$ なので、一方の直径について

$$\boxed{\Delta I_{\perp} = \frac{1}{4}\Delta M a^2 = \frac{Ma^2}{4l_0}\Delta l}.$$

厚さに伴う $O((\Delta l)^3)$ の項は、十分に薄い円板の極限で消える。

[1.3] O を通る回転軸に関する慣性モーメント

P から中心軸に沿って距離 s の位置の薄い円板を考える。O を通る y 方向の軸は、その円板の重心を通る平行な直径から $|s - l_1|$ 離れている。平行軸の定理と [1.2] より

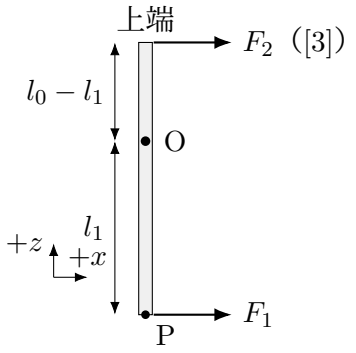
$$I_{\mathrm{O}} = \int_0^{l_0} \frac{M}{l_0}\left(\frac{a^2}{4} + (s - l_1)^2\right)\mathrm{d}s = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{l_0^2}{3} - l_0 l_1 + l_1^2\right).$$

平方完成すると、重心が P から $l_0/2$ にあることも見える形で

$$\boxed{I_{\mathrm{O}} = M\left[\frac{a^2}{4} + \frac{l_0^2}{12} + \left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)^2\right]}.$$

[2] 力を取り除いた後の運動

O を原点とし、$\theta > 0$ のとき P が O より右にある向きを正に取る。右向きの F_1 は下端 P で正の回転モーメントを与え、重力は棒を鉛直に戻す。次の図は [2] の力の作用点と、後の [3] で使う上端の作用点を共通に示す。



図の棒は $\theta = 0$ を表す。F_1 と F_2 は同じ右向きでも、O の反対側に作用するので回転モーメントは逆向きである。

[2.1] 静止角

重心は O から棒に沿って $l_1 - l_0/2$ だけ下にある。力の作用線までの垂直距離は、水平な F_1 では $l_1 \cos\theta$、鉛直な重力では重心の水平変位 $(l_1 - l_0/2)\sin\theta$ である。したがって O に関する正向きのモーメントは $F_1 l_1 \cos\theta$、重力による負向きのモーメントは $-Mg(l_1 - l_0/2)\sin\theta$。静止条件から

$$F_1 l_1 \cos\theta_0 = Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)\sin\theta_0, \qquad \boxed{\tan\theta_0 = \frac{F_1 l_1}{Mg(l_1 - l_0/2)}}.$$

$F_1 > 0$、$l_1 > l_0/2$、$|\theta_0| < \pi/2$ なので、この平衡角は正である。

[2.2] 鉛直位置での角速度

F_1 を取り除いた直後の角速度は 0 である。その後は O の固定軸に関する重力の位置エネルギーと回転運動エネルギーの和が保存する。$\theta = 0$ を位置エネルギーの基準にすると

$$U(\theta) = Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)(1 - \cos\theta), \qquad \frac{1}{2} I_{\mathrm{O}} \dot{\theta}^2 \Big|_{\theta=0} = U(\theta_0).$$

したがって角速度の大きさは

$$\boxed{\left|\dot{\theta}\right|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{2Mg(l_1 - l_0/2)(1 - \cos\theta_0)}{I_{\mathrm{O}}}}}.$$

[2.3] 微小振動の周期

力を除いた後の運動方程式は

$$I_{\mathrm{O}}\ddot{\theta} = -Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)\sin\theta.$$

$|\theta| \le \theta_0 \ll 1$ なら $\sin\theta \simeq \theta$ であり、角振動数の二乗は $Mg(l_1 - l_0/2)/I_{\mathrm{O}}$ となる。よって

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{O}}}{Mg(l_1 - l_0/2)}}}.$$

[3] ソレノイドと磁気モーメント

[3.1] 鉄芯のない長いソレノイド

ソレノイド内に軸方向の長さ ℓ の辺を置いた長方形のアンペール経路をとる。長いソレノイドの近似で外側の磁場を無視すると、内側の辺による線積分は $H\ell$、経路が囲む電流は $N\ell$ 巻分の $N\ell I$ である。アンペールの法則 $H\ell = N\ell I$ より、磁場の強さと真空中の磁束密度はそれぞれ

$$\boxed{H = NI}, \qquad \boxed{B = \mu_0 NI}.$$

以下の μ は鉄芯の透磁率である。問題の長いソレノイドと端の漏れ磁場を無視する近似を鉄芯が入った部分にも適用すると、そこでも $H = NI$ と扱え、鉄芯内の磁束密度は $B = \mu H = \mu NI$ となる。

[3.2] $X/3$ だけ挿入したときのインダクタンス

[3.3] ではインダクタンスを挿入長で微分するので、まず一般の挿入長 ξ に対する磁束鎖交数を求める。鉄芯内部の断面積は πb^2 であり、上の近似で一巻きあたりの磁束は $\Phi = \mu NI\pi b^2$ となる。鉄芯を囲む巻数は $N\xi$ で、鉄芯のない部分の磁束は設問の近似で無視する。全磁束鎖交数を LI と置けば

$$LI = (N\xi)\Phi, \qquad L(\xi) = \mu N^2 \pi b^2 \xi.$$

従って $\xi = X/3$ では

$$\boxed{L = \frac{1}{3}\mu N^2 \pi b^2 X}.$$

[3.3] 上端の力から下端の力を測る

上の $L(\xi)$ を設問の力の式に代入すると、鉄芯を引き込む力は挿入長に依らず

$$F_2 = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\mu N^2 \pi b^2 I^2.$$

棒が鉛直に保たれたとき、重力の作用線は O を通る。図のように O から下端 P までの腕は l_1、O から上端までの腕は $l_0 - l_1$ であり、二つの右向きの力のモーメントがつり合う。ゆえに

$$F_1 l_1 = F_2(l_0 - l_1), \qquad \boxed{F_1 = \frac{\mu N^2 \pi b^2 I^2}{2}\frac{l_0 - l_1}{l_1}}.$$

[3.4] 数値と単位

長さと電流を SI 単位に直すと、$l_0 - l_1 = 0.50\,\mathrm{m}$、$l_1 = 0.90\,\mathrm{m}$、$b = 0.015\,\mathrm{m}$、$I = 0.200\,\mathrm{A}$ である。[3.3] より

$$F_2 = \frac{(6.4\times10^{-3})(2000)^2\pi(0.015)^2(0.200)^2}{2} = 0.3619\ldots\,\mathrm{N}, \qquad F_1 = F_2\frac{0.50}{0.90} = 0.2011\ldots\,\mathrm{N}.$$

与えられた換算を磁場勾配にも適用すると

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1600\,\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{cm}} \times \frac{10^3}{4\pi}\,\frac{\mathrm{A/m}}{\mathrm{Oe}} \times 100\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} = \frac{4.0\times10^7}{\pi}\,\mathrm{A\,m^{-2}}.$$

$F_1 = m\,\partial H/\partial x$ なので

$$m = \frac{0.2011\ldots}{(4.0\times10^7/\pi)} = 1.579\ldots\times10^{-8}\,\mathrm{Wb\,m}.$$

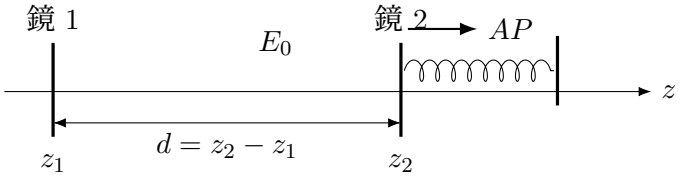
実際に $\mathrm{N/(A\,m^{-2})} = \mathrm{N\,m^2/A} = \mathrm{Wb\,m}$ である。求める空欄は有効数字二桁で

$$\boxed{1.6\times10^{-8}} \quad (\mathrm{Wb\,m}).$$

物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

z 軸の正方向を鏡 1 から鏡 2 へとり、電場は $\boldsymbol{e}_x$、磁場は $\boldsymbol{e}_y$ の方向にとる。$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$ である。電場の複素振幅には問題文と同じく $e^{-i\omega t}$ の時間依存を用いる。真空中の波数を $q = \omega/c$ と記し、ばね定数 k と区別する。以下の配置図はばねを付けた場合も示す。A は照射面積、P は後で求める鏡 2 への光圧で、矢印 AP は鏡 2 を右へ押す力を表す。



[1.1] 完全反射鏡の間の角周波数

完全導体表面では接線方向の電場が零である。$u = z + L/2$ とおけば鏡間は $0 < u < L$ であり、電場の空間部分は両端で零となる正弦波である。したがって

$$\sin(q_n L) = 0, \qquad q_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{L}}.$$

n の偶奇にかかわらず許される。偶数 n と奇数 n はそれぞれ中心 $z = 0$ に節をもつ状態と腹をもつ状態に対応する。

[1.2] 電場・磁束密度の複素振幅

腹の電場振幅を E_0 とし、電場の全体位相を実数の正の係数に選ぶと

$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{E}}_n(z) = E_0 \sin\left[q_n\left(z + \frac{L}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_x}.$$

ファラデーの法則 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$ の y 成分は、上記の時間依存では $\partial_z \widetilde{E}_x = i\omega_n \widetilde{B}_y$ である。よって

$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{B}}_n(z) = -i\frac{E_0}{c}\cos\left[q_n\left(z + \frac{L}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_y}.$$

電場の節で磁束密度は腹になり、両者は時間的に $\pi/2$ だけずれる。これらを $e^{-i\omega_n t}$ に掛けて実部を取れば、実際の電場と磁束密度が得られる。

[1.3] 鏡 2 への放射圧

$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}/\mu_0$ を代入すると、$\widetilde{\boldsymbol{E}}_n \times \widetilde{\boldsymbol{H}}_n^*$ は純虚数である。従って鏡間の平均エネルギー流と平均運動量密度はともに零である。しかし、これは鏡への力が零であることを意味しない。定在波は振幅 $E_0/2$ の右向き進行波と左向き進行波に分解できる。右向き波の時間平均強度は $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c(E_0/2)^2$ であり、鏡 2 で完全反射すると単位面積・単位時間あたりの運動量変化は $2I/c$ となる。従って $+z$ 方向に作用する圧力は

$$\boxed{P = \frac{2I}{c} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}}.$$

別法として、鏡面では $E_x = 0$ であり、$|B_y|$ の振幅が E_0/c となることから、磁気圧の時間平均 $\langle B^2/(2\mu_0)\rangle = E_0^2/(4\mu_0 c^2)$ も同じ値を与える。

[2] ばねで支えられた完全反射鏡

鏡 2 に働く放射圧の力は $+z$ 方向に AP、自然長から δ だけ移動したばねの力は $-k\delta$ である。静的平衡条件 $AP - k\delta = 0$ と [1.3] より

$$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon_0 A E_0^2}{4k} > 0}.$$

圧力に面積を掛けたものが力なので、右辺の単位は長さである。完全反射の定在波が成立する角周波数は移動後の鏡間長に応じて選ばれるが、腹の振幅を E_0 に固定したときの鏡面圧力は [1.3] と同じである。

[3.1] 部分反射鏡を通して入射する光

鏡間長を $d = z_2 - z_1$ とする。鏡 1 から鏡間へ入る進行波の複素振幅は tE_1、$t = \sqrt{1-r^2}$ である。鏡間で一往復すると、鏡 1・鏡 2 でそれぞれ $-r, -1$ の反射と位相 e^{2iqd} を受け、複素振幅は re^{2iqd} 倍される。$0 < r < 1$ だから多重反射の和は収束し、右向き進行波の振幅は

$$a = \frac{tE_1}{1 - re^{2iqd}}.$$

完全反射する鏡 2 により左向き波の振幅の大きさも $|a|$ である。実際、鏡間の電場は

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = a\big[e^{iq(z-z_1)} - e^{2iqd}e^{-iq(z-z_1)}\big]\boldsymbol{e}_x = 2iae^{iqd}\sin[q(z-z_2)]\boldsymbol{e}_x.$$

鏡 2 の位置では零となり、腹では二つの進行波が同位相に重なるので $E_0 = 2|a|$ となる。E_1 を正の実振幅とすると

$$\boxed{\frac{E_0}{E_1} = \frac{2\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd)}}}.$$

特に $z_1 = -L/2, z_2 = L/2$ では $d = L$ を代入する。共振条件 $qL = n\pi$ も満たす場合に限り、比は $2\sqrt{(1+r)/(1-r)}$ になる。[3.1] 単独では ω にその条件は課されていないため、上式の $d = L$ が一般の答えである。

[3.2] 半値となる鏡 1 の移動量

問題文の条件から、$z_1 = -L/2$、すなわち $d = L$ で比が極大になるように ω を選ぶ。これは $qL = n\pi$ (n は正の整数) を満たす選択であり、極大値は

$$\left(\frac{E_0}{E_1}\right)_{\max} = \frac{2\sqrt{1-r^2}}{1-r}.$$

鏡 1 を $\pm\Delta$ 動かすと $d = L \mp \Delta$ となる。比が極大値の $1/\sqrt{2}$ となる条件は、分母の二乗が共振時の 2 倍になること、すなわち

$$4r\sin^2(q\Delta) = (1-r)^2.$$

$0 < q\Delta < \pi/2$ の枝を問題文が指定しているので

$$\boxed{\Delta = \frac{c}{\omega}\arcsin\left(\frac{1-r}{2\sqrt{r}}\right)}.$$

$1/2 < r < 1$ では逆正弦の引数は 0 と 1 の間にあり、指定された範囲に入る。

[3.3] 微小振動の実効ばね定数

ここでは入射振幅 E_1 と角周波数 ω を固定し、光学場は鏡 2 の動きに即座に追従する。鏡 2 が右へ動けば $d = z_2 - z_1$ が増す。[3.1] と [1.3] より、鏡 2 を右へ押す力は

$$F_{\rm opt}(d) = AP(d), \qquad P(d) = \frac{\varepsilon_0 E_0(d)^2}{4} = \frac{\varepsilon_0(1-r^2)E_1^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd)}.$$

鏡 1 を固定して鏡 2 の平衡位置を $z_{2*} = L/2 + \delta$、平衡時の鏡間長を $d_* = z_{2*} - z_1$ とする。平衡条件は $k\delta = F_{\rm opt}(d_*)$ であるから、入射光があるとき $\delta > 0$ となる。平衡点からの微小変位 $x = z_2 - z_{2*}$ に対する合力は

$$F_{\rm opt}(d_* + x) - k(\delta + x) = [F'_{\rm opt}(d_*) - k]x + O(x^2) \tag{1}$$

である。従って一次項を $-k'x$ と書けば

$$\begin{aligned} k' &= k - \left.\frac{dF_{\rm opt}}{dd}\right|_{d_*} \\ &= k + \frac{4Arq\varepsilon_0(1-r^2)E_1^2\sin(2qd_*)}{\left[(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd_*)\right]^2}. \end{aligned}$$

分母は正なので、$k' - k$ の符号は $\sin(2qd_*)$ で決まる。まず $|\delta| \ll \Delta$ に基づき、δ/Δ の一次までの光ばね効果を比較する。平衡条件 $k\delta = F_{\rm opt}(d_*)$ を使うと

$$\frac{k'-k}{k} = \frac{4rq\delta\sin(2qd_*)}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd_*)}.$$

共振条件 $qL = n\pi$ より、(a) の基準位置 $d = L$ では光圧の傾きが零であり、一次では $k' \simeq k$ となる。(b) の基準位置 $d = L - \Delta$ では鏡 2 を右へ動かすと共振へ近づき、光圧が増して復元力を弱める。(c) の $d = L + \Delta$ では共振から遠ざかり、光圧が減って復元力を強める。実際、(b),(c) ではそれぞれ

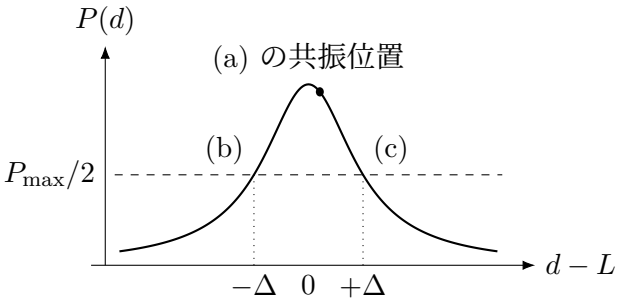
$$\frac{k'-k}{k} = \mp q\delta\cot(q\Delta) + O\big((\delta/\Delta)^2\big).$$

ここで δ/Δ の一次項だけを残す追加の近似をすれば、硬化がその次数で見えるのは (c) である。

ただし、厳密な平衡点はどの配置でも自然長から $\delta > 0$ だけ右にある。(a) では $d_* = L + \delta$ なので光圧は極大を少し過ぎて減少し、やはり復元力を増す。上式でその補正は

$$\left.\frac{k'-k}{k}\right|_{\rm (a)} = \frac{8rq^2\delta^2}{(1-r)^2} + O((q\delta)^4) > 0.$$

(b) は $d_* = L - \Delta + \delta$、(c) は $d_* = L + \Delta + \delta$ であり、$0 < \delta \ll \Delta$ の範囲では先ほどの符号を保つ。本問は δ/Δ の一次で打ち切るよう指定していないので、$k' > k$ となる答えは $\boxed{\text{(a), (c)}}$ である。(a) の硬化は一次の近似では見えない二次の効果である。



共振近傍の光圧の模式図。(a) の実際の平衡点は共振位置より右にあり、黒点はその小さなずれを表す。

物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

以下で $C = (\partial U/\partial T)$ は指定された振動子系の全熱容量とする。固体の単位質量あたりの格子比熱は、得られた C を固体の質量で割ったものである。体積や振動数は温度に依存しないものとして微分する。

[1] 古典的な 1 次元調和振動子

[1.1] 分配関数

M 個の振動子は独立なので、まず 1 個の位相空間積分 z_{cl} を計算する。運動量と位置の積分を分け、問題文のガウス積分を使うと

$$z_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\, e^{-\beta p^2/(2m)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{-\beta m\omega^2 x^2/2} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}} = \frac{1}{\beta\hbar\omega}. \tag{2}$$

従って

$$\boxed{Z(T) = z_{\mathrm{cl}}^M = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}\right)^M}. \tag{3}$$

[1.2] 内部エネルギー

正準分布の関係 $U = -\partial \ln Z/\partial\beta$ に上式を代入する。$\ln Z = -M\ln(\beta\hbar\omega)$ より

$$\boxed{U = \frac{M}{\beta} = Mk_{\mathrm{B}}T}. \tag{4}$$

1 振動子に運動・位置の二つの二次項があり、各項が $k_{\mathrm{B}}T/2$ を担うという等分配則とも一致する。

[1.3] 熱容量

振動数を固定して U を温度微分すると

$$\boxed{C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\omega} = Mk_{\mathrm{B}}}. \tag{5}$$

[2] 単一振動数の量子的調和振動子

[2.1] 分配関数

1 振動子について $n = 0, 1, \ldots$ のボルツマン因子を和にする。$q = e^{-\beta\hbar\omega}$ は $0 < q < 1$ なので等比級数を使え、

$$z_{\mathrm{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\beta\hbar\omega/2)}. \tag{6}$$

M 個の独立なモードでは

$$\boxed{Z(T) = \left[\frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}\right]^{M}}. \tag{7}$$

[2.2] 内部エネルギー

$\ln Z = M[-\beta\hbar\omega/2 - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega})]$ を β で微分すると

$$\boxed{U = M\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)}. \tag{8}$$

第 1 項は $T = 0$ でも残る零点エネルギー、第 2 項は熱励起のエネルギーである。

[2.3] 熱容量

$\Theta = \hbar\omega/k_{\mathrm{B}}$ を振動子の温度尺度とおくと、$\beta\hbar\omega = \Theta/T$ である。零点項は温度微分で消え、$y = \Theta/T$ について $\mathrm{d}y/\mathrm{d}T = -y/T$ を使えば

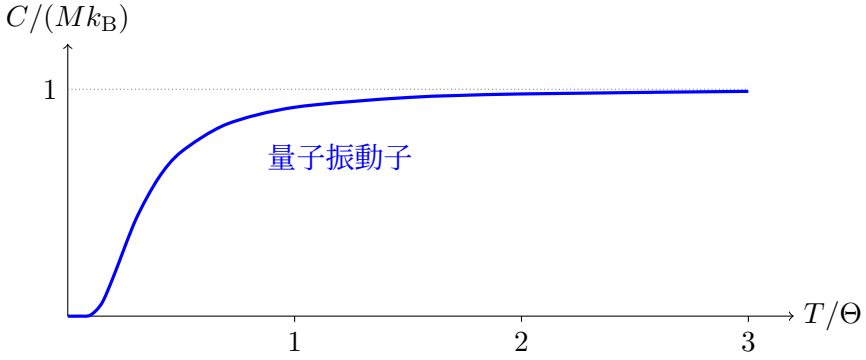
$$\boxed{C = Mk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^{2}\frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T} - 1)^{2}}} = Mk_{\mathrm{B}}\left[\frac{\Theta/(2T)}{\sinh(\Theta/(2T))}\right]^{2}. \tag{9}$$

[2.4] 低温・高温と概形

$T \ll \Theta$ では $e^{\Theta/T} \gg 1$、$T \gg \Theta$ では $\sinh(y/2) \sim y/2$ である。従って

$$\boxed{C \sim Mk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^{2} e^{-\Theta/T} \quad (T \ll \Theta)}, \qquad \boxed{C \longrightarrow Mk_{\mathrm{B}} \quad (T \gg \Theta)}. \tag{10}$$

低温では最初の励起に必要な有限のエネルギー $\hbar\omega$ が熱励起を抑える。図の横軸 T/Θ、縦軸 $C/(Mk_{\mathrm{B}})$ は無次元である。



[3] デバイ型の振動数分布

[3.1] 内部エネルギーと熱容量の積分

まず与えられた状態密度の規格化は

$$\int_0^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{9N}{\omega_\mathrm{D}^3}\int_0^{\omega_\mathrm{D}} \omega^2\,\mathrm{d}\omega = 3N \tag{11}$$

であり、3 次元固体の振動モード数に一致する。各周波数のモードに [2.2] の 1 振動子のエネルギーを適用して、

$$\boxed{U = \int_0^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right]\mathrm{d}\omega}. \tag{12}$$

このうち零点エネルギーは $\frac{1}{2}\int g(\omega)\hbar\omega\,\mathrm{d}\omega = 9N\hbar\omega_\mathrm{D}/8$ であり、熱容量に寄与しない。従って、微分を積分の中に入れると

$$\boxed{C = k_\mathrm{B}\int_0^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)(\beta\hbar\omega)^2\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2}\mathrm{d}\omega}. \tag{13}$$

[3.2] 低温・高温と概形

デバイ温度 $\Theta_\mathrm{D} = \hbar\omega_\mathrm{D}/k_\mathrm{B}$ を導入し、積分変数を $x = \beta\hbar\omega$ に変える。上限は Θ_D/T、また $g(\omega)\mathrm{d}\omega = 9N(T/\Theta_\mathrm{D})^3x^2\mathrm{d}x$ なので

$$C = 9Nk_\mathrm{B}\left(\frac{T}{\Theta_\mathrm{D}}\right)^3\int_0^{\Theta_\mathrm{D}/T}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

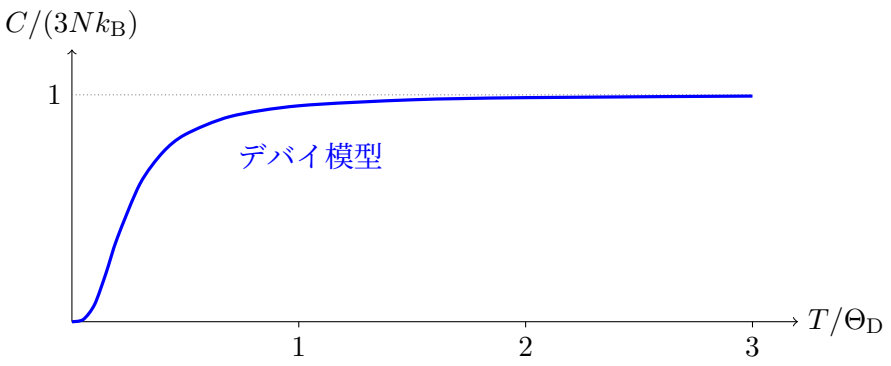
$T \ll \Theta_\mathrm{D}$ では上限が十分大きい。被積分関数は大きい x で x^4e^{-x} に近づくため、上限から先の尾部は指数的に小さく、積分の上限を無限大に延ばせる。問題文の積分値を使い、

$$\boxed{C \sim \frac{12\pi^4}{5}Nk_\mathrm{B}\left(\frac{T}{\Theta_\mathrm{D}}\right)^3 \quad (T \ll \Theta_\mathrm{D})}. \tag{15}$$

高温では全モードに k_B の熱容量が戻る。実際、$x \ll 1$ で $x^2e^x/(e^x-1)^2 \to 1$ だから、規格化したモード数を用いて

$$\boxed{C \longrightarrow 3Nk_\mathrm{B} \quad (T \gg \Theta_\mathrm{D})}. \tag{16}$$

概形は低温で原点から T^3 に沿って立ち上がり、上側の漸近値 $3Nk_\mathrm{B}$ に近づく。



[4] 3 種類の固体モデルの比較

[4.1] 同じ座標でのプロット

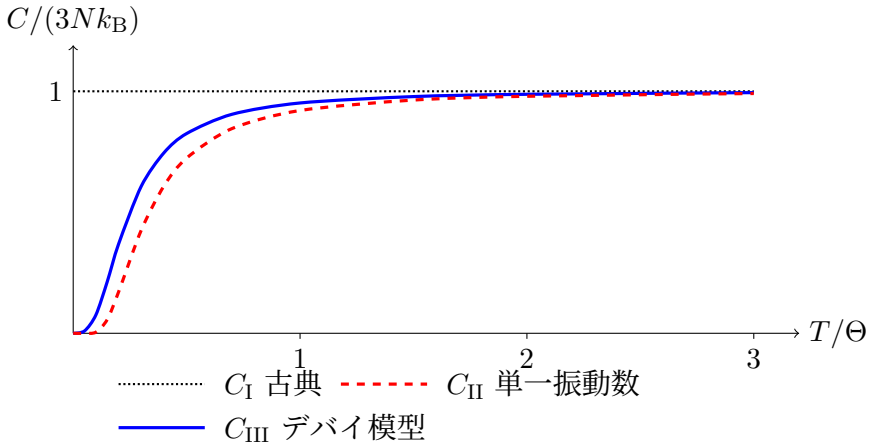
[1] と [2] の M を $3N$ に替えると、$\Theta = \hbar\omega/k_{\mathrm{B}}$ を用いて

$$C_{\mathrm{I}} = 3Nk_{\mathrm{B}}, \tag{17}$$

$$C_{\mathrm{II}} = 3Nk_{\mathrm{B}} \left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 \frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T}-1)^2}, \tag{18}$$

$$C_{\mathrm{III}} = 9Nk_{\mathrm{B}} \left(\frac{T}{\Theta_{\mathrm{D}}}\right)^3 \int_0^{\Theta_{\mathrm{D}}/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{19}$$

原題は ω と ω_{D} の比を指定していない。以下の図は比較例として $\omega = \omega_{\mathrm{D}}$、すなわち $\Theta = \Theta_{\mathrm{D}}$ と置き、縦軸を $3Nk_{\mathrm{B}}$ で割った。



[4.2] 高温での比較

$T \gg \Theta, \Theta_{\mathrm{D}}$ では各量子モードの平均エネルギーの主項が $k_{\mathrm{B}}T$ となる。従って $3N$ 個の振動モードはいずれも等分配則の値に戻り、

$$\boxed{C_{\mathrm{I}} = 3Nk_{\mathrm{B}}, \qquad C_{\mathrm{II}} \longrightarrow 3Nk_{\mathrm{B}}, \qquad C_{\mathrm{III}} \longrightarrow 3Nk_{\mathrm{B}}}. \tag{20}$$

有限の高温での近づき方も確認できる。$y^2e^y/(e^y-1)^2 = 1 - y^2/12 + O(y^4)$ を各モードに用いると

$$C_{\mathrm{II}} = 3Nk_{\mathrm{B}}\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 + O\big((\Theta/T)^4\big)\right], \qquad C_{\mathrm{III}} = 3Nk_{\mathrm{B}}\left[1 - \frac{1}{20}\left(\frac{\Theta_{\mathrm{D}}}{T}\right)^2 + O\big((\Theta_{\mathrm{D}}/T)^4\big)\right]. \tag{21}$$

後者では $g(\omega)$ による平均が $\langle\omega^2\rangle = (3N)^{-1}\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} g(\omega)\omega^2\,d\omega = 3\omega_{\mathrm{D}}^2/5$ であり、$1/12$ にこれを掛けて係数 $1/20$ を得る。どちらの量子曲線も古典値へ下から近づく。

[4.3] 低温での比較

古典模型を形式的に低温へ外挿すると $C_{\mathrm{I}} = 3Nk_{\mathrm{B}}$ のままであり、熱励起の量子化による凍結を表せない。一方、単一振動数の量子模型にはすべてのモードに同じ有限の励起ギャップ $\hbar\omega$ があるので

$$\boxed{C_{\mathrm{II}} \sim 3Nk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 e^{-\Theta/T}}. \tag{22}$$

デバイ模型には $\omega \to 0$ の低周波モードが連続して存在する。温度 T で励起しやすい $\hbar\omega \lesssim k_{\mathrm{B}}T$ のモード数は $g(\omega) \propto \omega^2$ から T^3 に比例するため、

$$\boxed{C_{\mathrm{III}} \sim \frac{12\pi^4}{5} N k_{\mathrm{B}} \left(\frac{T}{\Theta_{\mathrm{D}}}\right)^3}. \tag{23}$$

したがって $T \to 0$ では両量子模型の熱容量は零になるが、デバイ模型の冪減衰は単一振動数模型の指数減衰より遅い。ここでは格子振動だけを比較している。実在の金属では電子の熱容量が低温でおおむね T に比例する場合があり、この 3 模型の式には含まれない。

物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 観測量の交換関係

式 (3) の定義と $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を使う。$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -1$ なので

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i}{2}[\hat{a}^\dagger + \hat{a}, \hat{a}^\dagger - \hat{a}] = \frac{i}{2}\{-[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} = \boxed{i}.$$

$\hat{x}, \hat{p}$ は無次元の共役な観測量である。

[1.2] 真空のゆらぎ

$\hat{a}|0\rangle = 0$ と交換関係から、$\langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$、$\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1$ である。$\hat{a}^2$ と $(\hat{a}^\dagger)^2$ の真空期待値もゼロであり、$\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0$ だから

$$\sigma_x^2 = \langle\hat{x}^2\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_p^2 = \langle\hat{p}^2\rangle = \frac{1}{2}.$$

従って $\boxed{\sigma_x\sigma_p = 1/2}$。右辺も $\frac{1}{2}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle| = 1/2$ なので、不確定性関係の等号が成立する。

[2.1] スクイーズ変換後の係数

式 (5) で $\hat{S}^\dagger\hat{a}\hat{S}$ と $\hat{S}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{S}$ を式 (1) へ代入する。$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$ に注意すると

$$\hat{S}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{S} = \cosh(2r)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sinh^2 r - \frac{\sinh(2r)}{2}\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big),$$
$$\hat{S}^\dagger\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big)\hat{S} = \cosh(2r)\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big) - 2\sinh(2r)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \sinh(2r).$$

よって式 (6) の各係数は

$$\boxed{\omega(r)} = \boxed{\omega\cosh(2r) - \Delta\sinh(2r)},$$
$$\boxed{\Delta(r)} = \boxed{\Delta\cosh(2r) - \omega\sinh(2r)},$$
$$\boxed{E(r)} = \boxed{\hbar\omega\sinh^2 r - \frac{\hbar\Delta}{2}\sinh(2r)}.$$

$r = 0$ を入れると元の $\omega, \Delta, E = 0$ に戻る。

[2.2] 基底状態と偶数光子

$\omega > \Delta > 0$ のとき $\Delta(r) = 0$ とする実数 r は

$$\tanh(2r) = \frac{\Delta}{\omega}, \qquad \boxed{r = \frac{1}{4}\log\frac{\omega+\Delta}{\omega-\Delta}} > 0.$$

この値で $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} > 0$ とおけば $\omega(r) = \Omega$、$E(r) = \hbar(\Omega - \omega)/2$ であり、

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{H}\hat{S}(r) = \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega).$$

右辺では $\hat{a}^\dagger\hat{a} \geq 0$ なので $|0\rangle$ が基底状態である。元のハミルトニアンの基底状態とそのエネルギーは、それぞれ $\boxed{\hat{S}(r)|0\rangle}$、$\hbar(\Omega - \omega)/2$ となる。

$\hat{S}(r)$ の指数の各項 $\hat{a}^2, (\hat{a}^\dagger)^2$ は光子数を 2 だけ変える。真空は光子数 0 から始まるため、指数を展開して作用させても偶数光子の部分空間から出ない。従って $\hat{S}(r)|0\rangle$ には奇数光子成分がない。

[2.3] スクイーズされた基底状態のゆらぎ

式 (5) と観測量の定義から

$$\hat{S}^\dagger\hat{x}\hat{S} = e^{-r}\hat{x}, \qquad \hat{S}^\dagger\hat{p}\hat{S} = e^{r}\hat{p}.$$

$\hat{S}|0\rangle$ での期待値を真空期待値に移すと、平均値はどちらもゼロであり、[1.2] の分散から

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{e^{-2r}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega-\Delta}{\omega+\Delta}}}, \qquad \boxed{\sigma_p^2 = \frac{e^{2r}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega+\Delta}{\omega-\Delta}}}.$$

$\Delta > 0$ では真空に比べて x の分散が小さく、p の分散が大きい。一方、積は $\sigma_x\sigma_p = 1/2 = \frac{1}{2}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle|$ であり、等号は保たれる。$\Delta \to 0$ では両分散は $1/2$ に戻る。

[3.1] ハイゼンベルク方程式の行列

交換関係を積に適用すると

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [(\hat{a}^\dagger)^2, \hat{a}] = -2\hat{a}^\dagger, \quad [\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger] = 2\hat{a}.$$

式 (7) から $\dot{\hat{a}} = -i(\omega\hat{a} + \Delta\hat{a}^\dagger)$、$\dot{\hat{a}}^\dagger = i(\Delta\hat{a} + \omega\hat{a}^\dagger)$ となる。従って式 (8) の行列は

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \omega & \Delta \\ -\Delta & -\omega \end{pmatrix}}.$$

[3.2] 固有値と安定性

$M^2 = (\omega^2 - \Delta^2)I$ なので固有値は

$$\boxed{\lambda_\pm = \pm\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}.$$

$\omega > \Delta$ なら実数の $\lambda_\pm = \pm\Omega$ である。$M^2 = \Omega^2 I$ を指数級数の偶数次と奇数次に適用すると、$e^{-iMt} = I\cos(\Omega t) - i(M/\Omega)\sin(\Omega t)$ となり振動的かつ有界である。$\omega < \Delta$ なら $\gamma = \sqrt{\Delta^2 - \omega^2} > 0$ として $M^2 = -\gamma^2 I$ なので、同じ展開から $e^{-iMt} = I\cosh(\gamma t) - i(M/\gamma)\sinh(\gamma t)$ となる。一方のモードは指数的に増大するので不安定である。境界 $\omega = \Delta$ では固有値がともにゼロでも $M^2 = 0$ かつ $M \neq 0$ なので $e^{-iMt} = I - iMt$ は時間に比例して増大する。この意味でも有界な安定領域には含まれない。

[3.3] 境界での光子数

$\omega = \Delta$ で $M^2 = 0$ を使い、初期条件 $\hat{a}(0) = \hat{a}$、$\hat{a}^\dagger(0) = \hat{a}^\dagger$ を式 (8) に適用する。

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \end{pmatrix} = (I - iMt) \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}(t) = (1 - i\Delta t)\hat{a} - i\Delta t \hat{a}^\dagger.$$

初期真空では $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$、$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle = 1$ である。従って $\hat{a}(t)$ の生成演算子の係数だけが $\langle 0|\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|0\rangle$ に寄与し、

$$\boxed{\langle \hat{n}(t) \rangle = |-i\Delta t|^2 = \Delta^2 t^2}.$$

$t = 0$ でゼロに戻り、Δt は無次元である。

物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

質点の質量を m、自然角周波数を ω_0、粘性抵抗係数を ζ とする。バネによる復元力は $-m\omega_0^2 x$ であるから、両部分で用いる運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = f(t). \tag{1}$$

位置の正方向は自然長の位置を原点とする x 軸の正方向とする。

[1.1] 周期外力に対する定常解

この節では周期外力 $f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$（$\Omega > 0$）を加える。外力と同じ時間因子をもつ定常解 $x(t) = X_0 e^{i\Omega t}$ を式(1)に代入する。$\dot{x} = i\Omega x$、$\ddot{x} = -\Omega^2 x$ なので

$$\{m(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\zeta\Omega\} X_0 = F_0.$$

$\zeta > 0$ かつ $\Omega > 0$ で分母はゼロにならない。したがって、過渡項が減衰した後の複素表示は

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0 e^{i\Omega t}}{m(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\zeta\Omega}}. \tag{2}$$

実際の位置が必要なら、この複素式の実部を取る。

[1.2] 応答関数の実部と虚部

式(2)を $f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ で割り、分母の共役複素数を掛ける。$D(\Omega) = m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \zeta^2\Omega^2 > 0$ とおくと

$$\varepsilon = \frac{m(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\zeta\Omega}{D(\Omega)}, \qquad \boxed{\varepsilon' = \frac{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}{D(\Omega)}, \quad \varepsilon'' = -\frac{\zeta\Omega}{D(\Omega)}}. \tag{3}$$

$e^{i\Omega t}$ を選んだため減衰項は分母で $+i\zeta\Omega$ となり、$\Omega > 0$ で $\varepsilon'' < 0$ である。固有角周波数 $\Omega = \omega_0$ では $\varepsilon' = 0$、$-\varepsilon'' = 1/(\zeta\omega_0)$ となる。

[1.3] 弱減衰・近共鳴での概形と極値

$\Delta = \Omega - \omega_0$、$\gamma = \zeta/(2m)$ とおく。弱減衰 $\gamma \ll \omega_0$ かつ $|\Delta| \ll \omega_0$ の範囲では $\omega_0^2 - \Omega^2 \simeq -2\omega_0\Delta$、$\zeta\Omega \simeq \zeta\omega_0$ だから

$$\varepsilon' \simeq -\frac{\Delta}{2m\omega_0(\Delta^2 + \gamma^2)}, \qquad -\varepsilon'' \simeq \frac{\gamma}{2m\omega_0(\Delta^2 + \gamma^2)}. \tag{4}$$

第一式を Δ で微分すると極値条件は $\Delta^2 = \gamma^2$ である。よって ε' の正の極大は $\Omega \simeq \omega_0 - \gamma$、負の極小は $\Omega \simeq \omega_0 + \gamma$ にある。第二式は $\Delta = 0$ で極大となる。下図は横軸を Δ/γ とする近共鳴領域の概形であり、縦軸は両関数に共通の $A = 1/(2m\omega_0\gamma)$ で割っている。

[2.1] 平均二乗変位

ここから x, f は実数であり、角括弧は定常状態のアンサンブル平均を表す。問題で与えられた平均零 $\langle f \rangle = 0$ と同時刻の $x(t), f(t)$ の無相関を用いる。式(1)に $x(t)$ を掛けて平均すると

$$m\langle x\ddot{x}\rangle + \zeta\langle x\dot{x}\rangle + m\omega_0^2\langle x^2\rangle = \langle xf\rangle = \langle x\rangle\langle f\rangle = 0.$$

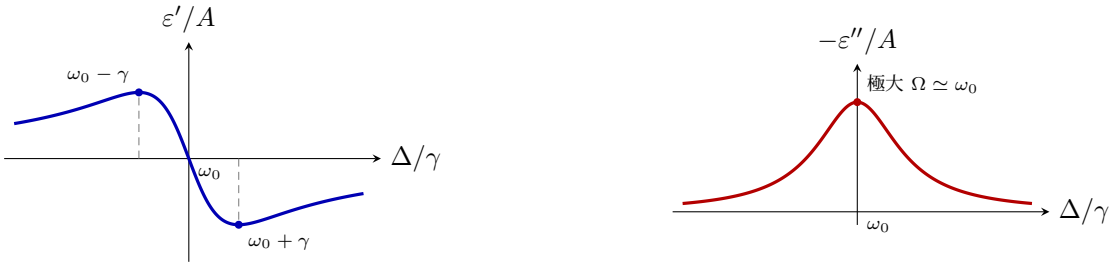


Figure 1: 近共鳴の ε' と $-\varepsilon''$。左右の横軸の原点は $\Omega=\omega_0$ に対応する。

定常状態では $d\langle x^2\rangle/dt=0$ より $\langle x\dot{x}\rangle=0$。また $d\langle x\dot{x}\rangle/dt=\langle\dot{x}^2+x\ddot{x}\rangle=0$ より $\langle x\ddot{x}\rangle=-\langle\dot{x}^2\rangle=-\overline{v^2}$ とする。ここで $v=\dot{x}$、$\overline{v^2}$ はその二乗の定常平均である。したがって

$$\boxed{\langle x(t)^2\rangle=\frac{\overline{v^2}}{\omega_0^2}}. \tag{5}$$

[2.2] フーリエ変換とパワースペクトル

原本の無限時間表示 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$ と $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ を形式的に用いると、時間微分のフーリエ変換は $i\omega X$、二階微分は $-\omega^2X$ となる。定常雑音のスペクトルは、長さ $T>0$ の観測窓で $X_T(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$ と $F_T(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ を定め、$I_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\langle|X_T(\omega)|^2\rangle/T$、$I_f(\omega)=\lim_{T\to\infty}\langle|F_T(\omega)|^2\rangle/T$ と読む。有限窓では部分積分により、$D(\omega)=m(\omega_0^2-\omega^2)+i\zeta\omega$ として

$$D(\omega)X_T(\omega)=F_T(\omega)-\left[e^{-i\omega t}\{m\dot{x}(t)+(\zeta+im\omega)x(t)\}\right]_{-T/2}^{T/2}.$$

定常な $x,\dot{x}$ の二乗平均が有限なら、角括弧内の端点項の二乗平均は T に依存せず有界である。$\langle|F_T|^2\rangle=O(T)$ のとき、端点項と F_T の交差項も Cauchy–Schwarz の不等式で $O(\sqrt{T})$ だから、T で割るスペクトルの極限には寄与しない。したがって、形式的な無限時間の関係と、それが表す定常スペクトルは

$$\boxed{X(\omega)=\frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2-\omega^2)+i\zeta\omega}},\qquad \boxed{I_x(\omega)=\frac{I_f(\omega)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\zeta^2\omega^2}}. \tag{6}$$

後の白色入力では $\langle|F_T|^2\rangle=IT$ となり、上の条件を満たす。

[2.3] 変位の相関関数

白色揺動力の相関 $\langle f(t)f(t+\tau)\rangle=I\delta(\tau)\,(I>0)$ をフーリエ変換すると、$I_f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(t)f(t+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}\,d\tau=I$ となる。先に定めた減衰率 $\gamma=\zeta/(2m)$ を再び用い、問題の条件 $\gamma<\omega_0$ のもとで $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}>0$ とおけば

$$I_x(\omega)=\frac{I/m^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}. \tag{7}$$

逆変換を具体的に確認するため、$g(\tau)=e^{-\gamma|\tau|}\{\cos(\omega_1\tau)+(\gamma/\omega_1)\sin(\omega_1|\tau|)\}$ とおく。g は偶関数であり、$\gamma>0$ を用いた指数・三角関数の積分から

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau=2\int_0^{\infty}e^{-\gamma\tau}\left(\cos\omega_1\tau+\frac{\gamma}{\omega_1}\sin\omega_1\tau\right)\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{4\gamma\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}.$$

原本の逆変換 $C_x(\tau)=(2\pi)^{-1}\int I_x(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega$ と式(7)を照合し、$4m^2\gamma\omega_0^2=2\zeta m\omega_0^2$ を使うと

$$\boxed{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\frac{I}{2\zeta m\omega_0^2}e^{-\zeta|\tau|/(2m)}\left[\cos(\omega_1\tau)+\frac{\zeta}{2m\omega_1}\sin(\omega_1|\tau|)\right]}. \tag{8}$$

相関は τ の偶関数で、$|\tau|\to\infty$ でゼロに減衰する。$\tau=0$ では括弧が 1 となる。

[2.4] 揺動力の強さと平均二乗速度

式(8)に $\tau = 0$ を入れると $\langle x^2 \rangle = I/(2\zeta m \omega_0^2)$。これを式(5)と比較し、$\omega_0 > 0$ を用いて

$$\boxed{I = 2\zeta m \, \overline{v^2}}. \tag{9}$$

両辺の次元は「力の二乗 × 時間」で一致する。

物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1] 障壁より低いエネルギー $0 < \mathcal{E} < V_0$

原題の A は左から入射する波の振幅、B は反射波、E は右へ透過する波の振幅である。障壁の左右でポテンシャルは同じなので両側の進行波数は k、障壁内の減衰定数は γ である。

[1.1] $x = -a$ の接続

有限の段差では波動関数とその一階導関数が連続する。左側の $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ と内部の $Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ を $x = -a$ に代入して

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-\gamma a} + De^{\gamma a}, \tag{1}$$

$$ik\big(Ae^{-ika} - Be^{ika}\big) = \gamma\big(Ce^{-\gamma a} - De^{\gamma a}\big). \tag{2}$$

この二式が求める関係である。

[1.2] $x = a$ の接続

内部解と右側の Ee^{ikx} に同じ条件を課すと

$$Ce^{\gamma a} + De^{-\gamma a} = Ee^{ika}, \tag{3}$$

$$\gamma\big(Ce^{\gamma a} - De^{-\gamma a}\big) = ikEe^{ika}. \tag{4}$$

これが残る二式である。以下ではこれらを使って A/E と B/E を得る。

[1.3] 透過率 T_1

式(3), (4) を加減すると

$$Ce^{\gamma a} = \frac{Ee^{ika}}{2}\left(1 + \frac{ik}{\gamma}\right), \qquad De^{-\gamma a} = \frac{Ee^{ika}}{2}\left(1 - \frac{ik}{\gamma}\right).$$

これを式(1), (2) に代入し、二式の和と差を取る。反射波については原題の式 (3) に一致する

$$\begin{aligned}\frac{B}{E} &= \frac{(ik-\gamma)(ik+\gamma)}{4ik\gamma}e^{-2\gamma a} - \frac{(ik+\gamma)(ik-\gamma)}{4ik\gamma}e^{2\gamma a} \\ &= -i\frac{k^2+\gamma^2}{2k\gamma}\sinh(2\gamma a).\end{aligned} \tag{5}$$

同じ計算で

$$\frac{A}{E} = e^{2ika}\left[\cosh(2\gamma a) + i\frac{\gamma^2 - k^2}{2k\gamma}\sinh(2\gamma a)\right]. \tag{6}$$

左右の波数が等しいため、入射・透過確率流の比は $T_1 = |E/A|^2$ である。式(6) の絶対値を取って $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を使えば

$$\boxed{T_1 = \left[1 + \frac{(k^2+\gamma^2)^2}{4k^2\gamma^2}\sinh^2(2\gamma a)\right]^{-1}}. \tag{7}$$

実際、式(5)から $|B/A|^2 = |B/E|^2 T_1$ となり、式(7)は反射率と透過率の和が 1 であることとも一致する。

[1.4] $\gamma/k \ll 1$ かつ $a\gamma \ll 1$

$\sinh(2\gamma a) = 2\gamma a + O((\gamma a)^3)$ であり、$(k^2+\gamma^2)^2/k^4 = 1 + O((\gamma/k)^2)$ である。式(7) の角括弧内の増分は、相対誤差 $O((\gamma/k)^2 + (a\gamma)^2)$ で k^2a^2 となる。従って

$$\boxed{T_1 \simeq \frac{1}{1+k^2a^2}} \qquad (\gamma/k \ll 1,\ a\gamma \ll 1).$$

ここでは ka の大小は指定されておらず、この因子をさらに展開しない。

[1.5] $a\gamma \gg 1$

$\sinh^2(2\gamma a) \simeq e^{4\gamma a}/4$ を式(7) に入れる。指数項が支配的になるので

$$\boxed{T_1 \simeq \frac{16k^2\gamma^2}{(k^2+\gamma^2)^2} e^{-4\gamma a}} \qquad (a\gamma \gg 1).$$

指数 $4\gamma a$ は障壁の幅 $2a$ を確率（振幅二乗）で評価した結果である。

[2] 障壁より高いエネルギー $\mathcal{E} > V_0$

[2.1] 透過率 $T_2(\mathcal{E})$

障壁の内部も進行波となり、その波数は $q = \sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}/\hbar$ である。両境界を連続につないで得た式(7)で $\gamma = iq$ と置いてもよい。$\sinh(2iqa) = i\sin(2qa)$ と $k^2 - q^2 = 2mV_0/\hbar^2$ から

$$\boxed{T_2(\mathcal{E}) = \left[1 + \frac{V_0^2}{4\mathcal{E}(\mathcal{E}-V_0)}\sin^2\left(\frac{2a\sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}}{\hbar}\right)\right]^{-1}}, \qquad \mathcal{E} > V_0. \tag{8}$$

[2.2] 概形と極大

式(8) の角括弧内で正弦二乗以外の因子は正である。従って $T_2 \le 1$ であり、全ての透過率 1 の極大は

$$\boxed{\frac{2a\sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}}{\hbar} = n\pi \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{E} = V_0 + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

これら以外に局所極大もない。$z = 2aq$、$\beta = 8ma^2V_0/\hbar^2 > 0$ と置くと、逆透過率の正の増分は

$$T_2^{-1} - 1 = \frac{\beta^2 \sin^2 z}{4z^2(z^2+\beta)}. \tag{10}$$

$0 < z < \pi$ では $\sin z/z$ も $1/(z^2+\beta)$ も減少するため、T_2 に内部の極大はない。$n\pi < z < (n+1)\pi$（$n \geq 1$）では、この正の増分の対数微分の半分は

$$h(z) = \cot z - \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+\beta}, \qquad h'(z) = -\csc^2 z + \frac{1}{z^2} + \frac{z^2-\beta}{(z^2+\beta)^2} < -1 + \frac{2}{\pi^2} < 0. \tag{11}$$

h は区間の左端で $+\infty$、右端で $-\infty$ へ向かうので、零点は一つだけである。その点は逆透過率の極大、すなわち T_2 の谷である。従って共鳴点以外に局所極大はない。

$n = 0$ は $\mathcal{E} = V_0$ であり、指定された $\mathcal{E} > V_0$ の範囲外である。境界の片側極限は $\sin z \sim z$ から

$$\lim_{\mathcal{E} \downarrow V_0} T_2 = \left(1 + \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}\right)^{-1}.$$

また $\mathcal{E} \gg V_0$ では振動する項の係数が $O(V_0^2/\mathcal{E}^2)$ となるため、$T_2 \to 1$ である。つまり共鳴の谷も高エネルギーでは 1 へ近づく。

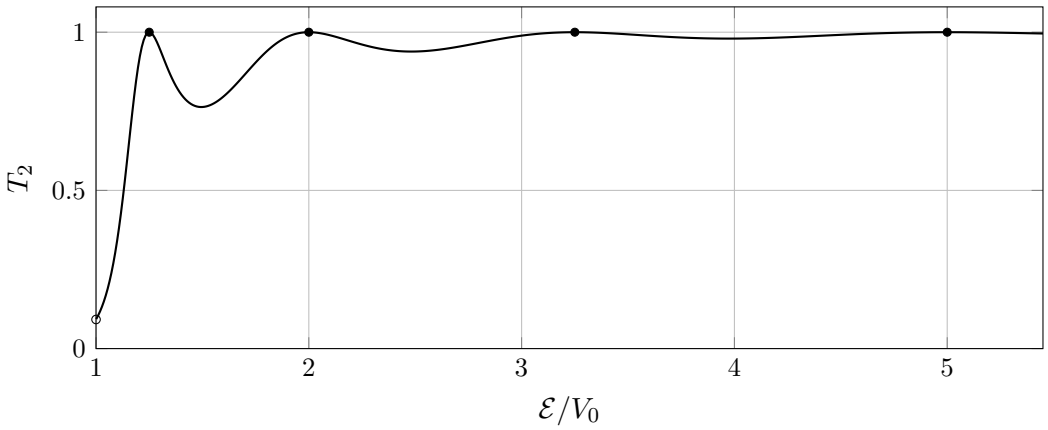


Figure 1: $2a\sqrt{2mV_0}/\hbar = 2\pi$ と選んだ場合の式(8) の概形。白丸は $\mathcal{E} = V_0$ の片側極限で、定義域には含まれない。黒点は透過率 1 の共鳴である。

図 1は障壁の幅を一例に固定している。一般の幅ではピークの横位置は式(9) に従う。

[3] 右側が $V(x) = -V_1$ の場合

[3.1] 透過率 T_3 と反射率 R_3

$0 < \mathcal{E} < V_0$、$V_1 > 0$ の範囲を保つ。左側と障壁内の解は [1] と同じで、右側の透過波は Ee^{ik_1x} と書く。$k_1 = \sqrt{2m(\mathcal{E}+V_1)}/\hbar$ である。右境界 $x = a$ では $\psi(a) = Ee^{ik_1a}$、$\psi'(a) = ik_1Ee^{ik_1a}$。障壁内では任意の点 x で

$$\psi(x) = \psi(a)\cosh[\gamma(x-a)] + \frac{\psi'(a)}{\gamma}\sinh[\gamma(x-a)],$$
$$\psi'(x) = \gamma\psi(a)\sinh[\gamma(x-a)] + \psi'(a)\cosh[\gamma(x-a)].$$

この二式に $x = -a$ を代入して右境界の値を幅 $2a$ だけ左境界まで運ぶと

$$\psi(-a) = Ee^{ik_1a}\left[\cosh(2\gamma a) - i\frac{k_1}{\gamma}\sinh(2\gamma a)\right],$$
$$\psi'(-a) = Ee^{ik_1a}\left[-\gamma\sinh(2\gamma a) + ik_1\cosh(2\gamma a)\right].$$

一方、左境界では $\psi(-a) = Ae^{-ika} + Be^{ika}$、$\psi'(-a) = ik(Ae^{-ika} - Be^{ika})$ である。和と差を解くと

$$\frac{2Ae^{-ika}}{Ee^{ik_1 a}} = \left(1 + \frac{k_1}{k}\right)\cosh(2\gamma a) + i\left(\frac{\gamma}{k} - \frac{k_1}{\gamma}\right)\sinh(2\gamma a), \tag{12}$$

$$\frac{2Be^{ika}}{Ee^{ik_1 a}} = \left(1 - \frac{k_1}{k}\right)\cosh(2\gamma a) - i\left(\frac{\gamma}{k} + \frac{k_1}{\gamma}\right)\sinh(2\gamma a). \tag{13}$$

進行波 Fe^{ipx} の確率流は $\hbar p|F|^2/m$ である。右側の速度が違うため、透過率には k_1/k が掛かる。式(12), (13) の絶対値から

$$\boxed{T_3 = \frac{k_1}{k}\left|\frac{E}{A}\right|^2 = \frac{4kk_1}{(k+k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma - kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}}. \tag{14}$$

$$\boxed{R_3 = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k-k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma + kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}{(k+k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma - kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}}. \tag{15}$$

二式の分母から R_3 の分子を引くと $4kk_1(\cosh^2 - \sinh^2) = 4kk_1$ となり、$R_3 + T_3 = 1$ が確かめられる。また $k_1 = k$ とすれば式(7)に戻る。

[3.2] $\mathcal{E}$ 固定で $V_1 \to \infty$

V_1 を大きくすると $k_1 \to \infty$ だが、k, γ, a は固定される。式(14) の分母の主要項は $k_1^2[\cosh^2(2\gamma a) + (k/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)]$ なので

$$T_3 \sim \frac{4k}{k_1\{\cosh^2(2\gamma a) + (k/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)\}} \propto V_1^{-1/2}.$$

従って求める漸近値は $\boxed{\lim_{V_1\to\infty} T_3 = 0}$ である。右側への速度は増すが、その速度差に伴う反射が強くなる。

物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

各スピンは $\sigma_\alpha \in \{+1, -1\}$、結合定数は $J \neq 0$ である。N 個のスピンのエネルギーは $E = -(J/N)\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta$ とし、各異なるペアを一度ずつ数える。

[1.1] $N = 2$ のエネルギーと縮退度

原題の式 (2) は $E = -J\sigma_1\sigma_2/2$ である。同じ向きなら積は $+1$ で、$(+,+),(-,-)$ の 2 通りがある。逆向きなら積は -1 で、$(+,-),(-,+)$ の 2 通りがある。従って $J \neq 0$ のもとで、取りうる値をすべて挙げると

	E	W
$\sigma_1 = \sigma_2$	$-J/2$	2
$\sigma_1 = -\sigma_2$	$J/2$	2

である。縮退度の和 $2 + 2 = 2^2$ は全配置数と一致する。

[1.2] $N = 3$ のエネルギーと縮退度

3 スピンでは $E = -(J/3)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)$ である。すべて同じ向きなら括弧内の三つの積はすべて $+1$ となる。配置は全上向きと全下向きの 2 通りである。1 個だけ他の 2 個と逆向きなら、同じ向きのペアが 1 組、逆向きのペアが 2 組なので、積の和は $1 - 1 - 1 = -1$ となる。逆向きの 1 個の選び方が 3 通り、その向きが 2 通りある。よって

	E	W
全スピンが同じ向き	$-J$	2
1 個だけ逆向き	$J/3$	6

を得る。$2 + 6 = 2^3$ で全配置を数え尽くしている。

[1.3] $N = 3$ の基底状態

$J > 0$ なら $-J < J/3$ なので全スピンが同じ向きの配置が基底状態であり、$\boxed{W = 2}$。$J < 0$ なら $J/3 < -J$ なので 1 個だけ逆向きの配置が基底状態であり、$\boxed{W = 6}$ である。

[2.1] 一般の N に対するエネルギー

M を -1 向きのスピン数とすると、総スピンは $\sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha = N - 2M$ である。その二乗を展開すると、$\sigma_\alpha^2 = 1$ から

$$(N - 2M)^2 = \sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = N + 2\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta.$$

二つ目の和は、順序の異なる同一ペアを重複して含まない。これを式 (1) に入れて

$$\boxed{E(M) = -\frac{J}{2N}\big[(N-2M)^2 - N\big]}, \qquad M = 0, 1, \ldots, N$$

を得る。指定した M に対して -1 スピンの位置を選ぶ状態数は $\binom{N}{M}$ である。ただし、M と $N-M$ のように異なる値が同じエネルギーを与えるとき、エネルギーの縮退度はそれぞれの状態数を加えたものになる。

[2.2] 一般の N に対する基底状態

$J > 0$ では $E(M)$ を最小にするには $|N-2M|$ を最大にする。$M = 0, N$ が該当し、$N \geq 1$ で

$$\boxed{E = -\frac{J}{2}(N-1), \qquad W = 2 \quad (J > 0)}.$$

$J < 0$ では逆に $|N-2M|$ を最小にする。偶数 N では $M = N/2$ のみ、奇数 N では $M = (N-1)/2, (N+1)/2$ の二つが該当する。従って

$$\boxed{\begin{array}{ll} N \text{ が偶数}: & E = J/2, \quad W = \dbinom{N}{N/2}, \\ N \text{ が奇数}: & E = \dfrac{J(N-1)}{2N}, \quad W = 2\dbinom{N}{(N-1)/2} \end{array} \qquad (J < 0).}$$

ここで奇数 N の二つの M は異なる配置集合を表す。$N = 1$ でも式は $E = 0, W = 2$ を与える。また $N = 2, 3$ を代入すると [1.1]–[1.3] の結果に戻る。

[3.1] エネルギー密度

以下は原題に従い $N \gg 1, J > 0$、$m = M/N$、$0 < m < 1/2$ とする。[2.1] の厳密式を N で割れば

$$\frac{E}{N} = -\frac{J}{2}(1-2m)^2 + \frac{J}{2N}.$$

最後の項は有限 N の補正である。大 N で求める関数の主項は

$$\boxed{\frac{E}{N} \simeq -\frac{J}{2}(1-2m)^2.}$$

[3.2] エントロピー密度

$M = Nm$ 個の -1 スピンを N 箇所から選ぶので、式 (4) で指定した磁化の配置数は $W = \binom{N}{M}$ である。$S = k_B \log W$ とし、原題の式 (5) を $N, M, N-M$ に適用すると

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \frac{k_B}{N}\big(\log N! - \log M! - \log(N-M)!\big) \\ &\simeq -k_B\big[m\log m + (1-m)\log(1-m)\big]. \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{\frac{S}{N} \simeq -k_B\big[m\log m + (1-m)\log(1-m)\big].}$$

この主項は $N \to \infty$ で m を固定し、M と $N-M$ がともに十分大きいときに得られる。$J > 0$ の同じエネルギーには m と $1-m$ の両方が対応するが、二枝を合算してもエントロピー密度に加わるのは高々 $k_B \log 2/N$ であり、この主項は変わらない。

[3.3] 温度と m の関係

m を変化させると、[3.1] と [3.2] の主項の微分は

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = 2J(1-2m), \qquad \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}m} = k_B \log\frac{1-m}{m}.$$

$0 < m < 1/2$ ではどちらも正である。式 (6) をこの曲線に沿って用い、

$$\frac{1}{T} = \frac{\mathrm{d}S/\mathrm{d}m}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}m} = \frac{k_B \log[(1-m)/m]}{2J(1-2m)}$$

から

$$\boxed{T(m) = \frac{2J(1-2m)}{k_B \log[(1-m)/m]}} \qquad (0 < m < 1/2)$$

を得る。分母は正なので $T > 0$ であり、$m \to 0$ で $T \to 0$ となる。

[3.4] 低温の m

$k_B T \ll J$ のとき原題の条件どおり $m \ll 1$ とする。[3.3] を

$$\log\frac{1-m}{m} = \frac{2J}{k_B T}(1-2m)$$

と書けば、左辺は先頭で $-\log m$、右辺は先頭で $2J/(k_B T)$ である。従って、熱力学極限を先に取った低温の支配項は

$$\boxed{m \sim \exp\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

等号ではなく漸近等価を用いるのは、元の式には m に依存する補正が残るためである。

[3.5] 低温のエントロピー

$m \ll 1$ に対して $-(1-m)\log(1-m) = m + O(m^2)$ なので、[3.2] は

$$\frac{S}{N} = k_B\big[m(1-\log m) + O(m^2)\big].$$

[3.4] の $-\log m \sim 2J/(k_B T)$ を代入すると

$$\boxed{\frac{S}{N} \sim k_B\left(1 + \frac{2J}{k_B T}\right)\exp\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

括弧内の 1 は $-(1-m)\log(1-m)$ からの寄与である。さらに厳密な最先頭だけなら、括弧内は $2J/(k_B T)$ に置き換えられる。

[3.6] 低温の熱容量

体積や外場など他の外部条件は変えていないので、$C = T\,\mathrm{d}S/\mathrm{d}T$ を用いる。[3.5] で使ったエントロピーを温度で微分するため、$x = 2J/(k_B T)$ とおき、[3.3] の関係を微分する。

$$\log\frac{1-m}{m} = x(1-2m), \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = -\frac{m(1-m)(1-2m)}{1-2xm(1-m)} \sim -m.$$

ここで [3.4] より $m \sim e^{-x}$ であり、$xm \to 0$ を用いた。[3.2] のエントロピーから $\mathrm{d}(S/N)/\mathrm{d}m = k_B \log[(1-m)/m]$ なので、$T\,\mathrm{d}/\mathrm{d}T = -x\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ により

$$\frac{C}{N} = -k_B x \log\frac{1-m}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} \sim k_B x^2 e^{-x}.$$

従って

$$\boxed{\frac{C}{N} \sim k_B \left(\frac{2J}{k_B T}\right)^2 \exp\!\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

同じ結果は、$E/N \simeq -J/2 + 2Jm$ と上の $\mathrm{d}m/\mathrm{d}x$ を使い、$C/N = \mathrm{d}(E/N)/\mathrm{d}T$ を計算しても得られる。正の値で、$T \to 0$ では指数的にゼロになる。

[4] 臨界温度

原題では $T \geq T_c$ の平衡状態が $m = 1/2$ である。[3.3] の式はこの点で分子と分母がともにゼロになるため、$0 < m < 1/2$ からの極限を取る。$\log[(1-m)/m]$ の $m = 1/2$ での一次微分は -4 だから、$m \to 1/2$ では

$$\log\frac{1-m}{m} = 2(1-2m) + O\big((1-2m)^3\big).$$

従って

$$\boxed{T_c = \lim_{m \to 1/2^-} T(m) = \frac{J}{k_B}.}$$

これは $N \gg 1$ の熱力学的な臨界温度である。有限 N の [2] に臨界特異点を主張するものではない。

物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

以下では $e>0$ とし、電子の電荷は $-e$ である。N は電子数密度、m は電子質量、ε_0 は真空の誘電率、c は光速である。複素表示した電場の実部を物理的な電場とする。原題と同じく時間依存は $e^{-i\omega t}$ であり、$\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$ とおく。

[1] 静磁場がないときの電子の運動方程式

電磁波の磁場による力と他粒子との相互作用は仮定により無視する。電子に働く力は電気力 $-e\boldsymbol{E}(z,t)$ だけなので、横方向の速度 $\boldsymbol{v}(z,t)$ は

$$\boxed{m\frac{\partial \boldsymbol{v}(z,t)}{\partial t} = -e\boldsymbol{E}(z,t)}$$

に従う。電子の熱運動は平均電流に寄与しない。

[2] 電流密度の時間微分

正イオンは静止しているので、電流密度は $\boldsymbol{J} = -Ne\boldsymbol{v}$ である。N は一様で時間に依存しないから、[1] を用いて

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = -Ne\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\omega_p^2\boldsymbol{E}.}$$

負電荷をもつ電子の速度と電流の向きが逆になるため、最後の係数は正である。

[3] 無磁場での分散関係と伝搬条件

使用する波動方程式と平面波は

$$\partial_z^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\partial_t\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{1}$$

である。代入すると、$\partial_z^2\boldsymbol{E} = -k^2\boldsymbol{E}$、$\partial_t^2\boldsymbol{E} = -\omega^2\boldsymbol{E}$ となる。[2] も代入して

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\boldsymbol{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\boldsymbol{E}.$$

従って

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.}$$

$\omega > \omega_p$ なら正の実波数 $k = \sqrt{\omega^2-\omega_p^2}/c$ を選べ、$+z$ 方向の進行波は減衰せず長距離を伝搬する。$0<\omega<\omega_p$ では k が純虚数となり、$+z$ 側で有限な解は指数的に減衰する。$\omega=\omega_p$ では $k=0$ で進行しない。よって条件は $\boxed{\omega > \omega_p}$ である。

[4] 静磁場中の電子の運動方程式

以下は原題後半の追加条件 $B_z > 0$、$\omega > \omega_c$、$\omega_p > \omega_c$ のもとで考える。静磁場を $B_z\boldsymbol{e}_z$ と書く。横方向速度と静磁場の外積は $\boldsymbol{v} \times B_z\boldsymbol{e}_z = (B_z v_y, -B_z v_x, 0)$ であり、電子に働く力は $-e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times B_z\boldsymbol{e}_z)$ となる。$\omega_c = eB_z/m$ を用いれば

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{e}{m}E_x - \omega_c v_y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{e}{m}E_y + \omega_c v_x. \end{aligned}}$$

ここで $\boldsymbol{e}_z$ は $+z$ 方向の単位ベクトルであり、各量の引数は (z,t) である。

[5] 導電率行列

$\boldsymbol{J} = -Ne\boldsymbol{v}$ を [4] の両式に代入し、$e^{-i\omega t}$ に比例する量の時間微分を $-i\omega$ 倍に置き換えると

$$\begin{pmatrix} -i\omega & \omega_c \\ -\omega_c & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

左の行列の行列式は $\omega_c^2 - \omega^2 \neq 0$ である。逆行列を掛けて原題の式 (4) の行列を求めると

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \begin{pmatrix} i\omega & \omega_c \\ -\omega_c & i\omega \end{pmatrix}.}$$

例えば第 1 行は $J_x = \varepsilon_0\omega_p^2(i\omega E_x + \omega_c E_y)/(\omega^2 - \omega_c^2)$ となる。B_z をゼロに近づけると $\boldsymbol{\sigma} = i\varepsilon_0\omega_p^2\mathbf{I}/\omega$ に戻り、[2] の $-i\omega\boldsymbol{J} = \varepsilon_0\omega_p^2\boldsymbol{E}$ と一致する。

[6] 波動方程式の行列

式 (1) に式 (2) と $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E}$ を代入すれば

$$\boldsymbol{A} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{I} + \frac{i\omega}{c^2\varepsilon_0}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = k^2\boldsymbol{E}.$$

[5] の $\boldsymbol{\sigma}$ を入れて整理すると

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\right)\mathbf{I} - \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right].$$

原題の式 (6) と比べて

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \qquad \beta = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}.}$$

仮定 $\omega > \omega_c > 0$ により $\beta > 0$ である。

[7] 固有波数、固有ベクトル、二モードの伝搬

式 (6) の非対角行列を $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ と書く。直接掛け算すると、$\boldsymbol{H}(1,-i)^{\mathsf{T}} = -(1,-i)^{\mathsf{T}}$、$\boldsymbol{H}(1,i)^{\mathsf{T}} = (1,i)^{\mathsf{T}}$ である。$\beta > 0$ より前者の k^2 が大きい。各固有空間の代表ベクトルと対応

する固有値は

固有ベクトル	k^2
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$	$k_+^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$	$k_-^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_c)}\right)$

であり、それぞれの非零スカラー倍も固有ベクトルである。$\omega > \omega_c$ では $k_+^2 > k_-^2$ なので、二つとも $+z$ 方向へ長距離伝搬する条件は、より小さい k_-^2 が正になることである。すなわち

$$\omega(\omega-\omega_c) > \omega_p^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\omega > \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2+4\omega_p^2}}{2}.}$$

等号では $k_- = 0$ となり進行波ではない。条件を満たす場合、以後 k_+, k_- は上の固有値の正の平方根とし、$k_+ > k_- > 0$ である。

[8] 直線偏光の回転

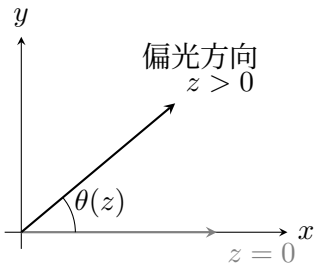
位置 $z=0$ の x 方向の電場を $\boldsymbol{E}(0,t) = E_0(1,0)^{\mathsf{T}} e^{-i\omega t}$ とする。これは [7] の二つの固有ベクトルを等しい係数で重ねたものである。$+z$ へ進む各モードにはそれぞれ $e^{ik_+ z}$、$e^{ik_- z}$ を掛ける。従って

$$\boxed{\boldsymbol{E}(z,t) = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t}\left[e^{ik_+ z}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} + e^{ik_- z}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right].}$$

ここで $\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$、$\theta(z) = (k_+ - k_-)z/2$ と書けば、和と差の公式によって同じ電場は

$$\boxed{\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 e^{i(\bar{k}z - \omega t)}\begin{pmatrix}\cos\theta(z)\\ \sin\theta(z)\end{pmatrix}.}$$

$z=0$ では $\theta = 0$ で原題の式 (7) に戻る。二成分には共通の時間位相しか残らないため、実電場はどの z でも直線偏光である。その偏光方向は z が増すにつれ $+x$ から $+y$ へ向けて回転し、角度は $\theta(z) = (k_+ - k_-)z/2$ だけ増える。偏光軸を向きの区別なしで見れば、長さ $2\pi/(k_+ - k_-)$ ごとに同じ向きに戻る。



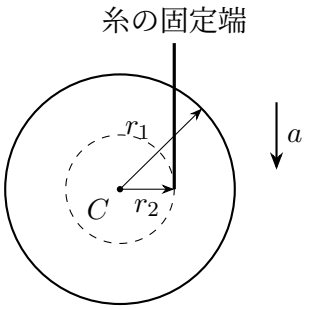
図は $0 < \theta(z) < \pi/2$ の一例を示す。一般の z ではこの向きが連続して回転する。

物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 糸で落下する剛体

図 1 の内側の円盤は厚さを無視するので、剛体の質量は外側の 2 枚に分布する。一方、糸は半径 r_2 の内側の円盤に接している。この二つの半径の役割を区別する。



外円盤の半径と糸のトルク腕

[1.1] 中心軸まわりの慣性モーメント

外側の 2 枚は同じ厚さ d_1 と同じ密度を持つため、1 枚の質量は $M/2$ である。1 枚について半径 s から $s+\mathrm{d}s$ の環の質量は、面密度を $(M/2)/(\pi r_1^2)$ として

$$\mathrm{d}m = \frac{M/2}{\pi r_1^2}\, 2\pi s\, \mathrm{d}s = \frac{M}{r_1^2} s\, \mathrm{d}s.$$

よって 1 枚の中心軸まわりの慣性モーメントは $\int_0^{r_1} s^2\, \mathrm{d}m = Mr_1^2/4$。2 枚を足すと

$$\boxed{I_C = \frac{1}{2} M r_1^2}.$$

厚さを無視する内側の円盤には質量を割り当てない。d_1 は面密度を通じて M に含まれている。

[1.2] 並進と回転の運動方程式

並進の正方向を鉛直下向き、回転の正方向を糸がほどける向きに選ぶ。重力と糸の張力による並進の式は

$$\boxed{Ma = Mg - T}.$$

糸の張力は中心軸から距離 r_2 で作用するので、角速度のこの正方向の成分を ω とすれば

$$\boxed{I_C \dot{\omega} = T r_2}.$$

糸が滑らないため、糸のほどけた長さは重心の下降距離に等しい。これを時間で二度微分すると $\boxed{a = r_2 \dot{\omega}}$ となる。

[1.3] 重心の加速度

回転の式と滑りなしの条件から $T = I_C a / r_2^2$。これを並進の式に代入し、[1.1] の I_C を使うと

$$\left(M + \frac{M r_1^2}{2 r_2^2}\right) a = Mg, \qquad \boxed{a = \frac{2 r_2^2}{r_1^2 + 2 r_2^2}\, g}.$$

$r_1, r_2, g > 0$ なら $0 < a < g$ であり、$T = M(g - a) > 0$ とも整合する。

[2] 磁場中の帯電球殻

位置 $\boldsymbol{r}$ は球殻の重心から表面上の点へ向かう。電荷は球殻とともに回るので、各表面素片の電荷に働く磁気力を求め、そのトルクを球面全体で積分する。外部磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ だけを用いる。

[2.1] 表面上の速度

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で剛体回転する点の速度は、中心が静止しているため

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}.$$

[2.2] 微小面積に働く力

面積 $\mathrm{d}S$ の電荷は $\sigma\, \mathrm{d}S$。磁場によるローレンツ力は、問題の三重積公式に $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}$ を代入して

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B} = \sigma\, \mathrm{d}S\, [(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{\omega}]}.$$

σ は符号付きの面電荷密度なので、負電荷では力の向きが反転する。

[2.3] 微小トルク

原点まわりのトルクは $\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}$。力のうち $\boldsymbol{r}$ と平行な項は寄与しない。したがって

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{N} = -\sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})}.$$

[2.4] 球面全体からのトルク

球面の回転・反射対称性［問題の式 (1)］により、$\int_{\Omega_R} x^2\, \mathrm{d}S$, $\int_{\Omega_R} y^2\, \mathrm{d}S$, $\int_{\Omega_R} z^2\, \mathrm{d}S$ は等しく、異なる座標の積の積分はゼロである。$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ と球面積 $4\pi R^2$ から

$$\int_{\Omega_R} x^2\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega_R} y^2\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega_R} z^2\, \mathrm{d}S = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

よって $\int_{\Omega_R} (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}S = (4\pi R^4/3)\boldsymbol{B}$。$\boldsymbol{\omega}$ は球面上の位置に依らないので [2.3] を積分して

$$\boldsymbol{N} = \frac{4\pi\sigma R^4}{3}\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ を代入した答えは

$$\boxed{N_x = \frac{4\pi\sigma B R^4}{3}\omega_y, \qquad N_y = -\frac{4\pi\sigma B R^4}{3}\omega_x, \qquad N_z = 0}.$$

[2.5] 各軸の慣性モーメント

面質量密度 ρ について x 軸からの距離の二乗は y^2+z^2。したがって

$$I_x = \rho \int_{\Omega_R} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}S = \frac{8\pi\rho R^4}{3}.$$

同じ球対称性を y, z 軸にも用いると

$$\boxed{I_x = I_y = I_z = I = \frac{8\pi\rho R^4}{3}}.$$

[2.6] 角速度と歳差の向き

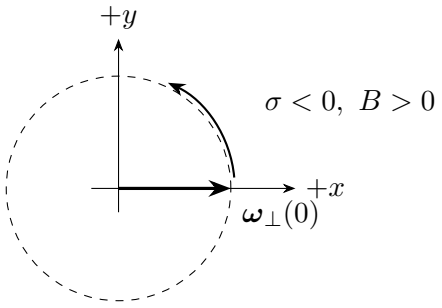
球殻の慣性モーメントはどの軸でも I なので、角運動量は $I\boldsymbol{\omega}$ であり、回転運動方程式は $I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{N}$。[2.4] と [2.5] を代入して

$$\dot{\omega}_x = \frac{\sigma B}{2\rho}\omega_y, \qquad \dot{\omega}_y = -\frac{\sigma B}{2\rho}\omega_x, \qquad \dot{\omega}_z = 0.$$

初期条件は $\omega_x(0) = \omega_0 \sin\theta$, $\omega_y(0) = 0$, $\omega_z(0) = \omega_0\cos\theta$。最初の二式から $\ddot{\omega}_x = -(\sigma B/2\rho)^2\omega_x$ となり、初期値を満たす解は

$$\boxed{\begin{aligned}
&\omega_x(t) = \omega_0 \sin\theta \cos\left(\frac{\sigma B}{2\rho}t\right), \\
&\omega_y(t) = -\omega_0 \sin\theta \sin\left(\frac{\sigma B}{2\rho}t\right), \\
&\omega_z(t) = \omega_0\cos\theta.
\end{aligned}}$$

横成分を $\boldsymbol{\omega}_\perp = (\omega_x, \omega_y, 0)$ と書く。その大きさは $\omega_0\sin\theta$ のまま xy 平面を回り、ω_z も一定である。したがって回転軸は z 軸となす角 θ を保って歳差する。



$+z$ 側から見た横成分

$\sigma < 0, B > 0$ なら、初期時刻の $\dot{\omega}_y(0) = -\sigma B\omega_0\sin\theta/(2\rho) > 0$。すなわち横成分は $+x$ から $+y$ に向かうので、$+z$ 側から見た歳差の向きは反時計回りである。

物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 調和振動子の幅

$V_0 = 0$ のハミルトニアンを $\hat{H}_0$ と書く。式 (2) の Gaussian を微分すると

$$\psi_0''(x) = (\alpha^2 x^2 - \alpha)\psi_0(x).$$

これを $\hat{H}_0\psi_0 = E_0\psi_0$ に代入し、x^2 の係数を比較すると

$$-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} = 0.$$

$\alpha > 0$ は波動関数が無限遠で減衰する条件だから、

$$\boxed{\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}}.$$

このとき定数項も $E_0 = \hbar^2\alpha/(2m) = \hbar\omega/2$ となる。

[1.2] 小さい段差によるエネルギーの変化

段差の摂動は $x < 0$ で V_0、$x \geq 0$ で 0 である。有限の V_0 に対する基底エネルギーを $E_0(V_0)$ と書く。非縮退基底状態の一次補正は、左半直線に粒子を見いだす確率を V_0 に掛けたものになる。$|\psi_0(x)|^2$ は偶関数で規格化されているため、この確率は $1/2$。したがって

$$\boxed{E_0(V_0) - E_0 = V_0 \int_{-\infty}^{0} |\psi_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x + O(V_0^2) = \frac{V_0}{2} + O\left(\frac{V_0^2}{\hbar\omega}\right)}.$$

ここでは $V_0 \ll \hbar\omega$ とし、二次以上の項を省いた。

[2.1] 無限壁と許される固有関数

$V_0 \to \infty$ では、有限のエネルギーをもつ束縛状態は $x < 0$ に確率振幅をもてない。無限壁の境界条件は $\phi_k(0) = 0$ である。$x > 0$ の Schrödinger 方程式は $\hat{H}_0$ と同じである。正の半直線で減衰する解を $x < 0$ へ $-\phi_k(-x)$ として奇拡張すると、$\phi_k(0) = 0$ により原点で関数値がつながり、左右の導関数も一致する。調和振動子のポテンシャルは偶関数なので、拡張した関数は両半直線で同じ固有値の Schrödinger 方程式を満たし、全直線の奇固有関数となる。問題文のパリティ条件によれば、それは奇数番号の ψ_{2k+1} に比例する。負の半直線を 0 とし、正の半直線で ψ_{2k+1} を定数倍したものが式 (4) になる。

[2.2] 規格化とエネルギー

ψ_{2k+1} は奇関数で全直線上で規格化されている。その確率密度は偶関数だから

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x.$$

式 (4) の規格化条件 $N^2 \int_0^\infty |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x = 1$ と $N > 0$ より

$$\boxed{N = \sqrt{2}}, \qquad \boxed{\epsilon_k = E_{2k+1} = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

特に、無限壁の基底状態は全直線振動子の第 1 励起状態の右半分である。

[3.1] 壁を取り去った直後の展開

ポテンシャルを瞬間的に変えても、その瞬間の波動関数は変わらない。したがって $\Psi(x, 0) = \phi_0(x)$ を新しいハミルトニアン $\hat{H}_0$ の完全な固有関数系で展開し、係数は $c_j = \langle \psi_j | \phi_0 \rangle$ とする。c_0 は実で正であり、式 (2)、(3) と $N = \sqrt{2}$ を使うと

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{2}\int_0^\infty \psi_0(x)\psi_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}.$$

ここで用いた積分は $u = \alpha x^2$ と置けば直ちに得られる。

[3.2] 壁を取り去った後のエネルギー期待値

$t > 0$ では $\hat{H}_0$ が時間に依存しないため、エネルギー期待値は時刻 0 の値に等しい。初期波動関数は原点で 0 となるが、導関数には跳びがある。そこで、エネルギーを運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの積分で評価する。各半直線で部分積分すると

$$-\int_0^\infty \psi_1^* \psi_1''\,dx = -[\psi_1^*\psi_1']_0^\infty + \int_0^\infty |\psi_1'|^2\,dx = \int_0^\infty |\psi_1'|^2\,dx \tag{1}$$

となる。原点では $\psi_1(0) = 0$、無限遠では波動関数が減衰するので境界項は消える。$\phi_0 = \sqrt{2}\psi_1$ $(x > 0)$ だから

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\hbar^2}{2m}|\phi_0'(x)|^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2}|\phi_0(x)|^2\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\infty \left[\frac{\hbar^2}{2m}|\psi_1'(x)|^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2}|\psi_1(x)|^2\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

角括弧の中は偶関数なので、最後の式は全直線上の ψ_1 のエネルギー期待値である。したがって

$$\boxed{E(t) = E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad (t > 0)}.$$

この値は壁を取り去った後の $\hat{H}_0$ に関する期待値であり、ϕ_0 自体が $\hat{H}_0$ の固有状態だという意味ではない。

[3.3] 一周期後の波動関数

急変後の展開の各成分は、$\hat{H}_0$ の固有エネルギー $E_j = (j+1/2)\hbar\omega$ に従い

$$\Psi(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-i(j+1/2)\omega t}\psi_j(x)$$

と進む。$t = 2\pi/\omega$ では全ての j で位相が $e^{-i(2j+1)\pi} = -1$ となるので、$\Psi(x, 2\pi/\omega) = -\phi_0(x)$。式 (3) と $\alpha = m\omega/\hbar$ を使って明示すると

$$\boxed{\Psi\left(x, \frac{2\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ -2\sqrt{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2} & (x \geq 0). \end{cases}}$$

位相 -1 は確率密度を変えないが、波動関数の値としては残る。

[3.4] 半周期後の波動関数

$t = \pi/\omega$ では各成分の位相は $e^{-i(j+1/2)\pi} = -i(-1)^j$ となる。問題文で与えられたパリティ $\psi_j(-x) = (-1)^j\psi_j(x)$ を項ごとに使うと

$$\Psi\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right) = -i\sum_{j=0}^{\infty} c_j\psi_j(-x) = -i\phi_0(-x).$$

右半直線にあった初期波動関数は左半直線へ鏡映される。ψ_1 が奇関数であることにも注意して書き下すと

$$\boxed{\Psi\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} 2i\sqrt{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2} & (x < 0), \\ 0 & (x \geq 0). \end{cases}}$$

原点ではどちらの枝も 0 であり、鏡映と位相因子は規格化を保つ。

物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 左右の分子数

矢印の総数と、左端から右端までの変位は、それぞれ

$$N_+ + N_- = N, \qquad a(N_+ - N_-) = L$$

を満たす。二式を加減して

$$\boxed{N_+ = \frac{1}{2}\left(N + \frac{L}{a}\right)}, \qquad \boxed{N_- = \frac{1}{2}\left(N - \frac{L}{a}\right)}.$$

N と L/a がともに偶数なので、これらは整数である。

[1.2] 微視的状態数

N 本の矢印の位置から右向きの N_+ 本を選べば、残りは左向きに決まる。したがって

$$\boxed{W = \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N + L/a)\right]!\left[\frac{1}{2}(N - L/a)\right]!}}.$$

[1.3] エントロピー

熱力学極限で $0 < L/(Na) < 1$ を固定すると $N_\pm$ も大きい。Stirling の公式を三つの階乗に用いる。$N = N_+ + N_-$ により、$-n$ の項は打ち消し合うから

$$S = k_\mathrm{B} \log W \simeq k_\mathrm{B}\left(N \log N - N_+ \log N_+ - N_- \log N_-\right).$$

無次元伸長 $u = L/(Na)$ をここで定義し、[1.1] の $N_\pm = N(1 \pm u)/2$ を代入すると

$$\boxed{S \simeq N k_\mathrm{B}\left[\log 2 - \frac{1+u}{2}\log(1+u) - \frac{1-u}{2}\log(1-u)\right], \qquad u = \frac{L}{Na}.}$$

$u = 0$ では $S \simeq N k_\mathrm{B} \log 2$。伸ばすほど左右の選択肢が減り、エントロピーは下がる。

[1.4] 張力と小伸長極限

$U = 0$ は L に依存しないので、$F = -TS$ と問題文の張力の定義から $X = -T(\partial S/\partial L)_T$。上式を微分すると

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{k_\mathrm{B}}{2a}\log\frac{1-u}{1+u}, \qquad \boxed{X = \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\log\frac{1+u}{1-u} = \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\log\frac{Na+L}{Na-L}.}$$

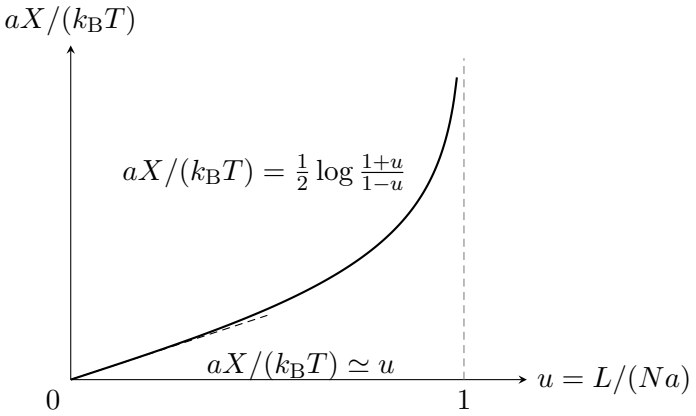
$u \ll 1$ では $\log[(1+u)/(1-u)] = 2u + O(u^3)$ なので

$$\boxed{X = \frac{k_\mathrm{B}T}{Na^2}L + O\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{a}u^3\right).}$$

張力が正になるのは、伸長によって減ったエントロピーを回復しようとするためである。

[1.5] 張力の概形

横軸を $u = L/(Na)$、縦軸を $aX/(k_\mathrm{B}T)$ とした概形を示す。どちらも無次元である。



実際、$\mathrm{d}X/\mathrm{d}L = k_\mathrm{B}T/[Na^2(1-u^2)] > 0$ で単調増加し、$L \to Na - 0$ で対数的に発散する。原点での接線は [1.4] の線形近似である。

[1.6] 断熱伸長の温度変化率

内部自由度を加えた後の $F(T, L)$ には $\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T + X\,\mathrm{d}L$ が成り立つ。混合微分の交換から、問題文の Maxwell 関係 $(\partial S/\partial L)_T = -(\partial X/\partial T)_L$ を得る。また、L 一定の熱容量の定義は $C_L = T(\partial S/\partial T)_L$ である。よって

$$\mathrm{d}S = \frac{C_L}{T}\,\mathrm{d}T - \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L \mathrm{d}L.$$

断熱変化では $\mathrm{d}S = 0$ だから、求める一般式は

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{T}{C_L}\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L.}$$

[1.7] 小伸長での断熱勾配

$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + X\,\mathrm{d}L$ を L 一定で用いると、$U = Nrk_\mathrm{B}T$ から $C_L = (\partial U/\partial T)_L = Nrk_\mathrm{B}$。さらに [1.4] の厳密式を T で微分して

$$\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L = \frac{k_\mathrm{B}}{2a}\log\frac{1+u}{1-u}.$$

これらを [1.6] に代入したのち、$u \ll 1$ で展開すると

$$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{T}{2Nra}\log\frac{1+u}{1-u} = \boxed{\frac{TL}{N^2ra^2} + O\left(\frac{T}{Nra}u^3\right).}$$

$C_L > 0$ では伸長時の温度上昇を表し、$L \to 0$ で勾配は 0 に近づく。

[2.1] 3 次元鎖の分配関数

端点 B を力 X の向きに z だけ動かすと外力は $X\,\mathrm{d}z$ の仕事をするため、力のポテンシャルエネルギーは $-Xz = -Xa\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i$ である。各矢印の向きの立体角要素は $\mathrm{d}\Omega_i = \sin\theta_i\,\mathrm{d}\theta_i\,\mathrm{d}\phi_i$。分子同士の相互作用がないので、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ と置けば角度積分は積に分かれる。

$$
\begin{aligned}
Z &= \prod_{i=1}^{N}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_i\int_0^{\pi}\sin\theta_i\,\mathrm{d}\theta_i\,e^{\beta Xa\cos\theta_i} \\
&= \left[2\pi\int_{-1}^{1}e^{\beta Xaq}\,\mathrm{d}q\right]^N = \boxed{\left[4\pi\frac{\sinh y}{y}\right]^N}, \qquad y = \frac{Xa}{k_{\mathrm{B}}T}.
\end{aligned}
$$

$y\to 0$ では $\sinh y/y\to 1$ なので、指定された $Z\to(4\pi)^N$ に一致する。

[2.2] 弱い外力での伸長と張力

分配関数の積分で端点座標 z に対応する重みは $e^{\beta Xz}$ である。従って $\partial_X Z = \beta Z\langle z\rangle$、すなわち $k_{\mathrm{B}}T\partial_X\log Z = \langle z\rangle$ となる。大きな N ではこの平均を巨視的状態量 L として

$$
L = k_{\mathrm{B}}T\left(\frac{\partial\log Z}{\partial X}\right)_T = Na\left(\coth y - \frac{1}{y}\right).
$$

$y\ll 1$ では $\coth y - 1/y = y/3 + O(y^3)$。したがって

$$
L = \frac{Na^2}{3k_{\mathrm{B}}T}X + O(Nay^3), \qquad \boxed{X = \frac{3k_{\mathrm{B}}T}{Na^2}L + O\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{a}\left(\frac{L}{Na}\right)^3\right)}.
$$

零力では等方性から $\langle\cos\theta\rangle_0 = 0$、$\langle\cos^2\theta\rangle_0 = 1/3$ である。Boltzmann 因子を y の一次まで展開すれば $\langle\cos\theta\rangle = y\langle\cos^2\theta\rangle_0 + O(y^3) = y/3 + O(y^3)$ となる。このため [1.4] の 1 次元模型に比べて線形係数が 3 倍になる。

物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の運動方程式

電子の電荷は $-e$ なので、電場による力は $-e\boldsymbol{E}$ である。ポテンシャルの勾配を加えると、減衰のない運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} V - e\boldsymbol{E} = -m\begin{pmatrix}\omega_\alpha^2 u_x \\ \omega_\alpha^2 u_y \\ \omega_\beta^2 u_z\end{pmatrix} - e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}.}$$

成分ごとには $m\ddot{u}_j + m\omega_j^2 u_j = -eE_j$ であり、$\omega_x = \omega_y = \omega_\alpha$, $\omega_z = \omega_\beta$ と置ける。

[1.2] 誘電率テンソル

定常解を $u_j(t) = u_{j,0}e^{-i\omega t}$ と置く。$\ddot{u}_j = -\omega^2 u_j$ だから [1.1] より

$$u_j = -\frac{e}{m(\omega_j^2 - \omega^2)}E_j.$$

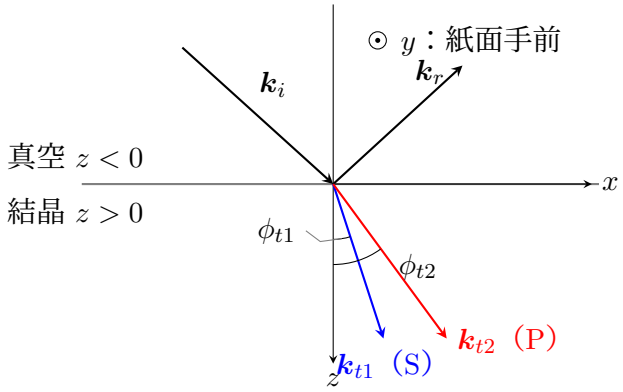
共振点 $\omega_j = \omega$ は問題の条件で除かれている。$\boldsymbol{P} = -\rho e\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ に代入すると

$$\boxed{\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix}\epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\alpha^2 - \omega^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\alpha^2 - \omega^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\beta^2 - \omega^2)}\end{pmatrix}.}$$

電子密度を 0 にすると真空の $\epsilon_0\mathbf{I}$ に戻る。分母の符号は共振周波数との大小に依存し、[2] の $\epsilon_n > \epsilon_a > \epsilon_0$ は別途与えられた条件である。

[2] 座標と二つの透過波

原本図 1 に合わせ、境界を $z = 0$、結晶を $z > 0$ とする。x は右、z は図で下向き、y は紙面手前を向く。以下の角は z 軸から右側へ測り、透過波の k_z は正とする。



この図は進行方向の関係を示す模式図で、矢印の長さは波数の大きさを表さない。

[2.1] 境界に沿う位相の一致

境界 $z=0$ では各平面波の位相は $k_x x - \omega t$ となる。接線方向の電場・磁場の連続条件がすべての x, t で成り立つには、非零の入射・反射・透過振幅の位相が一致しなければならない。したがって

$$k_{i,x} = k_{r,x} = k_{t1,x} = k_{t2,x}.$$

図の斜入射の透過枝では $k_{tj,x} = |\boldsymbol{k}_{tj}| \sin\phi_{tj} > 0$ であり、垂直入射ではこの成分は零となる。位相一致から

$$\boxed{\sin\phi_{t1} = \frac{|\boldsymbol{k}_i|}{|\boldsymbol{k}_{t1}|}\sin\phi_i, \qquad \sin\phi_{t2} = \frac{|\boldsymbol{k}_i|}{|\boldsymbol{k}_{t2}|}\sin\phi_i.}$$

[2.2] 平面波の電場と電束密度

$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ の共通因子を外すと、問題の Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \mu_0\omega\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -\omega\boldsymbol{D}$$

となる。第一式を第二式に代入し、三重積を展開すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) &= -\mu_0\omega^2\boldsymbol{D}\\ &= (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k} - |\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

ゆえに $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ を用いて

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{\mu_0\omega^2}\left[\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}\right].}$$

この式から $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0$ も直ちに分かる。異方性媒質では一般に $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ とは限らない。

[2.3] S 偏光の波数

S 偏光では $\boldsymbol{E} = E_y\boldsymbol{e}_y$ が入射面に垂直なので、$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E} = 0$。一方、結晶中では $D_y = \epsilon_n E_y$ である。[2.2] の y 成分を非零の E_y で割ると

$$\epsilon_n = \frac{|\boldsymbol{k}_{t1}|^2}{\mu_0\omega^2}, \qquad \boxed{|\boldsymbol{k}_{t1}| = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_n}.}$$

[2.4] S 偏光の光線方向

Maxwell の式から $\boldsymbol{H}_{t1,0} = (\boldsymbol{k}_{t1} \times \boldsymbol{E}_{t1,0})/(\mu_0\omega)$。$\boldsymbol{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{E}_{t1,0} = 0$ なので三重積により

$$\boldsymbol{E}_{t1,0} \times \boldsymbol{H}_{t1,0} = \frac{|\boldsymbol{E}_{t1,0}|^2}{\mu_0\omega}\boldsymbol{k}_{t1}.$$

係数は正であり、光線は波数と平行である。したがって求める角は

$$\boxed{\phi_{t1}.}$$

[2.5] P 偏光の波数

$\boldsymbol{k}_{t2} = k(\sin\phi_{t2}, 0, \cos\phi_{t2})$、$\boldsymbol{E}_{t2,0} = (E_x, 0, E_z)$ と置く。$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{D} = 0$ と $D_x = \epsilon_n E_x$, $D_z = \epsilon_a E_z$ より

$$\epsilon_n \sin\phi_{t2} E_x + \epsilon_a \cos\phi_{t2} E_z = 0, \qquad \frac{E_z}{E_x} = -\frac{\epsilon_n}{\epsilon_a}\tan\phi_{t2}.$$

ここで $E_x \neq 0$ であり、$\cos\phi_{t2} > 0$ の透過枝を使った。[2.2] を x 成分に適用すると

$$\epsilon_n E_x = \frac{k^2}{\mu_0\omega^2}\left(\cos^2\phi_{t2} E_x - \sin\phi_{t2}\cos\phi_{t2} E_z\right).$$

上の比を代入し、正の平方根を採用して

$$\boxed{|\boldsymbol{k}_{t2}| = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_n\epsilon_a}{\epsilon_a\cos^2\phi_{t2} + \epsilon_n\sin^2\phi_{t2}}}.}$$

$\phi_{t2} = 0$ なら電場は x 方向で $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_n}$ となり、[2.3] に一致する。

[2.6] P 偏光の光線方向

$\boldsymbol{H}_{t2,0} = H_y \boldsymbol{e}_y$ であり、Maxwell の式から

$$H_y = \frac{k}{\mu_0\omega}\left(\cos\phi_{t2} E_x - \sin\phi_{t2} E_z\right).$$

$E_z/E_x \leq 0$ かつ $\cos\phi_{t2} > 0$ なので $H_y/E_x > 0$。したがって

$$\boldsymbol{E}_{t2,0} \times \boldsymbol{H}_{t2,0} = H_y(-E_z, 0, E_x), \qquad \tan\theta_{t2} = \frac{-E_z H_y}{E_x H_y}.$$

[2.5] の電場成分比を使えば

$$\boxed{\tan\theta_{t2} = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_a}\tan\phi_{t2}.}$$

$\epsilon_n > \epsilon_a$ かつ $\phi_{t2} > 0$ なら光線は位相法線より x 側へ傾く。$\epsilon_n = \epsilon_a$ の等方極限では二方向は一致する。

物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

図 1 の幾何と運動の向き

円錐の母線に沿って頂点から測った距離が r である。図 1 の上向き z 軸を使うと、A の水平半径と高さ、B の高さはそれぞれ

$$R_A = r\sin\theta_0, \qquad z_A = r\cos\theta_0, \qquad z_B = -(l-r) = r - l. \tag{1}$$

糸が張っているので、A が斜面を外へ進むと B も上昇する。以下では図の円錐に合わせて $0 < \theta_0 < \pi/2$、また $0 < r < l$ の運動を考える。初速度は方位角方向だけなので、$\dot r(0) = 0$、$r_0 \sin\theta_0\, \dot\varphi(0) = v_0$ である。

[1] ラグランジアン

A の速さの二乗は $\dot r^2 + (r\sin\theta_0)^2\dot\varphi^2$、B の速さの二乗は $\dot z_B^2 = \dot r^2$ である。位置エネルギーの基準を頂点の高さに取ると

$$T_A = \frac{m}{2}\big(\dot r^2 + r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2\big), \quad T_B = \frac{M}{2}\dot r^2, \quad U_A = mgr\cos\theta_0, \quad U_B = Mg(r-l).$$

従って、基準点による定数項も含めた答えは

$$\boxed{L = \frac{m+M}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2}r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M)r + Mgl.} \tag{2}$$

[2] r の運動方程式

式(2)から $\partial L/\partial\dot r = (m+M)\dot r$、$\partial L/\partial r = mr\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M)$ である。従って

$$\boxed{(m+M)\ddot r = mr\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M).} \tag{3}$$

右辺の第一項は方位角運動が外向きに寄与する項、第二項は二つの質点を同時に上げることに伴う重力項である。

[3] z 軸まわりの角運動量

L は φ を含まないので、$\frac{d}{dt}(\partial L/\partial\dot\varphi) = 0$。A の水平半径 R_A と水平接線方向の速さ $R_A\dot\varphi$ の積から、保存量は

$$L_z = mr^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi = mr_0\sin\theta_0\,v_0. \tag{4}$$

B は z 軸上で動くため、この軸まわりの角運動量を持たない。

[4] 方位角を消去した方程式

式(4)より $\dot{\varphi} = v_0 r_0/(r^2 \sin\theta_0)$。これを式(3)に代入すると

$$\boxed{(m+M)\ddot{r} = \frac{m r_0^2 v_0^2}{r^3} - g(m\cos\theta_0 + M).} \tag{5}$$

[5] 径方向の速さ

式(5)に $\dot{r}$ を掛ける。$r^{-3}\dot{r} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^{-2})$ であり、初期条件 $r = r_0, \dot{r} = 0$ を使って積分すると

$$\frac{m+M}{2}\dot{r}^2 = \frac{m v_0^2}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - g(m\cos\theta_0 + M)(r - r_0), \tag{6}$$

$$\dot{r}^2 = \boxed{\frac{m v_0^2}{m+M}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{2g(m\cos\theta_0 + M)}{m+M}(r - r_0).} \tag{7}$$

これは $r = r_0$ で確かに零になる。l は糸長の制約を定めるが、r に依存する運動エネルギー・力には現れない。

[6] 他方の転回点

$r_1 \neq r_0$ は式(7)のもう一つの正の零点である。$r = r_1$ とおき、$1 - r_0^2/r_1^2 = (r_1 - r_0)(r_1 + r_0)/r_1^2$ を用いて $r_1 - r_0$ を除くと

$$2g(m\cos\theta_0 + M)r_1^2 - m v_0^2 r_1 - m v_0^2 r_0 = 0.$$

左辺の定数項は負なので二根の符号は異なり、物理的な根は正の根である。よって

$$\boxed{r_1 = \frac{m v_0^2 + \sqrt{m^2 v_0^4 + 8 m v_0^2 r_0 g(m\cos\theta_0 + M)}}{4g(m\cos\theta_0 + M)}.} \tag{8}$$

$r_1 > r_0$ か $r_1 < r_0$ かは初期加速度の符号、すなわち $m v_0^2/r_0 - g(m\cos\theta_0 + M)$ の符号で決まる。等号の場合は $r_1 = r_0$ の定常回転となり、この設問の異なる二つの転回点にはならない。問題文が想定する往復運動では、r_0, r_1 とその間の r は $0 < r < l$ を満たす。

[7] 定常回転を与える半頂角

ここからは問題文の通り θ_0 だけを変え、$r = r_0$ を保つ別の運動を考える。式(5)で $\ddot{r} = 0$ とすると $m v_0^2/r_0 = g(m\cos\theta_0 + M)$。従って

$$\boxed{\theta_0 = \arccos\left(\frac{v_0^2}{g r_0} - \frac{M}{m}\right).} \tag{9}$$

図の非退化な上向き円錐については $0 < v_0^2/(g r_0) - M/m < 1$ が必要である。

[8] 微小変位後の角速度

瞬間的な力は r 方向だけなので z 軸まわりのトルクはなく、式(4)の値は前後で同じである。$r = r_0 + \rho$ を代入して

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{v_0 r_0}{(r_0+\rho)^2 \sin\theta_0} = \frac{v_0}{r_0 \sin\theta_0}\left(1 + \frac{\rho}{r_0}\right)^{-2}.} \tag{10}$$

ここでは後の運動の $\dot{\rho}$ の初期値は指定しない。

[9] ρ の一次の運動方程式

式(5)に $r = r_0 + \rho$ を入れ、$|\rho| \ll r_0$ で $(1+\rho/r_0)^{-3} \simeq 1 - 3\rho/r_0$ と展開する。定数項 $mv_0^2/r_0 - g(m\cos\theta_0 + M)$ は式(9)の定常条件で零なので

$$\boxed{\ddot{\rho} + \omega^2 \rho = 0, \qquad \omega^2 = \frac{3mv_0^2}{(m+M)r_0^2} = \frac{3g(m\cos\theta_0 + M)}{(m+M)r_0}.} \tag{11}$$

$\omega^2 > 0$ なので、微小なずれに対する復元運動である。求めた式は ρ/r_0 の一次までで、ρ^2 以上を捨てている。

[10] B の運動

糸の長さから $z_B = r - l = r_0 - l + \rho$ である。従って B は平均位置 $z_B = r_0 - l$ のまわりを、A の径方向のずれと同じ ρ だけ上下する。式(11)より、その運動は鉛直方向の単振動であり、角振動数は ω、周期は

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(m+M)r_0^2}{3mv_0^2}}.}$$

微小力の力積は指定されていないので、振幅と位相はこの設問だけでは定まらない。A が外側へ動くとき B は上昇する。

物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 自由回転状態の規格化

角度 ϕ は一周すると同じ配置に戻る。従って一周分 $0 \le \phi < 2\pi$ で規格化する。A は正の実数だから

$$1 = \int_0^{2\pi} |\Psi_m(\phi)|^2 \,\mathrm{d}\phi = A^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi A^2, \qquad \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}. \tag{1}$$

[1.2] 周期性とエネルギー

波動関数の一価性 $\Psi_m(\phi + 2\pi) = \Psi_m(\phi)$ は $e^{2\pi i m} = 1$、すなわち $m \in \mathbb{Z}$ を要求する。$V_3 = 0$ の (2) に $e^{im\phi}$ を代入すると、二階微分は $-m^2 e^{im\phi}$ なので

$$\boxed{E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2}$$

$m \neq 0$ では m と $-m$ が同じエネルギーを持つ。

[2.1] 極小近傍の調和振動

極小は $\phi_k = 2\pi k/3$ $(k = 0, 1, 2)$ であり、$V(\phi_k) = 0$ である。$\phi - \phi_k$ が小さいとき $1 - \cos[3(\phi - \phi_k)] \simeq \frac{9}{2}(\phi - \phi_k)^2$ だから

$$V(\phi) \simeq \frac{9V_3}{4}(\phi - \phi_k)^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 (\phi - \phi_k)^2. \tag{3}$$

回転の運動エネルギーは $I\dot{\phi}^2/2$ なので、調和振動子の質量に相当する係数は I である。従って

$$\boxed{\omega_0 = 3\sqrt{\frac{V_3}{2I}}}, \qquad \boxed{\epsilon = \frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{3\hbar}{2}\sqrt{\frac{V_3}{2I}}}. \tag{4}$$

[2.2] 三つの極小点を結ぶトンネル効果

以下、(3) と (6) の通常の行列固有値問題として、局在状態 $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ を互いに直交する規格化基底として扱う。原題は各状態の規格化だけを明記しているが、重なりが無視できない場合には別途重なり行列を要する。

(3) の各成分は

$$(\widetilde{H}\boldsymbol{c})_j = (\epsilon + t)c_j - t(c_1 + c_2 + c_3), \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

と書ける。三成分が等しい対称状態では $c_1 = c_2 = c_3 = e^{i\alpha}/\sqrt{3}$、$\alpha$ は任意の全体位相であり、固有値は $\boxed{E_{\mathrm{s}} = \epsilon - 2t}$ となる。一方、$c_1 + c_2 + c_3 = 0$ の二次元部分空間では $\boxed{E_{\mathrm{d}} = \epsilon + t}$ が二重縮退する。この部分空間の任意の状態は $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ を満たせば規格化される。三つの係数を個別に一意に定める条件はない。

[2.3] 回転操作との同時固有状態

(4) から、R は係数を $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_3, c_1, c_2)$ と移す。$\omega^3 = 1$ および $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を用いれば、規格化された同時固有状態を

$$\boxed{|\Psi_1\rangle} = \frac{|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_1\rangle = |\Psi_1\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_1\rangle = (\epsilon - 2t)|\Psi_1\rangle, \tag{6}$$

$$\boxed{|\Psi_\omega\rangle} = \frac{|1\rangle + \omega^2|2\rangle + \omega|3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_\omega\rangle = \omega|\Psi_\omega\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_\omega\rangle = (\epsilon + t)|\Psi_\omega\rangle, \tag{7}$$

$$\boxed{|\Psi_{\omega^2}\rangle} = \frac{|1\rangle + \omega|2\rangle + \omega^2|3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_{\omega^2}\rangle = \omega^2|\Psi_{\omega^2}\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_{\omega^2}\rangle = (\epsilon + t)|\Psi_{\omega^2}\rangle \tag{8}$$

と選べる。例えば $R|\Psi_\omega\rangle = (\omega|1\rangle + |2\rangle + \omega^2|3\rangle)/\sqrt{3} = \omega|\Psi_\omega\rangle$ であり、位相の対応を直接確かめられる。三状態は互いに直交する。

[2.4] WKB の障壁積分

$\epsilon \simeq 0$ とすると、隣接する極小間の転回点は $\phi_1 \simeq 0$、$\phi_2 \simeq 2\pi/3$ となる。この区間では $\sin(3\phi/2) \geq 0$ であり、$1 - \cos(3\phi) = 2\sin^2(3\phi/2)$ だから、(5) の作用積分は

$$\int_0^{2\pi/3} \sqrt{2IV(\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{2IV_3}\int_0^{2\pi/3} \sin\!\left(\frac{3\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi \tag{9}$$

$$= \sqrt{2IV_3}\left[-\frac{2}{3}\cos\!\left(\frac{3\phi}{2}\right)\right]_0^{2\pi/3} = \frac{4}{3}\sqrt{2IV_3}. \tag{10}$$

従って深い障壁 $V_3 \gg \epsilon$、すなわち $\sqrt{2IV_3} \gg \hbar$ の指数近似で

$$\boxed{t \approx C\exp\!\left[-\frac{4\sqrt{2IV_3}}{3\hbar}\right]}. \tag{11}$$

$\sqrt{IV_3}$ は作用の次元を持つので指数は無次元である。C は (5) で未指定の前因子であり、この近似だけでは決められない。

[3.1] 対称・反対称基底での行列

$|A\rangle = (|2\rangle + |3\rangle)/\sqrt{2}$、$|B\rangle = (|2\rangle - |3\rangle)/\sqrt{2}$ とする。$|1\rangle$ は $|2\rangle, |3\rangle$ に同じ $-t'$ で結合するので、$|A\rangle$ への行列要素は $-\sqrt{2}t'$、$|B\rangle$ への行列要素は零である。また $|2\rangle, |3\rangle$ 間の $-t$ は対称・反対称状態をそれぞれ $\epsilon - t, \epsilon + t$ に分ける。従って指定された順序 $(|1\rangle, |A\rangle, |B\rangle)$ で

$$\boxed{\widetilde{H}' = \begin{pmatrix} \epsilon - \Delta & -\sqrt{2}t' & 0 \\ -\sqrt{2}t' & \epsilon - t & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon + t \end{pmatrix}}. \tag{12}$$

[3.2] 非対角項の二次摂動

指定の分割は

$$\widetilde{H}_0 = \mathrm{diag}(\epsilon-\Delta, \epsilon-t, \epsilon+t), \qquad \widetilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}t' & 0 \\ -\sqrt{2}t' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$\widetilde{H}_1$ の対角要素は零なので一次補正は零である。$\Delta > t$ により、非摂動の $|1\rangle$ と $|A\rangle$ のエネルギー差は $(\epsilon-\Delta)-(\epsilon-t) = -(\Delta-t)$ と零でない。以下は t' についての形式的な二次展開であり、近似値として用いる条件は $\sqrt{2}t' \ll \Delta - t$ である。二次の式 $E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} |\langle k|\widetilde{H}_1|n\rangle|^2/(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})$ を用いると

$$\boxed{E_1} = \epsilon - \Delta - \frac{2t'^2}{\Delta - t} + O\!\left(\frac{t'^4}{(\Delta-t)^3}\right), \tag{14}$$

$$\boxed{E_A} = \epsilon - t + \frac{2t'^2}{\Delta - t} + O\!\left(\frac{t'^4}{(\Delta-t)^3}\right), \tag{15}$$

$$\boxed{E_B} = \epsilon + t. \tag{16}$$

$|B\rangle$ は他の状態と結合せず、最後の値はこの行列内で厳密である。二次展開の条件は $\sqrt{2}t' \ll \Delta - t$ であり、原題の大小関係 $\Delta > t > t' > 0$ だけでは $\Delta - t$ が十分大きいとは限らない。実際、最初の二準位の厳密値は

$$E_\pm = \epsilon - \frac{\Delta + t}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta-t)^2}{4} + 2t'^2}, \tag{17}$$

であり、上の E_1, E_A はそれぞれ E_-, E_+ の小さい $t'/(\Delta - t)$ に関する展開である。

物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 正方格子の平均場ハミルトニアン

周期的境界条件を課した正方格子では各サイトに隣接サイトが四つあり、隣接ペアを一度ずつ数えると結合数は $4N/2 = 2N$ である。$s_i = m + \delta s_i$ を代入し、$\delta s_i \delta s_j$ を捨てると

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MF}} &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \{m^2 + m(\delta s_i + \delta s_j)\} \\ &= -J \left(2Nm^2 + 4m \sum_{i=1}^{N} (s_i - m) \right) = 2JNm^2 - 4Jm \sum_{i=1}^{N} s_i. \end{aligned} \tag{1}$$

よって (1) の空欄は $\boxed{\text{(a)} = 2JN}$、$\boxed{\text{(b)} = -4Jm}$ である。

[1.2] 分配関数と自由エネルギー

m を固定すると H_{MF} では各スピンの和が独立になる。$s_i = \pm 1$ の和は $e^{4\beta Jm} + e^{-4\beta Jm} = 2\cosh(4\beta Jm)$ なので

$$\boxed{Z = e^{-2\beta JNm^2} [2\cosh(4\beta Jm)]^N}, \qquad \boxed{f = -\frac{1}{\beta N} \log Z = 2Jm^2 - \frac{1}{\beta} \log[2\cosh(4\beta Jm)]}. \tag{2}$$

[1.3] 自己無撞着方程式

上の f を m で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 4Jm - 4J \tanh(4\beta Jm). \tag{3}$$

従って極値条件は $\boxed{m = \tanh(4\beta Jm)}$ となる。右辺は平均場中の一つのスピンの平均値でもあり、m の定義と一致する。

[1.4] 臨界温度と磁化の立ち上がり

常に $m = 0$ は解である。$\tanh(4\beta Jm)$ の原点での傾きが 1 になると非零解が現れるため

$$\boxed{T_c = 4J}. \tag{4}$$

実際、$f''(0) = 4J(1 - 4J/T)$ なので、$T > T_c$ では $m = 0$ が極小、$T < T_c$ では極大になる。$T < T_c$ で m が小さいとき、$\tanh y = y - y^3/3 + O(y^5)$ を自己無撞着方程式に入れる。$r = T/T_c < 1$ と置くと

$$0 = \left(\frac{1}{r} - 1 \right) m - \frac{m^3}{3r^3} + O(m^5), \qquad m^2 = 3r^2(1 - r) + O((1 - r)^2). \tag{5}$$

従って二つの対称な磁化枝は

$$\boxed{m(T) = \pm\sqrt{3\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} + O\left(\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)} \qquad (T \uparrow T_c) \tag{6}$$

である。符号は外場のない系での対称な二つの平衡状態を表す。

[2.1] 重なりによるハミルトニアン

(2) を H に代入し、元の和から除外された $i = j$ の項を差し引くと、$\xi_{i,\mu}^2 = s_i^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2N}\sum_{\mu=1}^{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_{i,\mu}s_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N}(\xi_{i,\mu}s_i)^2\right] \\ &= -\frac{N}{2}(m_1^2 + m_2^2) + 1. \end{aligned} \tag{7}$$

従って指定された $N \to \infty$ の主要項は

$$\boxed{H = -\frac{N}{2}(m_1^2 + m_2^2) + O(1)}. \tag{8}$$

$+1$ は N によらない項だが、有限 N の分配関数の前因子には残る。

[2.2] 補助変数による分配関数

原題の (3) で $a = \beta N > 0$ とし、$\mu = 1, 2$ にそれぞれ適用する。まず [2.1] の主要項で計算すると

$$\begin{aligned} Z &\simeq \frac{\beta N}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\beta N}{2}(x_1^2+x_2^2)} \sum_{\boldsymbol{s}} \exp\left[\beta\sum_{i=1}^{N} s_i(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})\right] \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{\beta N}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\beta N}{2}(x_1^2+x_2^2)} \prod_{i=1}^{N} 2\cosh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})]\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \end{aligned} \tag{9}$$

各 s_i の和が積の一因子に変わった。これを (4)、(5) の形にまとめると

$$\boxed{(\mathrm{c}) = \frac{\beta N}{2\pi}}, \qquad \boxed{(\mathrm{d}) = \frac{1}{2}}, \qquad \boxed{(\mathrm{e}) = -\frac{1}{\beta N}\log\{2\cosh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})]\}}. \tag{10}$$

ここで (3) の a はガウス積分の係数であり、[1.1] の空欄 (a) とは別である。元の H の定数 $+1$ まで保持する場合、積分表示は厳密になり、同じ f に対して前因子だけが $e^{-\beta}\beta N/(2\pi)$ に変わる。この差は 1 スピンあたりの自由エネルギーと後の極小条件には熱力学的極限で影響しない。

[2.3] ランダムパターンの平均

各サイトの $(\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$ は四通りの符号の組を確率 $1/4$ でとり、サイト間で独立である。大数の法則により (5) のサイト平均をこの四通りの平均に置き換える。cosh の偶関数性で同じ値が二組ずつ現れるから、熱力学的極限ではほとんど確実に

$$\boxed{f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \frac{1}{2\beta}\left\{\log[2\cosh\beta(x_1 + x_2)] + \log[2\cosh\beta(x_1 - x_2)]\right\}}. \tag{11}$$

図 1 は $N = 4$ の一実現例であり、この平均で各符号組が等頻度になるという追加条件ではない。

[2.4] 極小点の数と熱平衡の類似度

$u = x_1 + x_2$、$v = x_1 - x_2$ と置き、$g(y) = y^2/2 - T\log[2\cosh(y/T)]$ と定義する。$x_1^2 + x_2^2 = (u^2+v^2)/2$ なので

$$f(x_1, x_2) = \frac{g(u) + g(v)}{2}, \qquad g'(y) = y - \tanh(y/T), \quad g''(y) = 1 - \frac{1}{T}\operatorname{sech}^2(y/T). \tag{12}$$

$T \geq 1$ では $y > 0$ で $\tanh(y/T) < y/T \leq y$ だから、g の唯一の極小点は $y = 0$ である。$T = 1$ でも $g(y) = g(0) + y^4/12 + O(y^6)$ であり原点は極小である。従って $\boxed{T \geq 1 :\ (x_1, x_2) = (0,0) \text{ の } 1 \text{ 個}}$。

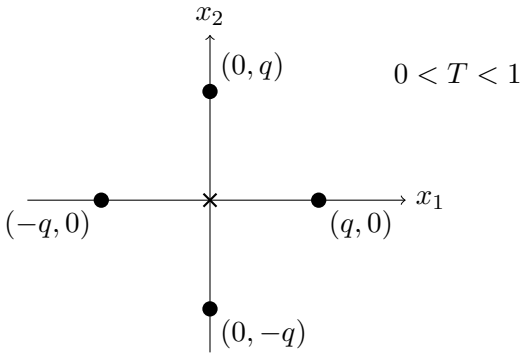
$0 < T < 1$ では $g''(0) = 1 - 1/T < 0$ で原点は極大である。$y > 0$ で

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\tanh(y/T)}{y} = \frac{(y/T)\operatorname{sech}^2(y/T) - \tanh(y/T)}{y^2}. \tag{13}$$

分子に負号を付けた $\tanh(y/T) - (y/T)\operatorname{sech}^2(y/T)$ は $y = 0$ で 0、y で微分すると $(2y/T^2)\operatorname{sech}^2(y/T)\tanh(y/T) > 0$ となる。従って $\tanh(y/T)/y$ は $1/T > 1$ から 0 へ単調に減り、$q = \tanh(q/T)$ を満たす $q > 0$ がただ一つ存在する。$g'(y) = y[1 - \tanh(y/T)/y]$ は $0 < y < q$ で負、$y > q$ で正だから q は極小点である。g は偶関数なので $-q$ も極小点となる。独立な u, v の各々が $\pm q$ を選ぶ $2 \times 2 = 4$ 通りに対し、逆変換 $x_1 = (u+v)/2$、$x_2 = (u-v)/2$ から

$$\boxed{0 < T < 1 :\ (x_1, x_2) = (q,0), (-q,0), (0,q), (0,-q) \text{ の } 4 \text{ 個}}. \tag{14}$$

なお $T = 1$ の $f - f(0,0)$ の最低次は $(u^4 + v^4)/24 > 0$（原点以外）で、温度境界で極小数が曖昧になることはない。



$0 < T < 1$ の四つの極小点。$\times$ の原点はこの温度域では極大である。

最後に、有限 N の積分表示に現れる関数 f の式 (5) を x_μ で微分する。x_1, x_2 を固定した独立スピン分布では $\langle s_i \rangle_{x_1,x_2} = \tanh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})]$ だから、停留条件は

$$x_\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_{i,\mu} \tanh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_{i,\mu}\langle s_i \rangle_{x_1,x_2}. \tag{15}$$

熱力学的極限で一つの極小に対応する平衡相を選ぶと、この固定補助変数での平均がその相のスピン平均となり、極小点の x_μ は熱平衡の類似度 m_μ と一致する。有限 N の無条件の Gibbs 平均はスピン反転対称性により零であり、ここでの条件付き平均とは区別する。従って四極小は二つのパターンとその符号反転を想起する状態である。[1] の $T_c = 4J$ とこの模型の境界 $T = 1$ は別のハミルトニアンの値である。

物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 振動子の応答

電場方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$ とする。$\boldsymbol{u}(t) = u_0 \boldsymbol{e}_x e^{-i\omega t}$ を (1) に代入すると、$\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2 \boldsymbol{u}$ より

$$m(\omega_0^2 - \omega^2)u_0 = qE_0, \qquad \boxed{P_0 = Nqu_0 = \frac{Nq^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}}. \tag{1}$$

この定常調和応答は $\omega \neq \omega_0$ に限る。減衰のないモデルでちょうど $\omega = \omega_0$ とすると振幅が有限な同じ周波数の定常解はなく、式の発散をそのまま有限の分極と解釈できない。

[1.2] 誘電率とその符号

以後、振動子の強さを周波数の二乗で表した

$$\Omega_p^2 \equiv \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} > 0 \tag{2}$$

を使う。[1.1] のベクトル関係 $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \Omega_p^2 \boldsymbol{E}/(\omega_0^2 - \omega^2)$ を誘電率の定義に入れると

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \varepsilon_0 \frac{\omega_0^2 + \Omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{3}$$

$\omega > 0$ で分母と分子の符号が異なるのは

$$\boxed{\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_p^2}} \tag{4}$$

である。下端は共鳴点、上端は $\varepsilon = 0$ なので、いずれも「負」には含まない。

[1.3] 誘電体中の固有モード

(4) の回転をとり (3) を代入すると

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = i\omega\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H} = \mu_0 \omega^2 (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}). \tag{5}$$

一様な誘電体で $\varepsilon(\omega) \neq 0$ なら、(5) の $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega) \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ から $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$。したがって (2) の平面波について二重回転の左辺は $k^2 \boldsymbol{E}$ となる。非零の横電場では

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \left(\frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} - \varepsilon_0\right) \boldsymbol{E}}, \qquad \boxed{c^2 k^2 = \omega^2 \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = \omega^2 \left(1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}. \tag{6}$$

最初の式はマクスウェル方程式による分極と電場の関係であり、[1.1] の振動子応答を加えたものが二番目の分散式である。

$K = c^2k^2$、$X = \omega^2$ と置き、分母を払うと

$$X^2 - (K + \omega_0^2 + \Omega_p^2)X + K\omega_0^2 = 0. \tag{7}$$

ゆえに、横波の二枝は

$$\boxed{\omega_\pm^2(k) = \frac{K + \omega_0^2 + \Omega_p^2 \pm \sqrt{(K + \omega_0^2 + \Omega_p^2)^2 - 4K\omega_0^2}}{2}}. \tag{8}$$

判別式は $(K - \omega_0^2)^2 + 2\Omega_p^2(K + \omega_0^2) + \Omega_p^4 > 0$ で、$k > 0$ なら二根は正である。$k = 0$ では下枝は $\omega_- = 0$、上枝は $\sqrt{\omega_0^2 + \Omega_p^2}$ となる。

なお $\varepsilon(\omega) = 0$ では (5) から横波条件を導けない。このとき $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_p^2}$、$\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$ の縦の分極振動も (3)–(6) を満たす。式 (8) は非零横電場の分散を表す。

[1.4] 大きな波数での二枝

$K \gg \omega_0^2, \Omega_p^2$ では、(8) の根の和と積から先頭項が分かる。設問で指定された三つの記号で表す答えは

$$\boxed{\omega_+ \simeq ck, \qquad \omega_- \simeq \omega_0}. \tag{9}$$

根の和と積を順に展開すると

$$\omega_+^2 = K + \Omega_p^2 + O(K^{-1}), \qquad \omega_-^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\Omega_p^2}{K} + O(K^{-2})\right). \tag{10}$$

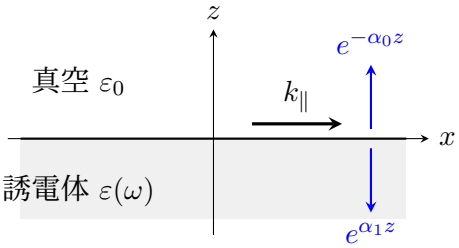
平方根を一次まで展開した結果は

$$\omega_+ = ck + \frac{\Omega_p^2}{2ck} + O(k^{-3}), \qquad \omega_- = \omega_0\left(1 - \frac{\Omega_p^2}{2c^2k^2} + O(k^{-4})\right). \tag{11}$$

この次項の係数には $\Omega_p^2 = Nq^2/(\varepsilon_0 m)$ が現れる。ck と ω_0 はいずれも角周波数の次元を持ち、$k \to \infty$ で補正はそれぞれの先頭項に比べて消える。

[2.1] 界面の連続条件と電場成分

図のように界面の上を真空、下を誘電体とし、α_0, α_1 は局在のため正の実数とする。



[1] の無源 Maxwell 方程式を界面をまたいで用いる。(4) を界面を横切る微小ループで積分すると接線電場が連続し、(5) を薄い円柱で積分すると自由表面電荷がない場合の法線電束密度が連続する。場が界面近傍で有限なら、縮小極限でループ短辺の線積分、ループの磁束、円柱側面の電束は消える。y 成分は (7), (8) により零だから、$z=0$ では

$$\boxed{E_{0x}=E_{1x}}, \qquad \boxed{\varepsilon_0 E_{0z}=\varepsilon(\omega)E_{1z}}. \tag{12}$$

真空側では $\varepsilon_0\neq 0$ なので、(5) と (7) から $ik_\parallel E_{0x}-\alpha_0 E_{0z}=0$ を得る。媒質側では $\varepsilon=0$ の可能性を先に除かず、(3), (4) から得る二重回転方程式の x 成分を用いる。(8) と $\alpha_1^2=k_\parallel^2-\varepsilon\mu_0\omega^2$ を代入すると

$$-\alpha_1(\alpha_1 E_{1x}-ik_\parallel E_{1z})=\varepsilon\mu_0\omega^2 E_{1x} \quad\Longrightarrow\quad ik_\parallel E_{1x}+\alpha_1 E_{1z}=0. \tag{13}$$

局在条件 $\alpha_0>0$ から $k_\parallel^2>\varepsilon_0\mu_0\omega^2$ であり、$k_\parallel\neq 0$ である。従って

$$\boxed{E_{0z}=\frac{ik_\parallel}{\alpha_0}E_{0x}}, \qquad \boxed{E_{1z}=-\frac{ik_\parallel}{\alpha_1}E_{1x}}. \tag{14}$$

法線成分の符号が逆なのは、両側で指数の z 微分の符号が逆だからである。$\varepsilon=0$ なら式(12)の法線電束の連続性から $E_{0z}=0$、式(14)と接線電場の連続性から他の電場成分も零となる。従って (7), (8) の形の非零の局在表面波ではこの場合を除ける。

[2.2] 表面波の条件

(14) を (12) に入れ、非零の $E_{0x}=E_{1x}$ と $k_\parallel$ を消すと

$$\boxed{\frac{\varepsilon_0}{\alpha_0}+\frac{\varepsilon(\omega)}{\alpha_1}=0, \quad \text{すなわち} \quad \varepsilon(\omega)=-\varepsilon_0\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}. \tag{15}$$

$\alpha_0,\alpha_1>0$ なので少なくとも $\varepsilon(\omega)<0$ が必要である。実際の存在範囲は両側の減衰条件を合わせて [2.4] で決める。

[2.3] 界面に沿う波数

(15) より $\alpha_1=-\varepsilon\alpha_0/\varepsilon_0$。両辺の二乗と $\alpha_0^2=k_\parallel^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2$、$\alpha_1^2=k_\parallel^2-\varepsilon\mu_0\omega^2$ を組み合わせると

$$(\varepsilon_0^2-\varepsilon^2)k_\parallel^2=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\omega^2(\varepsilon_0-\varepsilon). \tag{16}$$

$\varepsilon\neq\varepsilon_0$ として共通因子を除き、正方向へ伝わる根を選べば

$$\boxed{k_\parallel=\omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0+\varepsilon(\omega)}}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0+\varepsilon(\omega)}}}. \tag{17}$$

これは $\varepsilon<-\varepsilon_0$ の範囲で実数かつ $k_\parallel>\omega/c$ となり、真空側でも減衰する。

[2.4] 表面波が存在する周波数

(17) を $\alpha_0^2=k_\parallel^2-\omega^2/c^2$ に入れると

$$\alpha_0^2=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}. \tag{18}$$

$\alpha_0^2 > 0$ と [2.2] の $\varepsilon < 0$ を両立する条件は $\varepsilon < -\varepsilon_0$。このとき $\alpha_1 = -\varepsilon\alpha_0/\varepsilon_0 > 0$ も満たす。[1.2] の誘電率を代入すると

$$1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} < -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m}}}. \tag{19}$$

下端 ω_0 では無減衰振動子の定常応答が発散するうえ、真空側の $\alpha_0 \to 0$ で局在性も失う。上端では $\varepsilon \to -\varepsilon_0$ に伴い $k_{\parallel}$ が無限大になる。よって両端を除く。[1.2] の $\varepsilon < 0$ の帯域のうち、この狭い範囲だけが真空・誘電体の両側へ減衰する表面波を与える。