物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

図 1 の幾何と運動の向き

円錐の母線に沿って頂点から測った距離が r である。図 1 の上向き z 軸を使うと、A の水平半径と高さ、B の高さはそれぞれ

$$R_A = r\sin\theta_0, \qquad z_A = r\cos\theta_0, \qquad z_B = -(l-r) = r - l. \tag{1}$$

糸が張っているので、A が斜面を外へ進むと B も上昇する。以下では図の円錐に合わせて $0 < \theta_0 < \pi/2$、また $0 < r < l$ の運動を考える。初速度は方位角方向だけなので、$\dot r(0) = 0$、$r_0 \sin\theta_0\, \dot\varphi(0) = v_0$ である。

[1] ラグランジアン

A の速さの二乗は $\dot r^2 + (r\sin\theta_0)^2\dot\varphi^2$、B の速さの二乗は $\dot z_B^2 = \dot r^2$ である。位置エネルギーの基準を頂点の高さに取ると

$$T_A = \frac{m}{2}\big(\dot r^2 + r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2\big), \quad T_B = \frac{M}{2}\dot r^2, \quad U_A = mgr\cos\theta_0, \quad U_B = Mg(r-l).$$

従って、基準点による定数項も含めた答えは

$$\boxed{L = \frac{m+M}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2}r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M)r + Mgl.} \tag{2}$$

[2] r の運動方程式

式(2)から $\partial L/\partial\dot r = (m+M)\dot r$、$\partial L/\partial r = mr\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M)$ である。従って

$$\boxed{(m+M)\ddot r = mr\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M).} \tag{3}$$

右辺の第一項は方位角運動が外向きに寄与する項、第二項は二つの質点を同時に上げることに伴う重力項である。

[3] z 軸まわりの角運動量

L は φ を含まないので、$\frac{d}{dt}(\partial L/\partial\dot\varphi) = 0$。A の水平半径 R_A と水平接線方向の速さ $R_A\dot\varphi$ の積から、保存量は

$$L_z = mr^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi = mr_0\sin\theta_0\,v_0. \tag{4}$$

B は z 軸上で動くため、この軸まわりの角運動量を持たない。

[4] 方位角を消去した方程式

式(4)より $\dot{\varphi} = v_0 r_0/(r^2 \sin\theta_0)$。これを式(3)に代入すると

$$\boxed{(m+M)\ddot{r} = \frac{m r_0^2 v_0^2}{r^3} - g(m\cos\theta_0 + M).} \tag{5}$$

[5] 径方向の速さ

式(5)に $\dot{r}$ を掛ける。$r^{-3}\dot{r} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^{-2})$ であり、初期条件 $r = r_0, \dot{r} = 0$ を使って積分すると

$$\frac{m+M}{2}\dot{r}^2 = \frac{m v_0^2}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - g(m\cos\theta_0 + M)(r - r_0), \tag{6}$$

$$\dot{r}^2 = \boxed{\frac{m v_0^2}{m+M}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{2g(m\cos\theta_0 + M)}{m+M}(r - r_0).} \tag{7}$$

これは $r = r_0$ で確かに零になる。l は糸長の制約を定めるが、r に依存する運動エネルギー・力には現れない。

[6] 他方の転回点

$r_1 \neq r_0$ は式(7)のもう一つの正の零点である。$r = r_1$ とおき、$1 - r_0^2/r_1^2 = (r_1 - r_0)(r_1 + r_0)/r_1^2$ を用いて $r_1 - r_0$ を除くと

$$2g(m\cos\theta_0 + M)r_1^2 - m v_0^2 r_1 - m v_0^2 r_0 = 0.$$

左辺の定数項は負なので二根の符号は異なり、物理的な根は正の根である。よって

$$\boxed{r_1 = \frac{m v_0^2 + \sqrt{m^2 v_0^4 + 8 m v_0^2 r_0 g(m\cos\theta_0 + M)}}{4g(m\cos\theta_0 + M)}.} \tag{8}$$

$r_1 > r_0$ か $r_1 < r_0$ かは初期加速度の符号、すなわち $m v_0^2/r_0 - g(m\cos\theta_0 + M)$ の符号で決まる。等号の場合は $r_1 = r_0$ の定常回転となり、この設問の異なる二つの転回点にはならない。問題文が想定する往復運動では、r_0, r_1 とその間の r は $0 < r < l$ を満たす。

[7] 定常回転を与える半頂角

ここからは問題文の通り θ_0 だけを変え、$r = r_0$ を保つ別の運動を考える。式(5)で $\ddot{r} = 0$ とすると $m v_0^2/r_0 = g(m\cos\theta_0 + M)$。従って

$$\boxed{\theta_0 = \arccos\left(\frac{v_0^2}{g r_0} - \frac{M}{m}\right).} \tag{9}$$

図の非退化な上向き円錐については $0 < v_0^2/(g r_0) - M/m < 1$ が必要である。

[8] 微小変位後の角速度

瞬間的な力は r 方向だけなので z 軸まわりのトルクはなく、式(4)の値は前後で同じである。$r = r_0 + \rho$ を代入して

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{v_0 r_0}{(r_0+\rho)^2 \sin\theta_0} = \frac{v_0}{r_0 \sin\theta_0}\left(1 + \frac{\rho}{r_0}\right)^{-2}.} \tag{10}$$

ここでは後の運動の $\dot{\rho}$ の初期値は指定しない。

[9] ρ の一次の運動方程式

式(5)に $r = r_0 + \rho$ を入れ、$|\rho| \ll r_0$ で $(1+\rho/r_0)^{-3} \simeq 1 - 3\rho/r_0$ と展開する。定数項 $mv_0^2/r_0 - g(m\cos\theta_0 + M)$ は式(9)の定常条件で零なので

$$\boxed{\ddot{\rho} + \omega^2 \rho = 0, \qquad \omega^2 = \frac{3mv_0^2}{(m+M)r_0^2} = \frac{3g(m\cos\theta_0 + M)}{(m+M)r_0}.} \tag{11}$$

$\omega^2 > 0$ なので、微小なずれに対する復元運動である。求めた式は ρ/r_0 の一次までで、ρ^2 以上を捨てている。

[10] B の運動

糸の長さから $z_B = r - l = r_0 - l + \rho$ である。従って B は平均位置 $z_B = r_0 - l$ のまわりを、A の径方向のずれと同じ ρ だけ上下する。式(11)より、その運動は鉛直方向の単振動であり、角振動数は ω、周期は

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(m+M)r_0^2}{3mv_0^2}}.}$$

微小力の力積は指定されていないので、振幅と位相はこの設問だけでは定まらない。A が外側へ動くとき B は上昇する。

物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 自由回転状態の規格化

角度 ϕ は一周すると同じ配置に戻る。従って一周分 $0 \le \phi < 2\pi$ で規格化する。A は正の実数だから

$$1 = \int_0^{2\pi} |\Psi_m(\phi)|^2 \,\mathrm{d}\phi = A^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi A^2, \qquad \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}. \tag{1}$$

[1.2] 周期性とエネルギー

波動関数の一価性 $\Psi_m(\phi + 2\pi) = \Psi_m(\phi)$ は $e^{2\pi i m} = 1$、すなわち $m \in \mathbb{Z}$ を要求する。$V_3 = 0$ の (2) に $e^{im\phi}$ を代入すると、二階微分は $-m^2 e^{im\phi}$ なので

$$\boxed{E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2}$$

$m \neq 0$ では m と $-m$ が同じエネルギーを持つ。

[2.1] 極小近傍の調和振動

極小は $\phi_k = 2\pi k/3$ $(k = 0, 1, 2)$ であり、$V(\phi_k) = 0$ である。$\phi - \phi_k$ が小さいとき $1 - \cos[3(\phi - \phi_k)] \simeq \frac{9}{2}(\phi - \phi_k)^2$ だから

$$V(\phi) \simeq \frac{9V_3}{4}(\phi - \phi_k)^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 (\phi - \phi_k)^2. \tag{3}$$

回転の運動エネルギーは $I\dot{\phi}^2/2$ なので、調和振動子の質量に相当する係数は I である。従って

$$\boxed{\omega_0 = 3\sqrt{\frac{V_3}{2I}}}, \qquad \boxed{\epsilon = \frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{3\hbar}{2}\sqrt{\frac{V_3}{2I}}}. \tag{4}$$

[2.2] 三つの極小点を結ぶトンネル効果

以下、(3) と (6) の通常の行列固有値問題として、局在状態 $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ を互いに直交する規格化基底として扱う。原題は各状態の規格化だけを明記しているが、重なりが無視できない場合には別途重なり行列を要する。

(3) の各成分は

$$(\widetilde{H}\boldsymbol{c})_j = (\epsilon + t)c_j - t(c_1 + c_2 + c_3), \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

と書ける。三成分が等しい対称状態では $c_1 = c_2 = c_3 = e^{i\alpha}/\sqrt{3}$、$\alpha$ は任意の全体位相であり、固有値は $\boxed{E_{\mathrm{s}} = \epsilon - 2t}$ となる。一方、$c_1 + c_2 + c_3 = 0$ の二次元部分空間では $\boxed{E_{\mathrm{d}} = \epsilon + t}$ が二重縮退する。この部分空間の任意の状態は $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ を満たせば規格化される。三つの係数を個別に一意に定める条件はない。

[2.3] 回転操作との同時固有状態

(4) から、R は係数を $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_3, c_1, c_2)$ と移す。$\omega^3 = 1$ および $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を用いれば、規格化された同時固有状態を

$$\boxed{|\Psi_1\rangle} = \frac{|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_1\rangle = |\Psi_1\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_1\rangle = (\epsilon - 2t)|\Psi_1\rangle, \tag{6}$$

$$\boxed{|\Psi_\omega\rangle} = \frac{|1\rangle + \omega^2|2\rangle + \omega|3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_\omega\rangle = \omega|\Psi_\omega\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_\omega\rangle = (\epsilon + t)|\Psi_\omega\rangle, \tag{7}$$

$$\boxed{|\Psi_{\omega^2}\rangle} = \frac{|1\rangle + \omega|2\rangle + \omega^2|3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_{\omega^2}\rangle = \omega^2|\Psi_{\omega^2}\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_{\omega^2}\rangle = (\epsilon + t)|\Psi_{\omega^2}\rangle \tag{8}$$

と選べる。例えば $R|\Psi_\omega\rangle = (\omega|1\rangle + |2\rangle + \omega^2|3\rangle)/\sqrt{3} = \omega|\Psi_\omega\rangle$ であり、位相の対応を直接確かめられる。三状態は互いに直交する。

[2.4] WKB の障壁積分

$\epsilon \simeq 0$ とすると、隣接する極小間の転回点は $\phi_1 \simeq 0$、$\phi_2 \simeq 2\pi/3$ となる。この区間では $\sin(3\phi/2) \geq 0$ であり、$1 - \cos(3\phi) = 2\sin^2(3\phi/2)$ だから、(5) の作用積分は

$$\int_0^{2\pi/3} \sqrt{2IV(\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{2IV_3}\int_0^{2\pi/3} \sin\!\left(\frac{3\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi \tag{9}$$

$$= \sqrt{2IV_3}\left[-\frac{2}{3}\cos\!\left(\frac{3\phi}{2}\right)\right]_0^{2\pi/3} = \frac{4}{3}\sqrt{2IV_3}. \tag{10}$$

従って深い障壁 $V_3 \gg \epsilon$、すなわち $\sqrt{2IV_3} \gg \hbar$ の指数近似で

$$\boxed{t \approx C\exp\!\left[-\frac{4\sqrt{2IV_3}}{3\hbar}\right]}. \tag{11}$$

$\sqrt{IV_3}$ は作用の次元を持つので指数は無次元である。C は (5) で未指定の前因子であり、この近似だけでは決められない。

[3.1] 対称・反対称基底での行列

$|A\rangle = (|2\rangle + |3\rangle)/\sqrt{2}$、$|B\rangle = (|2\rangle - |3\rangle)/\sqrt{2}$ とする。$|1\rangle$ は $|2\rangle, |3\rangle$ に同じ $-t'$ で結合するので、$|A\rangle$ への行列要素は $-\sqrt{2}t'$、$|B\rangle$ への行列要素は零である。また $|2\rangle, |3\rangle$ 間の $-t$ は対称・反対称状態をそれぞれ $\epsilon - t, \epsilon + t$ に分ける。従って指定された順序 $(|1\rangle, |A\rangle, |B\rangle)$ で

$$\boxed{\widetilde{H}' = \begin{pmatrix} \epsilon - \Delta & -\sqrt{2}t' & 0 \\ -\sqrt{2}t' & \epsilon - t & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon + t \end{pmatrix}}. \tag{12}$$

[3.2] 非対角項の二次摂動

指定の分割は

$$\widetilde{H}_0 = \mathrm{diag}(\epsilon-\Delta, \epsilon-t, \epsilon+t), \qquad \widetilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}t' & 0 \\ -\sqrt{2}t' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$\widetilde{H}_1$ の対角要素は零なので一次補正は零である。$\Delta > t$ により、非摂動の $|1\rangle$ と $|A\rangle$ のエネルギー差は $(\epsilon-\Delta)-(\epsilon-t) = -(\Delta-t)$ と零でない。以下は t' についての形式的な二次展開であり、近似値として用いる条件は $\sqrt{2}t' \ll \Delta - t$ である。二次の式 $E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} |\langle k|\widetilde{H}_1|n\rangle|^2/(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})$ を用いると

$$\boxed{E_1} = \epsilon - \Delta - \frac{2t'^2}{\Delta - t} + O\!\left(\frac{t'^4}{(\Delta-t)^3}\right), \tag{14}$$

$$\boxed{E_A} = \epsilon - t + \frac{2t'^2}{\Delta - t} + O\!\left(\frac{t'^4}{(\Delta-t)^3}\right), \tag{15}$$

$$\boxed{E_B} = \epsilon + t. \tag{16}$$

$|B\rangle$ は他の状態と結合せず、最後の値はこの行列内で厳密である。二次展開の条件は $\sqrt{2}t' \ll \Delta - t$ であり、原題の大小関係 $\Delta > t > t' > 0$ だけでは $\Delta - t$ が十分大きいとは限らない。実際、最初の二準位の厳密値は

$$E_\pm = \epsilon - \frac{\Delta + t}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta-t)^2}{4} + 2t'^2}, \tag{17}$$

であり、上の E_1, E_A はそれぞれ E_-, E_+ の小さい $t'/(\Delta - t)$ に関する展開である。

物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 正方格子の平均場ハミルトニアン

周期的境界条件を課した正方格子では各サイトに隣接サイトが四つあり、隣接ペアを一度ずつ数えると結合数は $4N/2 = 2N$ である。$s_i = m + \delta s_i$ を代入し、$\delta s_i \delta s_j$ を捨てると

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{MF}} &= -J \sum_{\langle i,j \rangle} \{m^2 + m(\delta s_i + \delta s_j)\} \\ &= -J \left(2Nm^2 + 4m \sum_{i=1}^{N} (s_i - m) \right) = 2JNm^2 - 4Jm \sum_{i=1}^{N} s_i. \end{aligned} \tag{1}$$

よって (1) の空欄は $\boxed{\text{(a)} = 2JN}$、$\boxed{\text{(b)} = -4Jm}$ である。

[1.2] 分配関数と自由エネルギー

m を固定すると H_{MF} では各スピンの和が独立になる。$s_i = \pm 1$ の和は $e^{4\beta Jm} + e^{-4\beta Jm} = 2\cosh(4\beta Jm)$ なので

$$\boxed{Z = e^{-2\beta JNm^2} [2\cosh(4\beta Jm)]^N}, \qquad \boxed{f = -\frac{1}{\beta N} \log Z = 2Jm^2 - \frac{1}{\beta} \log[2\cosh(4\beta Jm)]}. \tag{2}$$

[1.3] 自己無撞着方程式

上の f を m で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 4Jm - 4J \tanh(4\beta Jm). \tag{3}$$

従って極値条件は $\boxed{m = \tanh(4\beta Jm)}$ となる。右辺は平均場中の一つのスピンの平均値でもあり、m の定義と一致する。

[1.4] 臨界温度と磁化の立ち上がり

常に $m = 0$ は解である。$\tanh(4\beta Jm)$ の原点での傾きが 1 になると非零解が現れるため

$$\boxed{T_c = 4J}. \tag{4}$$

実際、$f''(0) = 4J(1 - 4J/T)$ なので、$T > T_c$ では $m = 0$ が極小、$T < T_c$ では極大になる。$T < T_c$ で m が小さいとき、$\tanh y = y - y^3/3 + O(y^5)$ を自己無撞着方程式に入れる。$r = T/T_c < 1$ と置くと

$$0 = \left(\frac{1}{r} - 1 \right) m - \frac{m^3}{3r^3} + O(m^5), \qquad m^2 = 3r^2(1 - r) + O((1 - r)^2). \tag{5}$$

従って二つの対称な磁化枝は

$$\boxed{m(T) = \pm\sqrt{3\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)} + O\left(\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right)} \qquad (T \uparrow T_c) \tag{6}$$

である。符号は外場のない系での対称な二つの平衡状態を表す。

[2.1] 重なりによるハミルトニアン

(2) を H に代入し、元の和から除外された $i = j$ の項を差し引くと、$\xi_{i,\mu}^2 = s_i^2 = 1$ より

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2N}\sum_{\mu=1}^{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{N}\xi_{i,\mu}s_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{N}(\xi_{i,\mu}s_i)^2\right] \\ &= -\frac{N}{2}(m_1^2 + m_2^2) + 1. \end{aligned} \tag{7}$$

従って指定された $N \to \infty$ の主要項は

$$\boxed{H = -\frac{N}{2}(m_1^2 + m_2^2) + O(1)}. \tag{8}$$

$+1$ は N によらない項だが、有限 N の分配関数の前因子には残る。

[2.2] 補助変数による分配関数

原題の (3) で $a = \beta N > 0$ とし、$\mu = 1, 2$ にそれぞれ適用する。まず [2.1] の主要項で計算すると

$$\begin{aligned} Z &\simeq \frac{\beta N}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\beta N}{2}(x_1^2+x_2^2)} \sum_{\boldsymbol{s}} \exp\left[\beta\sum_{i=1}^{N} s_i(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})\right] \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \\ &= \frac{\beta N}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{\beta N}{2}(x_1^2+x_2^2)} \prod_{i=1}^{N} 2\cosh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})]\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2. \end{aligned} \tag{9}$$

各 s_i の和が積の一因子に変わった。これを (4)、(5) の形にまとめると

$$\boxed{(\mathrm{c}) = \frac{\beta N}{2\pi}}, \qquad \boxed{(\mathrm{d}) = \frac{1}{2}}, \qquad \boxed{(\mathrm{e}) = -\frac{1}{\beta N}\log\{2\cosh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})]\}}. \tag{10}$$

ここで (3) の a はガウス積分の係数であり、[1.1] の空欄 (a) とは別である。元の H の定数 $+1$ まで保持する場合、積分表示は厳密になり、同じ f に対して前因子だけが $e^{-\beta}\beta N/(2\pi)$ に変わる。この差は 1 スピンあたりの自由エネルギーと後の極小条件には熱力学的極限で影響しない。

[2.3] ランダムパターンの平均

各サイトの $(\xi_{i,1}, \xi_{i,2})$ は四通りの符号の組を確率 $1/4$ でとり、サイト間で独立である。大数の法則により (5) のサイト平均をこの四通りの平均に置き換える。cosh の偶関数性で同じ値が二組ずつ現れるから、熱力学的極限ではほとんど確実に

$$\boxed{f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} - \frac{1}{2\beta}\left\{\log[2\cosh\beta(x_1 + x_2)] + \log[2\cosh\beta(x_1 - x_2)]\right\}}. \tag{11}$$

図 1 は $N = 4$ の一実現例であり、この平均で各符号組が等頻度になるという追加条件ではない。

[2.4] 極小点の数と熱平衡の類似度

$u = x_1 + x_2$、$v = x_1 - x_2$ と置き、$g(y) = y^2/2 - T\log[2\cosh(y/T)]$ と定義する。$x_1^2 + x_2^2 = (u^2+v^2)/2$ なので

$$f(x_1, x_2) = \frac{g(u) + g(v)}{2}, \qquad g'(y) = y - \tanh(y/T), \quad g''(y) = 1 - \frac{1}{T}\operatorname{sech}^2(y/T). \tag{12}$$

$T \geq 1$ では $y > 0$ で $\tanh(y/T) < y/T \leq y$ だから、g の唯一の極小点は $y = 0$ である。$T = 1$ でも $g(y) = g(0) + y^4/12 + O(y^6)$ であり原点は極小である。従って $\boxed{T \geq 1 :\ (x_1, x_2) = (0,0) \text{ の } 1 \text{ 個}}$。

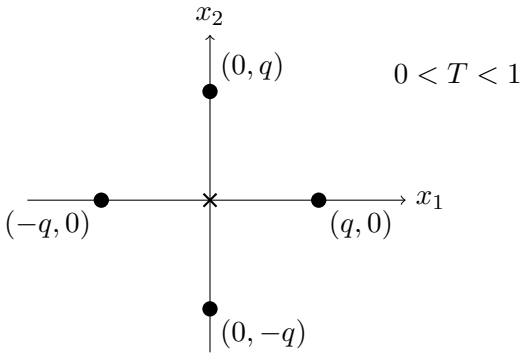
$0 < T < 1$ では $g''(0) = 1 - 1/T < 0$ で原点は極大である。$y > 0$ で

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{\tanh(y/T)}{y} = \frac{(y/T)\operatorname{sech}^2(y/T) - \tanh(y/T)}{y^2}. \tag{13}$$

分子に負号を付けた $\tanh(y/T) - (y/T)\operatorname{sech}^2(y/T)$ は $y = 0$ で 0、y で微分すると $(2y/T^2)\operatorname{sech}^2(y/T)\tanh(y/T) > 0$ となる。従って $\tanh(y/T)/y$ は $1/T > 1$ から 0 へ単調に減り、$q = \tanh(q/T)$ を満たす $q > 0$ がただ一つ存在する。$g'(y) = y[1 - \tanh(y/T)/y]$ は $0 < y < q$ で負、$y > q$ で正だから q は極小点である。g は偶関数なので $-q$ も極小点となる。独立な u, v の各々が $\pm q$ を選ぶ $2 \times 2 = 4$ 通りに対し、逆変換 $x_1 = (u+v)/2$、$x_2 = (u-v)/2$ から

$$\boxed{0 < T < 1 :\ (x_1, x_2) = (q,0), (-q,0), (0,q), (0,-q) \text{ の } 4 \text{ 個}}. \tag{14}$$

なお $T = 1$ の $f - f(0,0)$ の最低次は $(u^4 + v^4)/24 > 0$（原点以外）で、温度境界で極小数が曖昧になることはない。



$0 < T < 1$ の四つの極小点。$\times$ の原点はこの温度域では極大である。

最後に、有限 N の積分表示に現れる関数 f の式 (5) を x_μ で微分する。x_1, x_2 を固定した独立スピン分布では $\langle s_i \rangle_{x_1,x_2} = \tanh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})]$ だから、停留条件は

$$x_\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_{i,\mu} \tanh[\beta(x_1\xi_{i,1} + x_2\xi_{i,2})] = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_{i,\mu}\langle s_i \rangle_{x_1,x_2}. \tag{15}$$

熱力学的極限で一つの極小に対応する平衡相を選ぶと、この固定補助変数での平均がその相のスピン平均となり、極小点の x_μ は熱平衡の類似度 m_μ と一致する。有限 N の無条件の Gibbs 平均はスピン反転対称性により零であり、ここでの条件付き平均とは区別する。従って四極小は二つのパターンとその符号反転を想起する状態である。[1] の $T_c = 4J$ とこの模型の境界 $T = 1$ は別のハミルトニアンの値である。

物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 振動子の応答

電場方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_x$ とする。$\boldsymbol{u}(t) = u_0 \boldsymbol{e}_x e^{-i\omega t}$ を (1) に代入すると、$\mathrm{d}^2\boldsymbol{u}/\mathrm{d}t^2 = -\omega^2 \boldsymbol{u}$ より

$$m(\omega_0^2 - \omega^2)u_0 = qE_0, \qquad \boxed{P_0 = Nqu_0 = \frac{Nq^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}}. \tag{1}$$

この定常調和応答は $\omega \neq \omega_0$ に限る。減衰のないモデルでちょうど $\omega = \omega_0$ とすると振幅が有限な同じ周波数の定常解はなく、式の発散をそのまま有限の分極と解釈できない。

[1.2] 誘電率とその符号

以後、振動子の強さを周波数の二乗で表した

$$\Omega_p^2 \equiv \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m} > 0 \tag{2}$$

を使う。[1.1] のベクトル関係 $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \Omega_p^2 \boldsymbol{E}/(\omega_0^2 - \omega^2)$ を誘電率の定義に入れると

$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) = \varepsilon_0 \frac{\omega_0^2 + \Omega_p^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{3}$$

$\omega > 0$ で分母と分子の符号が異なるのは

$$\boxed{\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_p^2}} \tag{4}$$

である。下端は共鳴点、上端は $\varepsilon = 0$ なので、いずれも「負」には含まない。

[1.3] 誘電体中の固有モード

(4) の回転をとり (3) を代入すると

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = i\omega\mu_0 \nabla \times \boldsymbol{H} = \mu_0 \omega^2 (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}). \tag{5}$$

一様な誘電体で $\varepsilon(\omega) \neq 0$ なら、(5) の $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega) \nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ から $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$。したがって (2) の平面波について二重回転の左辺は $k^2 \boldsymbol{E}$ となる。非零の横電場では

$$\boxed{\boldsymbol{P} = \left(\frac{k^2}{\mu_0 \omega^2} - \varepsilon_0\right) \boldsymbol{E}}, \qquad \boxed{c^2 k^2 = \omega^2 \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0} = \omega^2 \left(1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)}. \tag{6}$$

最初の式はマクスウェル方程式による分極と電場の関係であり、[1.1] の振動子応答を加えたものが二番目の分散式である。

$K = c^2k^2$、$X = \omega^2$ と置き、分母を払うと

$$X^2 - (K + \omega_0^2 + \Omega_p^2)X + K\omega_0^2 = 0. \tag{7}$$

ゆえに、横波の二枝は

$$\boxed{\omega_\pm^2(k) = \frac{K + \omega_0^2 + \Omega_p^2 \pm \sqrt{(K + \omega_0^2 + \Omega_p^2)^2 - 4K\omega_0^2}}{2}}. \tag{8}$$

判別式は $(K - \omega_0^2)^2 + 2\Omega_p^2(K + \omega_0^2) + \Omega_p^4 > 0$ で、$k > 0$ なら二根は正である。$k = 0$ では下枝は $\omega_- = 0$、上枝は $\sqrt{\omega_0^2 + \Omega_p^2}$ となる。

なお $\varepsilon(\omega) = 0$ では (5) から横波条件を導けない。このとき $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \Omega_p^2}$、$\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{k}$、$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$ の縦の分極振動も (3)–(6) を満たす。式 (8) は非零横電場の分散を表す。

[1.4] 大きな波数での二枝

$K \gg \omega_0^2, \Omega_p^2$ では、(8) の根の和と積から先頭項が分かる。設問で指定された三つの記号で表す答えは

$$\boxed{\omega_+ \simeq ck, \qquad \omega_- \simeq \omega_0}. \tag{9}$$

根の和と積を順に展開すると

$$\omega_+^2 = K + \Omega_p^2 + O(K^{-1}), \qquad \omega_-^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{\Omega_p^2}{K} + O(K^{-2})\right). \tag{10}$$

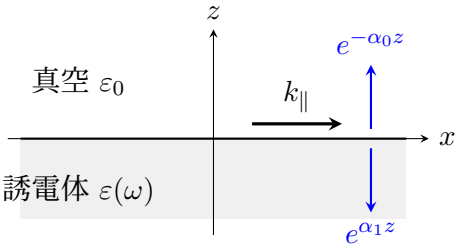
平方根を一次まで展開した結果は

$$\omega_+ = ck + \frac{\Omega_p^2}{2ck} + O(k^{-3}), \qquad \omega_- = \omega_0\left(1 - \frac{\Omega_p^2}{2c^2k^2} + O(k^{-4})\right). \tag{11}$$

この次項の係数には $\Omega_p^2 = Nq^2/(\varepsilon_0 m)$ が現れる。ck と ω_0 はいずれも角周波数の次元を持ち、$k \to \infty$ で補正はそれぞれの先頭項に比べて消える。

[2.1] 界面の連続条件と電場成分

図のように界面の上を真空、下を誘電体とし、α_0, α_1 は局在のため正の実数とする。



[1] の無源 Maxwell 方程式を界面をまたいで用いる。(4) を界面を横切る微小ループで積分すると接線電場が連続し、(5) を薄い円柱で積分すると自由表面電荷がない場合の法線電束密度が連続する。場が界面近傍で有限なら、縮小極限でループ短辺の線積分、ループの磁束、円柱側面の電束は消える。y 成分は (7), (8) により零だから、$z=0$ では

$$\boxed{E_{0x}=E_{1x}}, \qquad \boxed{\varepsilon_0 E_{0z}=\varepsilon(\omega)E_{1z}}. \tag{12}$$

真空側では $\varepsilon_0\neq 0$ なので、(5) と (7) から $ik_\parallel E_{0x}-\alpha_0 E_{0z}=0$ を得る。媒質側では $\varepsilon=0$ の可能性を先に除かず、(3), (4) から得る二重回転方程式の x 成分を用いる。(8) と $\alpha_1^2=k_\parallel^2-\varepsilon\mu_0\omega^2$ を代入すると

$$-\alpha_1(\alpha_1 E_{1x}-ik_\parallel E_{1z})=\varepsilon\mu_0\omega^2 E_{1x} \quad\Longrightarrow\quad ik_\parallel E_{1x}+\alpha_1 E_{1z}=0. \tag{13}$$

局在条件 $\alpha_0>0$ から $k_\parallel^2>\varepsilon_0\mu_0\omega^2$ であり、$k_\parallel\neq 0$ である。従って

$$\boxed{E_{0z}=\frac{ik_\parallel}{\alpha_0}E_{0x}}, \qquad \boxed{E_{1z}=-\frac{ik_\parallel}{\alpha_1}E_{1x}}. \tag{14}$$

法線成分の符号が逆なのは、両側で指数の z 微分の符号が逆だからである。$\varepsilon=0$ なら式(12)の法線電束の連続性から $E_{0z}=0$、式(14)と接線電場の連続性から他の電場成分も零となる。従って (7), (8) の形の非零の局在表面波ではこの場合を除ける。

[2.2] 表面波の条件

(14) を (12) に入れ、非零の $E_{0x}=E_{1x}$ と $k_\parallel$ を消すと

$$\boxed{\frac{\varepsilon_0}{\alpha_0}+\frac{\varepsilon(\omega)}{\alpha_1}=0, \quad \text{すなわち} \quad \varepsilon(\omega)=-\varepsilon_0\frac{\alpha_1}{\alpha_0}}. \tag{15}$$

$\alpha_0,\alpha_1>0$ なので少なくとも $\varepsilon(\omega)<0$ が必要である。実際の存在範囲は両側の減衰条件を合わせて [2.4] で決める。

[2.3] 界面に沿う波数

(15) より $\alpha_1=-\varepsilon\alpha_0/\varepsilon_0$。両辺の二乗と $\alpha_0^2=k_\parallel^2-\varepsilon_0\mu_0\omega^2$、$\alpha_1^2=k_\parallel^2-\varepsilon\mu_0\omega^2$ を組み合わせると

$$(\varepsilon_0^2-\varepsilon^2)k_\parallel^2=\varepsilon_0\varepsilon\mu_0\omega^2(\varepsilon_0-\varepsilon). \tag{16}$$

$\varepsilon\neq\varepsilon_0$ として共通因子を除き、正方向へ伝わる根を選べば

$$\boxed{k_\parallel=\omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0+\varepsilon(\omega)}}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon_0+\varepsilon(\omega)}}}. \tag{17}$$

これは $\varepsilon<-\varepsilon_0$ の範囲で実数かつ $k_\parallel>\omega/c$ となり、真空側でも減衰する。

[2.4] 表面波が存在する周波数

(17) を $\alpha_0^2=k_\parallel^2-\omega^2/c^2$ に入れると

$$\alpha_0^2=\frac{\omega^2}{c^2}\frac{-\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}. \tag{18}$$

$\alpha_0^2 > 0$ と [2.2] の $\varepsilon < 0$ を両立する条件は $\varepsilon < -\varepsilon_0$。このとき $\alpha_1 = -\varepsilon\alpha_0/\varepsilon_0 > 0$ も満たす。[1.2] の誘電率を代入すると

$$1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2} < -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\omega_0 < \omega < \sqrt{\omega_0^2 + \frac{Nq^2}{2\varepsilon_0 m}}}. \tag{19}$$

下端 ω_0 では無減衰振動子の定常応答が発散するうえ、真空側の $\alpha_0 \to 0$ で局在性も失う。上端では $\varepsilon \to -\varepsilon_0$ に伴い $k_{\parallel}$ が無限大になる。よって両端を除く。[1.2] の $\varepsilon < 0$ の帯域のうち、この狭い範囲だけが真空・誘電体の両側へ減衰する表面波を与える。