物理工学専攻院試解答集
2027 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 自由回転状態の規格化

角度 ϕ は一周すると同じ配置に戻る。従って一周分 $0 \le \phi < 2\pi$ で規格化する。A は正の実数だから

$$1 = \int_0^{2\pi} |\Psi_m(\phi)|^2 \,\mathrm{d}\phi = A^2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi = 2\pi A^2, \qquad \boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}. \tag{1}$$

[1.2] 周期性とエネルギー

波動関数の一価性 $\Psi_m(\phi + 2\pi) = \Psi_m(\phi)$ は $e^{2\pi i m} = 1$、すなわち $m \in \mathbb{Z}$ を要求する。$V_3 = 0$ の (2) に $e^{im\phi}$ を代入すると、二階微分は $-m^2 e^{im\phi}$ なので

$$\boxed{E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}}, \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{2}$$

$m \neq 0$ では m と $-m$ が同じエネルギーを持つ。

[2.1] 極小近傍の調和振動

極小は $\phi_k = 2\pi k/3$ $(k = 0, 1, 2)$ であり、$V(\phi_k) = 0$ である。$\phi - \phi_k$ が小さいとき $1 - \cos[3(\phi - \phi_k)] \simeq \frac{9}{2}(\phi - \phi_k)^2$ だから

$$V(\phi) \simeq \frac{9V_3}{4}(\phi - \phi_k)^2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2 (\phi - \phi_k)^2. \tag{3}$$

回転の運動エネルギーは $I\dot{\phi}^2/2$ なので、調和振動子の質量に相当する係数は I である。従って

$$\boxed{\omega_0 = 3\sqrt{\frac{V_3}{2I}}}, \qquad \boxed{\epsilon = \frac{\hbar\omega_0}{2} = \frac{3\hbar}{2}\sqrt{\frac{V_3}{2I}}}. \tag{4}$$

[2.2] 三つの極小点を結ぶトンネル効果

以下、(3) と (6) の通常の行列固有値問題として、局在状態 $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle$ を互いに直交する規格化基底として扱う。原題は各状態の規格化だけを明記しているが、重なりが無視できない場合には別途重なり行列を要する。

(3) の各成分は

$$(\widetilde{H}\boldsymbol{c})_j = (\epsilon + t)c_j - t(c_1 + c_2 + c_3), \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \tag{5}$$

と書ける。三成分が等しい対称状態では $c_1 = c_2 = c_3 = e^{i\alpha}/\sqrt{3}$、$\alpha$ は任意の全体位相であり、固有値は $\boxed{E_{\mathrm{s}} = \epsilon - 2t}$ となる。一方、$c_1 + c_2 + c_3 = 0$ の二次元部分空間では $\boxed{E_{\mathrm{d}} = \epsilon + t}$ が二重縮退する。この部分空間の任意の状態は $|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2 = 1$ を満たせば規格化される。三つの係数を個別に一意に定める条件はない。

[2.3] 回転操作との同時固有状態

(4) から、R は係数を $(c_1, c_2, c_3) \mapsto (c_3, c_1, c_2)$ と移す。$\omega^3 = 1$ および $1 + \omega + \omega^2 = 0$ を用いれば、規格化された同時固有状態を

$$\boxed{|\Psi_1\rangle} = \frac{|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_1\rangle = |\Psi_1\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_1\rangle = (\epsilon - 2t)|\Psi_1\rangle, \tag{6}$$

$$\boxed{|\Psi_\omega\rangle} = \frac{|1\rangle + \omega^2|2\rangle + \omega|3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_\omega\rangle = \omega|\Psi_\omega\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_\omega\rangle = (\epsilon + t)|\Psi_\omega\rangle, \tag{7}$$

$$\boxed{|\Psi_{\omega^2}\rangle} = \frac{|1\rangle + \omega|2\rangle + \omega^2|3\rangle}{\sqrt{3}}, \qquad R|\Psi_{\omega^2}\rangle = \omega^2|\Psi_{\omega^2}\rangle, \qquad \widetilde{H}|\Psi_{\omega^2}\rangle = (\epsilon + t)|\Psi_{\omega^2}\rangle \tag{8}$$

と選べる。例えば $R|\Psi_\omega\rangle = (\omega|1\rangle + |2\rangle + \omega^2|3\rangle)/\sqrt{3} = \omega|\Psi_\omega\rangle$ であり、位相の対応を直接確かめられる。三状態は互いに直交する。

[2.4] WKB の障壁積分

$\epsilon \simeq 0$ とすると、隣接する極小間の転回点は $\phi_1 \simeq 0$、$\phi_2 \simeq 2\pi/3$ となる。この区間では $\sin(3\phi/2) \geq 0$ であり、$1 - \cos(3\phi) = 2\sin^2(3\phi/2)$ だから、(5) の作用積分は

$$\int_0^{2\pi/3} \sqrt{2IV(\phi)}\,\mathrm{d}\phi = \sqrt{2IV_3}\int_0^{2\pi/3} \sin\!\left(\frac{3\phi}{2}\right)\mathrm{d}\phi \tag{9}$$

$$= \sqrt{2IV_3}\left[-\frac{2}{3}\cos\!\left(\frac{3\phi}{2}\right)\right]_0^{2\pi/3} = \frac{4}{3}\sqrt{2IV_3}. \tag{10}$$

従って深い障壁 $V_3 \gg \epsilon$、すなわち $\sqrt{2IV_3} \gg \hbar$ の指数近似で

$$\boxed{t \approx C\exp\!\left[-\frac{4\sqrt{2IV_3}}{3\hbar}\right]}. \tag{11}$$

$\sqrt{IV_3}$ は作用の次元を持つので指数は無次元である。C は (5) で未指定の前因子であり、この近似だけでは決められない。

[3.1] 対称・反対称基底での行列

$|A\rangle = (|2\rangle + |3\rangle)/\sqrt{2}$、$|B\rangle = (|2\rangle - |3\rangle)/\sqrt{2}$ とする。$|1\rangle$ は $|2\rangle, |3\rangle$ に同じ $-t'$ で結合するので、$|A\rangle$ への行列要素は $-\sqrt{2}t'$、$|B\rangle$ への行列要素は零である。また $|2\rangle, |3\rangle$ 間の $-t$ は対称・反対称状態をそれぞれ $\epsilon - t, \epsilon + t$ に分ける。従って指定された順序 $(|1\rangle, |A\rangle, |B\rangle)$ で

$$\boxed{\widetilde{H}' = \begin{pmatrix} \epsilon - \Delta & -\sqrt{2}t' & 0 \\ -\sqrt{2}t' & \epsilon - t & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon + t \end{pmatrix}}. \tag{12}$$

[3.2] 非対角項の二次摂動

指定の分割は

$$\widetilde{H}_0 = \mathrm{diag}(\epsilon-\Delta, \epsilon-t, \epsilon+t), \qquad \widetilde{H}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{2}t' & 0 \\ -\sqrt{2}t' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

$\widetilde{H}_1$ の対角要素は零なので一次補正は零である。$\Delta > t$ により、非摂動の $|1\rangle$ と $|A\rangle$ のエネルギー差は $(\epsilon-\Delta)-(\epsilon-t) = -(\Delta-t)$ と零でない。以下は t' についての形式的な二次展開であり、近似値として用いる条件は $\sqrt{2}t' \ll \Delta - t$ である。二次の式 $E_n^{(2)} = \sum_{k\neq n} |\langle k|\widetilde{H}_1|n\rangle|^2/(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})$ を用いると

$$\boxed{E_1} = \epsilon - \Delta - \frac{2t'^2}{\Delta - t} + O\!\left(\frac{t'^4}{(\Delta-t)^3}\right), \tag{14}$$

$$\boxed{E_A} = \epsilon - t + \frac{2t'^2}{\Delta - t} + O\!\left(\frac{t'^4}{(\Delta-t)^3}\right), \tag{15}$$

$$\boxed{E_B} = \epsilon + t. \tag{16}$$

$|B\rangle$ は他の状態と結合せず、最後の値はこの行列内で厳密である。二次展開の条件は $\sqrt{2}t' \ll \Delta - t$ であり、原題の大小関係 $\Delta > t > t' > 0$ だけでは $\Delta - t$ が十分大きいとは限らない。実際、最初の二準位の厳密値は

$$E_\pm = \epsilon - \frac{\Delta + t}{2} \pm \sqrt{\frac{(\Delta-t)^2}{4} + 2t'^2}, \tag{17}$$

であり、上の E_1, E_A はそれぞれ E_-, E_+ の小さい $t'/(\Delta - t)$ に関する展開である。