# 物理工学専攻院試解答集
# 2027 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

## 図 1 の幾何と運動の向き

円錐の母線に沿って頂点から測った距離が $r$ である。図 1 の上向き $z$ 軸を使うと、A の水平半径と高さ、B の高さはそれぞれ

$$R_A = r\sin\theta_0, \qquad z_A = r\cos\theta_0, \qquad z_B = -(l-r) = r - l. \tag{1}$$

糸が張っているので、A が斜面を外へ進むと B も上昇する。以下では図の円錐に合わせて $0 < \theta_0 < \pi/2$、また $0 < r < l$ の運動を考える。初速度は方位角方向だけなので、$\dot r(0) = 0$、$r_0 \sin\theta_0\, \dot\varphi(0) = v_0$ である。

## [1] ラグランジアン

A の速さの二乗は $\dot r^2 + (r\sin\theta_0)^2\dot\varphi^2$、B の速さの二乗は $\dot z_B^2 = \dot r^2$ である。位置エネルギーの基準を頂点の高さに取ると

$$T_A = \frac{m}{2}\big(\dot r^2 + r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2\big), \quad T_B = \frac{M}{2}\dot r^2, \quad U_A = mgr\cos\theta_0, \quad U_B = Mg(r-l).$$

従って、基準点による定数項も含めた答えは

$$\boxed{L = \frac{m+M}{2}\dot r^2 + \frac{m}{2}r^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M)r + Mgl.} \tag{2}$$

## [2] $r$ の運動方程式

式(2)から $\partial L/\partial\dot r = (m+M)\dot r$、$\partial L/\partial r = mr\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M)$ である。従って

$$\boxed{(m+M)\ddot r = mr\sin^2\theta_0\,\dot\varphi^2 - g(m\cos\theta_0 + M).} \tag{3}$$

右辺の第一項は方位角運動が外向きに寄与する項、第二項は二つの質点を同時に上げることに伴う重力項である。

## [3] $z$ 軸まわりの角運動量

$L$ は $\varphi$ を含まないので、$\frac{d}{dt}(\partial L/\partial\dot\varphi) = 0$。A の水平半径 $R_A$ と水平接線方向の速さ $R_A\dot\varphi$ の積から、保存量は

$$L_z = mr^2\sin^2\theta_0\,\dot\varphi = mr_0\sin\theta_0\,v_0. \tag{4}$$

B は $z$ 軸上で動くため、この軸まわりの角運動量を持たない。

## [4] 方位角を消去した方程式

式(4)より $\dot{\varphi} = v_0 r_0/(r^2 \sin\theta_0)$。これを式(3)に代入すると

$$\boxed{(m+M)\ddot{r} = \frac{m r_0^2 v_0^2}{r^3} - g(m\cos\theta_0 + M).} \tag{5}$$

## [5] 径方向の速さ

式(5)に $\dot{r}$ を掛ける。$r^{-3}\dot{r} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(r^{-2})$ であり、初期条件 $r = r_0, \dot{r} = 0$ を使って積分すると

$$\frac{m+M}{2}\dot{r}^2 = \frac{m v_0^2}{2}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - g(m\cos\theta_0 + M)(r - r_0), \tag{6}$$

$$\dot{r}^2 = \boxed{\frac{m v_0^2}{m+M}\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) - \frac{2g(m\cos\theta_0 + M)}{m+M}(r - r_0).} \tag{7}$$

これは $r = r_0$ で確かに零になる。$l$ は糸長の制約を定めるが、$r$ に依存する運動エネルギー・力には現れない。

## [6] 他方の転回点

$r_1 \neq r_0$ は式(7)のもう一つの正の零点である。$r = r_1$ とおき、$1 - r_0^2/r_1^2 = (r_1 - r_0)(r_1 + r_0)/r_1^2$ を用いて $r_1 - r_0$ を除くと

$$2g(m\cos\theta_0 + M)r_1^2 - m v_0^2 r_1 - m v_0^2 r_0 = 0.$$

左辺の定数項は負なので二根の符号は異なり、物理的な根は正の根である。よって

$$\boxed{r_1 = \frac{m v_0^2 + \sqrt{m^2 v_0^4 + 8 m v_0^2 r_0 g(m\cos\theta_0 + M)}}{4g(m\cos\theta_0 + M)}.} \tag{8}$$

$r_1 > r_0$ か $r_1 < r_0$ かは初期加速度の符号、すなわち $m v_0^2/r_0 - g(m\cos\theta_0 + M)$ の符号で決まる。等号の場合は $r_1 = r_0$ の定常回転となり、この設問の異なる二つの転回点にはならない。問題文が想定する往復運動では、$r_0, r_1$ とその間の $r$ は $0 < r < l$ を満たす。

## [7] 定常回転を与える半頂角

ここからは問題文の通り $\theta_0$ だけを変え、$r = r_0$ を保つ別の運動を考える。式(5)で $\ddot{r} = 0$ とすると $m v_0^2/r_0 = g(m\cos\theta_0 + M)$。従って

$$\boxed{\theta_0 = \arccos\left(\frac{v_0^2}{g r_0} - \frac{M}{m}\right).} \tag{9}$$

図の非退化な上向き円錐については $0 < v_0^2/(g r_0) - M/m < 1$ が必要である。

## [8] 微小変位後の角速度

瞬間的な力は $r$ 方向だけなので $z$ 軸まわりのトルクはなく、式(4)の値は前後で同じである。$r = r_0 + \rho$ を代入して

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{v_0 r_0}{(r_0+\rho)^2 \sin\theta_0} = \frac{v_0}{r_0 \sin\theta_0}\left(1 + \frac{\rho}{r_0}\right)^{-2}.} \tag{10}$$

ここでは後の運動の $\dot{\rho}$ の初期値は指定しない。

## [9] $\rho$ の一次の運動方程式

式(5)に $r = r_0 + \rho$ を入れ、$|\rho| \ll r_0$ で $(1+\rho/r_0)^{-3} \simeq 1 - 3\rho/r_0$ と展開する。定数項 $mv_0^2/r_0 - g(m\cos\theta_0 + M)$ は式(9)の定常条件で零なので

$$\boxed{\ddot{\rho} + \omega^2 \rho = 0, \qquad \omega^2 = \frac{3mv_0^2}{(m+M)r_0^2} = \frac{3g(m\cos\theta_0 + M)}{(m+M)r_0}.} \tag{11}$$

$\omega^2 > 0$ なので、微小なずれに対する復元運動である。求めた式は $\rho/r_0$ の一次までで、$\rho^2$ 以上を捨てている。

## [10] B の運動

糸の長さから $z_B = r - l = r_0 - l + \rho$ である。従って B は平均位置 $z_B = r_0 - l$ のまわりを、A の径方向のずれと同じ $\rho$ だけ上下する。式(11)より、その運動は鉛直方向の単振動であり、角振動数は $\omega$、周期は

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{(m+M)r_0^2}{3mv_0^2}}.}$$

微小力の力積は指定されていないので、振幅と位相はこの設問だけでは定まらない。A が外側へ動くとき B は上昇する。