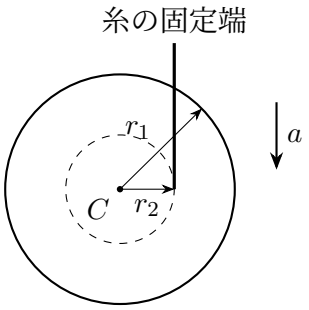
物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 糸で落下する剛体

図 1 の内側の円盤は厚さを無視するので、剛体の質量は外側の 2 枚に分布する。一方、糸は半径 r_2 の内側の円盤に接している。この二つの半径の役割を区別する。



外円盤の半径と糸のトルク腕

[1.1] 中心軸まわりの慣性モーメント

外側の 2 枚は同じ厚さ d_1 と同じ密度を持つため、1 枚の質量は $M/2$ である。1 枚について半径 s から $s+\mathrm{d}s$ の環の質量は、面密度を $(M/2)/(\pi r_1^2)$ として

$$\mathrm{d}m = \frac{M/2}{\pi r_1^2}\, 2\pi s\, \mathrm{d}s = \frac{M}{r_1^2} s\, \mathrm{d}s.$$

よって 1 枚の中心軸まわりの慣性モーメントは $\int_0^{r_1} s^2\, \mathrm{d}m = Mr_1^2/4$。2 枚を足すと

$$\boxed{I_C = \frac{1}{2} M r_1^2}.$$

厚さを無視する内側の円盤には質量を割り当てない。d_1 は面密度を通じて M に含まれている。

[1.2] 並進と回転の運動方程式

並進の正方向を鉛直下向き、回転の正方向を糸がほどける向きに選ぶ。重力と糸の張力による並進の式は

$$\boxed{Ma = Mg - T}.$$

糸の張力は中心軸から距離 r_2 で作用するので、角速度のこの正方向の成分を ω とすれば

$$\boxed{I_C \dot{\omega} = T r_2}.$$

糸が滑らないため、糸のほどけた長さは重心の下降距離に等しい。これを時間で二度微分すると $\boxed{a = r_2 \dot{\omega}}$ となる。

[1.3] 重心の加速度

回転の式と滑りなしの条件から $T = I_C a / r_2^2$。これを並進の式に代入し、[1.1] の I_C を使うと

$$\left(M + \frac{M r_1^2}{2 r_2^2}\right) a = Mg, \qquad \boxed{a = \frac{2 r_2^2}{r_1^2 + 2 r_2^2}\, g}.$$

$r_1, r_2, g > 0$ なら $0 < a < g$ であり、$T = M(g - a) > 0$ とも整合する。

[2] 磁場中の帯電球殻

位置 $\boldsymbol{r}$ は球殻の重心から表面上の点へ向かう。電荷は球殻とともに回るので、各表面素片の電荷に働く磁気力を求め、そのトルクを球面全体で積分する。外部磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ だけを用いる。

[2.1] 表面上の速度

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で剛体回転する点の速度は、中心が静止しているため

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}.$$

[2.2] 微小面積に働く力

面積 $\mathrm{d}S$ の電荷は $\sigma\, \mathrm{d}S$。磁場によるローレンツ力は、問題の三重積公式に $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}$ を代入して

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B} = \sigma\, \mathrm{d}S\, [(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{\omega}]}.$$

σ は符号付きの面電荷密度なので、負電荷では力の向きが反転する。

[2.3] 微小トルク

原点まわりのトルクは $\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}$。力のうち $\boldsymbol{r}$ と平行な項は寄与しない。したがって

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{N} = -\sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})}.$$

[2.4] 球面全体からのトルク

球面の回転・反射対称性［問題の式 (1)］により、$\int_{\Omega_R} x^2\, \mathrm{d}S$, $\int_{\Omega_R} y^2\, \mathrm{d}S$, $\int_{\Omega_R} z^2\, \mathrm{d}S$ は等しく、異なる座標の積の積分はゼロである。$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ と球面積 $4\pi R^2$ から

$$\int_{\Omega_R} x^2\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega_R} y^2\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega_R} z^2\, \mathrm{d}S = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

よって $\int_{\Omega_R} (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}S = (4\pi R^4/3)\boldsymbol{B}$。$\boldsymbol{\omega}$ は球面上の位置に依らないので [2.3] を積分して

$$\boldsymbol{N} = \frac{4\pi\sigma R^4}{3}\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ を代入した答えは

$$\boxed{N_x = \frac{4\pi\sigma B R^4}{3}\omega_y, \qquad N_y = -\frac{4\pi\sigma B R^4}{3}\omega_x, \qquad N_z = 0}.$$

[2.5] 各軸の慣性モーメント

面質量密度 ρ について x 軸からの距離の二乗は y^2+z^2。したがって

$$I_x = \rho \int_{\Omega_R} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}S = \frac{8\pi\rho R^4}{3}.$$

同じ球対称性を y, z 軸にも用いると

$$\boxed{I_x = I_y = I_z = I = \frac{8\pi\rho R^4}{3}}.$$

[2.6] 角速度と歳差の向き

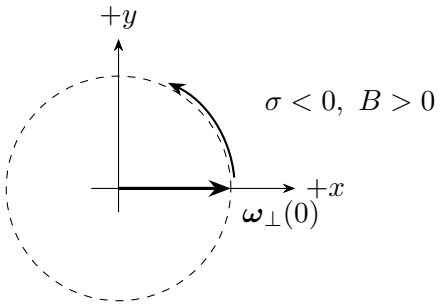
球殻の慣性モーメントはどの軸でも I なので、角運動量は $I\boldsymbol{\omega}$ であり、回転運動方程式は $I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{N}$。[2.4] と [2.5] を代入して

$$\dot{\omega}_x = \frac{\sigma B}{2\rho}\omega_y, \qquad \dot{\omega}_y = -\frac{\sigma B}{2\rho}\omega_x, \qquad \dot{\omega}_z = 0.$$

初期条件は $\omega_x(0) = \omega_0 \sin\theta$, $\omega_y(0) = 0$, $\omega_z(0) = \omega_0\cos\theta$。最初の二式から $\ddot{\omega}_x = -(\sigma B/2\rho)^2\omega_x$ となり、初期値を満たす解は

$$\boxed{\begin{aligned}
&\omega_x(t) = \omega_0 \sin\theta \cos\left(\frac{\sigma B}{2\rho}t\right), \\
&\omega_y(t) = -\omega_0 \sin\theta \sin\left(\frac{\sigma B}{2\rho}t\right), \\
&\omega_z(t) = \omega_0\cos\theta.
\end{aligned}}$$

横成分を $\boldsymbol{\omega}_\perp = (\omega_x, \omega_y, 0)$ と書く。その大きさは $\omega_0\sin\theta$ のまま xy 平面を回り、ω_z も一定である。したがって回転軸は z 軸となす角 θ を保って歳差する。



$+z$ 側から見た横成分

$\sigma < 0, B > 0$ なら、初期時刻の $\dot{\omega}_y(0) = -\sigma B\omega_0\sin\theta/(2\rho) > 0$。すなわち横成分は $+x$ から $+y$ に向かうので、$+z$ 側から見た歳差の向きは反時計回りである。

物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 調和振動子の幅

$V_0 = 0$ のハミルトニアンを $\hat{H}_0$ と書く。式 (2) の Gaussian を微分すると

$$\psi_0''(x) = (\alpha^2 x^2 - \alpha)\psi_0(x).$$

これを $\hat{H}_0\psi_0 = E_0\psi_0$ に代入し、x^2 の係数を比較すると

$$-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} = 0.$$

$\alpha > 0$ は波動関数が無限遠で減衰する条件だから、

$$\boxed{\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}}.$$

このとき定数項も $E_0 = \hbar^2\alpha/(2m) = \hbar\omega/2$ となる。

[1.2] 小さい段差によるエネルギーの変化

段差の摂動は $x < 0$ で V_0、$x \geq 0$ で 0 である。有限の V_0 に対する基底エネルギーを $E_0(V_0)$ と書く。非縮退基底状態の一次補正は、左半直線に粒子を見いだす確率を V_0 に掛けたものになる。$|\psi_0(x)|^2$ は偶関数で規格化されているため、この確率は $1/2$。したがって

$$\boxed{E_0(V_0) - E_0 = V_0 \int_{-\infty}^{0} |\psi_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x + O(V_0^2) = \frac{V_0}{2} + O\left(\frac{V_0^2}{\hbar\omega}\right)}.$$

ここでは $V_0 \ll \hbar\omega$ とし、二次以上の項を省いた。

[2.1] 無限壁と許される固有関数

$V_0 \to \infty$ では、有限のエネルギーをもつ束縛状態は $x < 0$ に確率振幅をもてない。無限壁の境界条件は $\phi_k(0) = 0$ である。$x > 0$ の Schrödinger 方程式は $\hat{H}_0$ と同じである。正の半直線で減衰する解を $x < 0$ へ $-\phi_k(-x)$ として奇拡張すると、$\phi_k(0) = 0$ により原点で関数値がつながり、左右の導関数も一致する。調和振動子のポテンシャルは偶関数なので、拡張した関数は両半直線で同じ固有値の Schrödinger 方程式を満たし、全直線の奇固有関数となる。問題文のパリティ条件によれば、それは奇数番号の ψ_{2k+1} に比例する。負の半直線を 0 とし、正の半直線で ψ_{2k+1} を定数倍したものが式 (4) になる。

[2.2] 規格化とエネルギー

ψ_{2k+1} は奇関数で全直線上で規格化されている。その確率密度は偶関数だから

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x.$$

式 (4) の規格化条件 $N^2 \int_0^\infty |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x = 1$ と $N > 0$ より

$$\boxed{N = \sqrt{2}}, \qquad \boxed{\epsilon_k = E_{2k+1} = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

特に、無限壁の基底状態は全直線振動子の第 1 励起状態の右半分である。

[3.1] 壁を取り去った直後の展開

ポテンシャルを瞬間的に変えても、その瞬間の波動関数は変わらない。したがって $\Psi(x, 0) = \phi_0(x)$ を新しいハミルトニアン $\hat{H}_0$ の完全な固有関数系で展開し、係数は $c_j = \langle \psi_j | \phi_0 \rangle$ とする。c_0 は実で正であり、式 (2)、(3) と $N = \sqrt{2}$ を使うと

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{2}\int_0^\infty \psi_0(x)\psi_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}.$$

ここで用いた積分は $u = \alpha x^2$ と置けば直ちに得られる。

[3.2] 壁を取り去った後のエネルギー期待値

$t > 0$ では $\hat{H}_0$ が時間に依存しないため、エネルギー期待値は時刻 0 の値に等しい。初期波動関数は原点で 0 となるが、導関数には跳びがある。そこで、エネルギーを運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの積分で評価する。各半直線で部分積分すると

$$-\int_0^\infty \psi_1^* \psi_1''\,dx = -[\psi_1^*\psi_1']_0^\infty + \int_0^\infty |\psi_1'|^2\,dx = \int_0^\infty |\psi_1'|^2\,dx \tag{1}$$

となる。原点では $\psi_1(0) = 0$、無限遠では波動関数が減衰するので境界項は消える。$\phi_0 = \sqrt{2}\psi_1$ $(x > 0)$ だから

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\hbar^2}{2m}|\phi_0'(x)|^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2}|\phi_0(x)|^2\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\infty \left[\frac{\hbar^2}{2m}|\psi_1'(x)|^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2}|\psi_1(x)|^2\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

角括弧の中は偶関数なので、最後の式は全直線上の ψ_1 のエネルギー期待値である。したがって

$$\boxed{E(t) = E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad (t > 0)}.$$

この値は壁を取り去った後の $\hat{H}_0$ に関する期待値であり、ϕ_0 自体が $\hat{H}_0$ の固有状態だという意味ではない。

[3.3] 一周期後の波動関数

急変後の展開の各成分は、$\hat{H}_0$ の固有エネルギー $E_j = (j+1/2)\hbar\omega$ に従い

$$\Psi(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-i(j+1/2)\omega t}\psi_j(x)$$

と進む。$t = 2\pi/\omega$ では全ての j で位相が $e^{-i(2j+1)\pi} = -1$ となるので、$\Psi(x, 2\pi/\omega) = -\phi_0(x)$。式 (3) と $\alpha = m\omega/\hbar$ を使って明示すると

$$\boxed{\Psi\left(x, \frac{2\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ -2\sqrt{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2} & (x \geq 0). \end{cases}}$$

位相 -1 は確率密度を変えないが、波動関数の値としては残る。

[3.4] 半周期後の波動関数

$t = \pi/\omega$ では各成分の位相は $e^{-i(j+1/2)\pi} = -i(-1)^j$ となる。問題文で与えられたパリティ $\psi_j(-x) = (-1)^j\psi_j(x)$ を項ごとに使うと

$$\Psi\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right) = -i\sum_{j=0}^{\infty} c_j\psi_j(-x) = -i\phi_0(-x).$$

右半直線にあった初期波動関数は左半直線へ鏡映される。ψ_1 が奇関数であることにも注意して書き下すと

$$\boxed{\Psi\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} 2i\sqrt{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2} & (x < 0), \\ 0 & (x \geq 0). \end{cases}}$$

原点ではどちらの枝も 0 であり、鏡映と位相因子は規格化を保つ。

物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 左右の分子数

矢印の総数と、左端から右端までの変位は、それぞれ

$$N_+ + N_- = N, \qquad a(N_+ - N_-) = L$$

を満たす。二式を加減して

$$\boxed{N_+ = \frac{1}{2}\left(N + \frac{L}{a}\right)}, \qquad \boxed{N_- = \frac{1}{2}\left(N - \frac{L}{a}\right)}.$$

N と L/a がともに偶数なので、これらは整数である。

[1.2] 微視的状態数

N 本の矢印の位置から右向きの N_+ 本を選べば、残りは左向きに決まる。したがって

$$\boxed{W = \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N + L/a)\right]!\left[\frac{1}{2}(N - L/a)\right]!}}.$$

[1.3] エントロピー

熱力学極限で $0 < L/(Na) < 1$ を固定すると $N_\pm$ も大きい。Stirling の公式を三つの階乗に用いる。$N = N_+ + N_-$ により、$-n$ の項は打ち消し合うから

$$S = k_\mathrm{B} \log W \simeq k_\mathrm{B}\left(N \log N - N_+ \log N_+ - N_- \log N_-\right).$$

無次元伸長 $u = L/(Na)$ をここで定義し、[1.1] の $N_\pm = N(1 \pm u)/2$ を代入すると

$$\boxed{S \simeq N k_\mathrm{B}\left[\log 2 - \frac{1+u}{2}\log(1+u) - \frac{1-u}{2}\log(1-u)\right], \qquad u = \frac{L}{Na}.}$$

$u = 0$ では $S \simeq N k_\mathrm{B} \log 2$。伸ばすほど左右の選択肢が減り、エントロピーは下がる。

[1.4] 張力と小伸長極限

$U = 0$ は L に依存しないので、$F = -TS$ と問題文の張力の定義から $X = -T(\partial S/\partial L)_T$。上式を微分すると

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{k_\mathrm{B}}{2a}\log\frac{1-u}{1+u}, \qquad \boxed{X = \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\log\frac{1+u}{1-u} = \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\log\frac{Na+L}{Na-L}.}$$

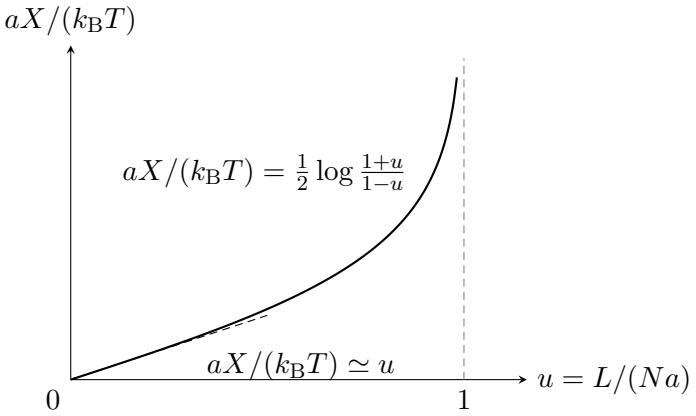
$u \ll 1$ では $\log[(1+u)/(1-u)] = 2u + O(u^3)$ なので

$$\boxed{X = \frac{k_\mathrm{B}T}{Na^2}L + O\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{a}u^3\right).}$$

張力が正になるのは、伸長によって減ったエントロピーを回復しようとするためである。

[1.5] 張力の概形

横軸を $u = L/(Na)$、縦軸を $aX/(k_\mathrm{B}T)$ とした概形を示す。どちらも無次元である。



実際、$\mathrm{d}X/\mathrm{d}L = k_\mathrm{B}T/[Na^2(1-u^2)] > 0$ で単調増加し、$L \to Na - 0$ で対数的に発散する。原点での接線は [1.4] の線形近似である。

[1.6] 断熱伸長の温度変化率

内部自由度を加えた後の $F(T, L)$ には $\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T + X\,\mathrm{d}L$ が成り立つ。混合微分の交換から、問題文の Maxwell 関係 $(\partial S/\partial L)_T = -(\partial X/\partial T)_L$ を得る。また、L 一定の熱容量の定義は $C_L = T(\partial S/\partial T)_L$ である。よって

$$\mathrm{d}S = \frac{C_L}{T}\,\mathrm{d}T - \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L \mathrm{d}L.$$

断熱変化では $\mathrm{d}S = 0$ だから、求める一般式は

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{T}{C_L}\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L.}$$

[1.7] 小伸長での断熱勾配

$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + X\,\mathrm{d}L$ を L 一定で用いると、$U = Nrk_\mathrm{B}T$ から $C_L = (\partial U/\partial T)_L = Nrk_\mathrm{B}$。さらに [1.4] の厳密式を T で微分して

$$\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L = \frac{k_\mathrm{B}}{2a}\log\frac{1+u}{1-u}.$$

これらを [1.6] に代入したのち、$u \ll 1$ で展開すると

$$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{T}{2Nra}\log\frac{1+u}{1-u} = \boxed{\frac{TL}{N^2ra^2} + O\left(\frac{T}{Nra}u^3\right).}$$

$C_L > 0$ では伸長時の温度上昇を表し、$L \to 0$ で勾配は 0 に近づく。

[2.1] 3 次元鎖の分配関数

端点 B を力 X の向きに z だけ動かすと外力は $X\,\mathrm{d}z$ の仕事をするため、力のポテンシャルエネルギーは $-Xz = -Xa\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i$ である。各矢印の向きの立体角要素は $\mathrm{d}\Omega_i = \sin\theta_i\,\mathrm{d}\theta_i\,\mathrm{d}\phi_i$。分子同士の相互作用がないので、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ と置けば角度積分は積に分かれる。

$$
\begin{aligned}
Z &= \prod_{i=1}^{N}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_i\int_0^{\pi}\sin\theta_i\,\mathrm{d}\theta_i\,e^{\beta Xa\cos\theta_i} \\
&= \left[2\pi\int_{-1}^{1}e^{\beta Xaq}\,\mathrm{d}q\right]^N = \boxed{\left[4\pi\frac{\sinh y}{y}\right]^N}, \qquad y = \frac{Xa}{k_{\mathrm{B}}T}.
\end{aligned}
$$

$y\to 0$ では $\sinh y/y\to 1$ なので、指定された $Z\to(4\pi)^N$ に一致する。

[2.2] 弱い外力での伸長と張力

分配関数の積分で端点座標 z に対応する重みは $e^{\beta Xz}$ である。従って $\partial_X Z = \beta Z\langle z\rangle$、すなわち $k_{\mathrm{B}}T\partial_X\log Z = \langle z\rangle$ となる。大きな N ではこの平均を巨視的状態量 L として

$$
L = k_{\mathrm{B}}T\left(\frac{\partial\log Z}{\partial X}\right)_T = Na\left(\coth y - \frac{1}{y}\right).
$$

$y\ll 1$ では $\coth y - 1/y = y/3 + O(y^3)$。したがって

$$
L = \frac{Na^2}{3k_{\mathrm{B}}T}X + O(Nay^3), \qquad \boxed{X = \frac{3k_{\mathrm{B}}T}{Na^2}L + O\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{a}\left(\frac{L}{Na}\right)^3\right)}.
$$

零力では等方性から $\langle\cos\theta\rangle_0 = 0$、$\langle\cos^2\theta\rangle_0 = 1/3$ である。Boltzmann 因子を y の一次まで展開すれば $\langle\cos\theta\rangle = y\langle\cos^2\theta\rangle_0 + O(y^3) = y/3 + O(y^3)$ となる。このため [1.4] の 1 次元模型に比べて線形係数が 3 倍になる。

物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の運動方程式

電子の電荷は $-e$ なので、電場による力は $-e\boldsymbol{E}$ である。ポテンシャルの勾配を加えると、減衰のない運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} V - e\boldsymbol{E} = -m\begin{pmatrix}\omega_\alpha^2 u_x \\ \omega_\alpha^2 u_y \\ \omega_\beta^2 u_z\end{pmatrix} - e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}.}$$

成分ごとには $m\ddot{u}_j + m\omega_j^2 u_j = -eE_j$ であり、$\omega_x = \omega_y = \omega_\alpha$, $\omega_z = \omega_\beta$ と置ける。

[1.2] 誘電率テンソル

定常解を $u_j(t) = u_{j,0}e^{-i\omega t}$ と置く。$\ddot{u}_j = -\omega^2 u_j$ だから [1.1] より

$$u_j = -\frac{e}{m(\omega_j^2 - \omega^2)}E_j.$$

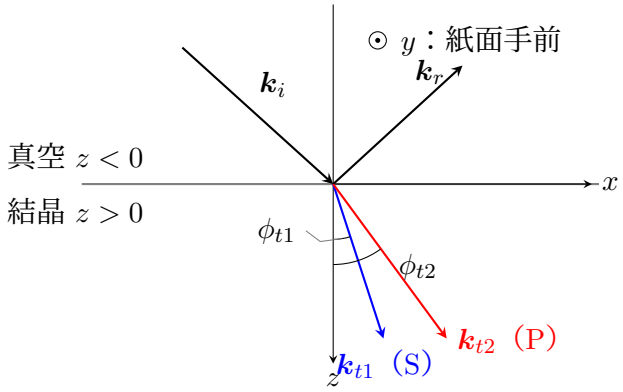
共振点 $\omega_j = \omega$ は問題の条件で除かれている。$\boldsymbol{P} = -\rho e\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ に代入すると

$$\boxed{\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix}\epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\alpha^2 - \omega^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\alpha^2 - \omega^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\beta^2 - \omega^2)}\end{pmatrix}.}$$

電子密度を 0 にすると真空の $\epsilon_0\mathbf{I}$ に戻る。分母の符号は共振周波数との大小に依存し、[2] の $\epsilon_n > \epsilon_a > \epsilon_0$ は別途与えられた条件である。

[2] 座標と二つの透過波

原本図 1 に合わせ、境界を $z = 0$、結晶を $z > 0$ とする。x は右、z は図で下向き、y は紙面手前を向く。以下の角は z 軸から右側へ測り、透過波の k_z は正とする。



この図は進行方向の関係を示す模式図で、矢印の長さは波数の大きさを表さない。

[2.1] 境界に沿う位相の一致

境界 $z=0$ では各平面波の位相は $k_x x - \omega t$ となる。接線方向の電場・磁場の連続条件がすべての x, t で成り立つには、非零の入射・反射・透過振幅の位相が一致しなければならない。したがって

$$k_{i,x} = k_{r,x} = k_{t1,x} = k_{t2,x}.$$

図の斜入射の透過枝では $k_{tj,x} = |\boldsymbol{k}_{tj}| \sin\phi_{tj} > 0$ であり、垂直入射ではこの成分は零となる。位相一致から

$$\boxed{\sin\phi_{t1} = \frac{|\boldsymbol{k}_i|}{|\boldsymbol{k}_{t1}|}\sin\phi_i, \qquad \sin\phi_{t2} = \frac{|\boldsymbol{k}_i|}{|\boldsymbol{k}_{t2}|}\sin\phi_i.}$$

[2.2] 平面波の電場と電束密度

$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ の共通因子を外すと、問題の Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \mu_0\omega\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -\omega\boldsymbol{D}$$

となる。第一式を第二式に代入し、三重積を展開すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) &= -\mu_0\omega^2\boldsymbol{D}\\ &= (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k} - |\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

ゆえに $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ を用いて

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{\mu_0\omega^2}\left[\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}\right].}$$

この式から $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0$ も直ちに分かる。異方性媒質では一般に $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ とは限らない。

[2.3] S 偏光の波数

S 偏光では $\boldsymbol{E} = E_y\boldsymbol{e}_y$ が入射面に垂直なので、$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E} = 0$。一方、結晶中では $D_y = \epsilon_n E_y$ である。[2.2] の y 成分を非零の E_y で割ると

$$\epsilon_n = \frac{|\boldsymbol{k}_{t1}|^2}{\mu_0\omega^2}, \qquad \boxed{|\boldsymbol{k}_{t1}| = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_n}.}$$

[2.4] S 偏光の光線方向

Maxwell の式から $\boldsymbol{H}_{t1,0} = (\boldsymbol{k}_{t1} \times \boldsymbol{E}_{t1,0})/(\mu_0\omega)$。$\boldsymbol{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{E}_{t1,0} = 0$ なので三重積により

$$\boldsymbol{E}_{t1,0} \times \boldsymbol{H}_{t1,0} = \frac{|\boldsymbol{E}_{t1,0}|^2}{\mu_0\omega}\boldsymbol{k}_{t1}.$$

係数は正であり、光線は波数と平行である。したがって求める角は

$$\boxed{\phi_{t1}.}$$

[2.5] P 偏光の波数

$\boldsymbol{k}_{t2} = k(\sin\phi_{t2}, 0, \cos\phi_{t2})$、$\boldsymbol{E}_{t2,0} = (E_x, 0, E_z)$ と置く。$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{D} = 0$ と $D_x = \epsilon_n E_x$, $D_z = \epsilon_a E_z$ より

$$\epsilon_n \sin\phi_{t2} E_x + \epsilon_a \cos\phi_{t2} E_z = 0, \qquad \frac{E_z}{E_x} = -\frac{\epsilon_n}{\epsilon_a}\tan\phi_{t2}.$$

ここで $E_x \neq 0$ であり、$\cos\phi_{t2} > 0$ の透過枝を使った。[2.2] を x 成分に適用すると

$$\epsilon_n E_x = \frac{k^2}{\mu_0\omega^2}\left(\cos^2\phi_{t2} E_x - \sin\phi_{t2}\cos\phi_{t2} E_z\right).$$

上の比を代入し、正の平方根を採用して

$$\boxed{|\boldsymbol{k}_{t2}| = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_n\epsilon_a}{\epsilon_a\cos^2\phi_{t2} + \epsilon_n\sin^2\phi_{t2}}}.}$$

$\phi_{t2} = 0$ なら電場は x 方向で $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_n}$ となり、[2.3] に一致する。

[2.6] P 偏光の光線方向

$\boldsymbol{H}_{t2,0} = H_y \boldsymbol{e}_y$ であり、Maxwell の式から

$$H_y = \frac{k}{\mu_0\omega}\left(\cos\phi_{t2} E_x - \sin\phi_{t2} E_z\right).$$

$E_z/E_x \leq 0$ かつ $\cos\phi_{t2} > 0$ なので $H_y/E_x > 0$。したがって

$$\boldsymbol{E}_{t2,0} \times \boldsymbol{H}_{t2,0} = H_y(-E_z, 0, E_x), \qquad \tan\theta_{t2} = \frac{-E_z H_y}{E_x H_y}.$$

[2.5] の電場成分比を使えば

$$\boxed{\tan\theta_{t2} = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_a}\tan\phi_{t2}.}$$

$\epsilon_n > \epsilon_a$ かつ $\phi_{t2} > 0$ なら光線は位相法線より x 側へ傾く。$\epsilon_n = \epsilon_a$ の等方極限では二方向は一致する。