物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の運動方程式

電子の電荷は $-e$ なので、電場による力は $-e\boldsymbol{E}$ である。ポテンシャルの勾配を加えると、減衰のない運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{u}} = -\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{u}} V - e\boldsymbol{E} = -m\begin{pmatrix}\omega_\alpha^2 u_x \\ \omega_\alpha^2 u_y \\ \omega_\beta^2 u_z\end{pmatrix} - e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}.}$$

成分ごとには $m\ddot{u}_j + m\omega_j^2 u_j = -eE_j$ であり、$\omega_x = \omega_y = \omega_\alpha$, $\omega_z = \omega_\beta$ と置ける。

[1.2] 誘電率テンソル

定常解を $u_j(t) = u_{j,0}e^{-i\omega t}$ と置く。$\ddot{u}_j = -\omega^2 u_j$ だから [1.1] より

$$u_j = -\frac{e}{m(\omega_j^2 - \omega^2)}E_j.$$

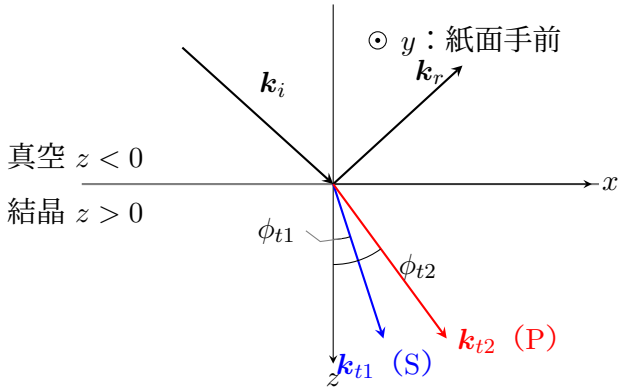
共振点 $\omega_j = \omega$ は問題の条件で除かれている。$\boldsymbol{P} = -\rho e\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$ に代入すると

$$\boxed{\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix}\epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\alpha^2 - \omega^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\alpha^2 - \omega^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 + \dfrac{\rho e^2}{m(\omega_\beta^2 - \omega^2)}\end{pmatrix}.}$$

電子密度を 0 にすると真空の $\epsilon_0\mathbf{I}$ に戻る。分母の符号は共振周波数との大小に依存し、[2] の $\epsilon_n > \epsilon_a > \epsilon_0$ は別途与えられた条件である。

[2] 座標と二つの透過波

原本図 1 に合わせ、境界を $z = 0$、結晶を $z > 0$ とする。x は右、z は図で下向き、y は紙面手前を向く。以下の角は z 軸から右側へ測り、透過波の k_z は正とする。



この図は進行方向の関係を示す模式図で、矢印の長さは波数の大きさを表さない。

[2.1] 境界に沿う位相の一致

境界 $z=0$ では各平面波の位相は $k_x x - \omega t$ となる。接線方向の電場・磁場の連続条件がすべての x, t で成り立つには、非零の入射・反射・透過振幅の位相が一致しなければならない。したがって

$$k_{i,x} = k_{r,x} = k_{t1,x} = k_{t2,x}.$$

図の斜入射の透過枝では $k_{tj,x} = |\boldsymbol{k}_{tj}| \sin\phi_{tj} > 0$ であり、垂直入射ではこの成分は零となる。位相一致から

$$\boxed{\sin\phi_{t1} = \frac{|\boldsymbol{k}_i|}{|\boldsymbol{k}_{t1}|}\sin\phi_i, \qquad \sin\phi_{t2} = \frac{|\boldsymbol{k}_i|}{|\boldsymbol{k}_{t2}|}\sin\phi_i.}$$

[2.2] 平面波の電場と電束密度

$e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ の共通因子を外すと、問題の Maxwell 方程式は

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = \mu_0\omega\boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H} = -\omega\boldsymbol{D}$$

となる。第一式を第二式に代入し、三重積を展開すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}) &= -\mu_0\omega^2\boldsymbol{D}\\ &= (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{k} - |\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}.\end{aligned}$$

ゆえに $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ を用いて

$$\boxed{\boldsymbol{D} = \frac{|\boldsymbol{k}|^2}{\mu_0\omega^2}\left[\boldsymbol{E} - (\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E})\boldsymbol{e}\right].}$$

この式から $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{D} = 0$ も直ちに分かる。異方性媒質では一般に $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = 0$ とは限らない。

[2.3] S 偏光の波数

S 偏光では $\boldsymbol{E} = E_y\boldsymbol{e}_y$ が入射面に垂直なので、$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{E} = 0$。一方、結晶中では $D_y = \epsilon_n E_y$ である。[2.2] の y 成分を非零の E_y で割ると

$$\epsilon_n = \frac{|\boldsymbol{k}_{t1}|^2}{\mu_0\omega^2}, \qquad \boxed{|\boldsymbol{k}_{t1}| = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_n}.}$$

[2.4] S 偏光の光線方向

Maxwell の式から $\boldsymbol{H}_{t1,0} = (\boldsymbol{k}_{t1} \times \boldsymbol{E}_{t1,0})/(\mu_0\omega)$。$\boldsymbol{k}_{t1} \cdot \boldsymbol{E}_{t1,0} = 0$ なので三重積により

$$\boldsymbol{E}_{t1,0} \times \boldsymbol{H}_{t1,0} = \frac{|\boldsymbol{E}_{t1,0}|^2}{\mu_0\omega}\boldsymbol{k}_{t1}.$$

係数は正であり、光線は波数と平行である。したがって求める角は

$$\boxed{\phi_{t1}.}$$

[2.5] P 偏光の波数

$\boldsymbol{k}_{t2} = k(\sin\phi_{t2}, 0, \cos\phi_{t2})$、$\boldsymbol{E}_{t2,0} = (E_x, 0, E_z)$ と置く。$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{D} = 0$ と $D_x = \epsilon_n E_x$, $D_z = \epsilon_a E_z$ より

$$\epsilon_n \sin\phi_{t2} E_x + \epsilon_a \cos\phi_{t2} E_z = 0, \qquad \frac{E_z}{E_x} = -\frac{\epsilon_n}{\epsilon_a}\tan\phi_{t2}.$$

ここで $E_x \neq 0$ であり、$\cos\phi_{t2} > 0$ の透過枝を使った。[2.2] を x 成分に適用すると

$$\epsilon_n E_x = \frac{k^2}{\mu_0\omega^2}\left(\cos^2\phi_{t2} E_x - \sin\phi_{t2}\cos\phi_{t2} E_z\right).$$

上の比を代入し、正の平方根を採用して

$$\boxed{|\boldsymbol{k}_{t2}| = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\epsilon_n\epsilon_a}{\epsilon_a\cos^2\phi_{t2} + \epsilon_n\sin^2\phi_{t2}}}.}$$

$\phi_{t2} = 0$ なら電場は x 方向で $k = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_n}$ となり、[2.3] に一致する。

[2.6] P 偏光の光線方向

$\boldsymbol{H}_{t2,0} = H_y \boldsymbol{e}_y$ であり、Maxwell の式から

$$H_y = \frac{k}{\mu_0\omega}\left(\cos\phi_{t2} E_x - \sin\phi_{t2} E_z\right).$$

$E_z/E_x \leq 0$ かつ $\cos\phi_{t2} > 0$ なので $H_y/E_x > 0$。したがって

$$\boldsymbol{E}_{t2,0} \times \boldsymbol{H}_{t2,0} = H_y(-E_z, 0, E_x), \qquad \tan\theta_{t2} = \frac{-E_z H_y}{E_x H_y}.$$

[2.5] の電場成分比を使えば

$$\boxed{\tan\theta_{t2} = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_a}\tan\phi_{t2}.}$$

$\epsilon_n > \epsilon_a$ かつ $\phi_{t2} > 0$ なら光線は位相法線より x 側へ傾く。$\epsilon_n = \epsilon_a$ の等方極限では二方向は一致する。