物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 左右の分子数

矢印の総数と、左端から右端までの変位は、それぞれ

$$N_+ + N_- = N, \qquad a(N_+ - N_-) = L$$

を満たす。二式を加減して

$$\boxed{N_+ = \frac{1}{2}\left(N + \frac{L}{a}\right)}, \qquad \boxed{N_- = \frac{1}{2}\left(N - \frac{L}{a}\right)}.$$

N と L/a がともに偶数なので、これらは整数である。

[1.2] 微視的状態数

N 本の矢印の位置から右向きの N_+ 本を選べば、残りは左向きに決まる。したがって

$$\boxed{W = \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}(N + L/a)\right]!\left[\frac{1}{2}(N - L/a)\right]!}}.$$

[1.3] エントロピー

熱力学極限で $0 < L/(Na) < 1$ を固定すると $N_\pm$ も大きい。Stirling の公式を三つの階乗に用いる。$N = N_+ + N_-$ により、$-n$ の項は打ち消し合うから

$$S = k_\mathrm{B} \log W \simeq k_\mathrm{B}\left(N \log N - N_+ \log N_+ - N_- \log N_-\right).$$

無次元伸長 $u = L/(Na)$ をここで定義し、[1.1] の $N_\pm = N(1 \pm u)/2$ を代入すると

$$\boxed{S \simeq N k_\mathrm{B}\left[\log 2 - \frac{1+u}{2}\log(1+u) - \frac{1-u}{2}\log(1-u)\right], \qquad u = \frac{L}{Na}.}$$

$u = 0$ では $S \simeq N k_\mathrm{B} \log 2$。伸ばすほど左右の選択肢が減り、エントロピーは下がる。

[1.4] 張力と小伸長極限

$U = 0$ は L に依存しないので、$F = -TS$ と問題文の張力の定義から $X = -T(\partial S/\partial L)_T$。上式を微分すると

$$\frac{\partial S}{\partial L} = \frac{k_\mathrm{B}}{2a}\log\frac{1-u}{1+u}, \qquad \boxed{X = \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\log\frac{1+u}{1-u} = \frac{k_\mathrm{B}T}{2a}\log\frac{Na+L}{Na-L}.}$$

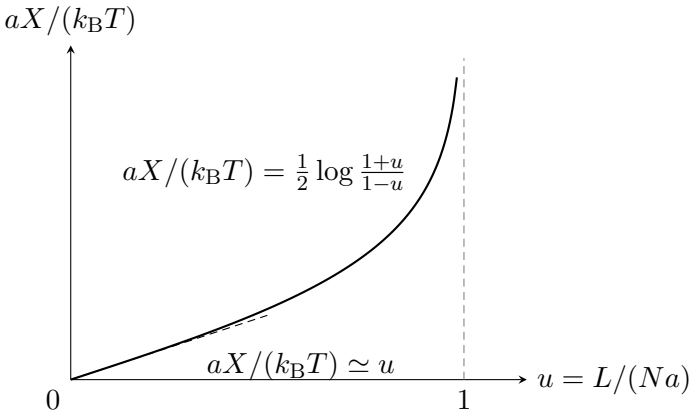
$u \ll 1$ では $\log[(1+u)/(1-u)] = 2u + O(u^3)$ なので

$$\boxed{X = \frac{k_\mathrm{B}T}{Na^2}L + O\left(\frac{k_\mathrm{B}T}{a}u^3\right).}$$

張力が正になるのは、伸長によって減ったエントロピーを回復しようとするためである。

[1.5] 張力の概形

横軸を $u = L/(Na)$、縦軸を $aX/(k_\mathrm{B}T)$ とした概形を示す。どちらも無次元である。



実際、$\mathrm{d}X/\mathrm{d}L = k_\mathrm{B}T/[Na^2(1-u^2)] > 0$ で単調増加し、$L \to Na - 0$ で対数的に発散する。原点での接線は [1.4] の線形近似である。

[1.6] 断熱伸長の温度変化率

内部自由度を加えた後の $F(T, L)$ には $\mathrm{d}F = -S\,\mathrm{d}T + X\,\mathrm{d}L$ が成り立つ。混合微分の交換から、問題文の Maxwell 関係 $(\partial S/\partial L)_T = -(\partial X/\partial T)_L$ を得る。また、L 一定の熱容量の定義は $C_L = T(\partial S/\partial T)_L$ である。よって

$$\mathrm{d}S = \frac{C_L}{T}\,\mathrm{d}T - \left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L \mathrm{d}L.$$

断熱変化では $\mathrm{d}S = 0$ だから、求める一般式は

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{T}{C_L}\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L.}$$

[1.7] 小伸長での断熱勾配

$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S + X\,\mathrm{d}L$ を L 一定で用いると、$U = Nrk_\mathrm{B}T$ から $C_L = (\partial U/\partial T)_L = Nrk_\mathrm{B}$。さらに [1.4] の厳密式を T で微分して

$$\left(\frac{\partial X}{\partial T}\right)_L = \frac{k_\mathrm{B}}{2a}\log\frac{1+u}{1-u}.$$

これらを [1.6] に代入したのち、$u \ll 1$ で展開すると

$$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_S = \frac{T}{2Nra}\log\frac{1+u}{1-u} = \boxed{\frac{TL}{N^2ra^2} + O\left(\frac{T}{Nra}u^3\right).}$$

$C_L > 0$ では伸長時の温度上昇を表し、$L \to 0$ で勾配は 0 に近づく。

[2.1] 3 次元鎖の分配関数

端点 B を力 X の向きに z だけ動かすと外力は $X\,\mathrm{d}z$ の仕事をするため、力のポテンシャルエネルギーは $-Xz = -Xa\sum_{i=1}^{N}\cos\theta_i$ である。各矢印の向きの立体角要素は $\mathrm{d}\Omega_i = \sin\theta_i\,\mathrm{d}\theta_i\,\mathrm{d}\phi_i$。分子同士の相互作用がないので、$\beta = 1/(k_{\mathrm{B}}T)$ と置けば角度積分は積に分かれる。

$$
\begin{aligned}
Z &= \prod_{i=1}^{N}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi_i\int_0^{\pi}\sin\theta_i\,\mathrm{d}\theta_i\,e^{\beta Xa\cos\theta_i} \\
&= \left[2\pi\int_{-1}^{1}e^{\beta Xaq}\,\mathrm{d}q\right]^N = \boxed{\left[4\pi\frac{\sinh y}{y}\right]^N}, \qquad y = \frac{Xa}{k_{\mathrm{B}}T}.
\end{aligned}
$$

$y\to 0$ では $\sinh y/y\to 1$ なので、指定された $Z\to(4\pi)^N$ に一致する。

[2.2] 弱い外力での伸長と張力

分配関数の積分で端点座標 z に対応する重みは $e^{\beta Xz}$ である。従って $\partial_X Z = \beta Z\langle z\rangle$、すなわち $k_{\mathrm{B}}T\partial_X\log Z = \langle z\rangle$ となる。大きな N ではこの平均を巨視的状態量 L として

$$
L = k_{\mathrm{B}}T\left(\frac{\partial\log Z}{\partial X}\right)_T = Na\left(\coth y - \frac{1}{y}\right).
$$

$y\ll 1$ では $\coth y - 1/y = y/3 + O(y^3)$。したがって

$$
L = \frac{Na^2}{3k_{\mathrm{B}}T}X + O(Nay^3), \qquad \boxed{X = \frac{3k_{\mathrm{B}}T}{Na^2}L + O\left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{a}\left(\frac{L}{Na}\right)^3\right)}.
$$

零力では等方性から $\langle\cos\theta\rangle_0 = 0$、$\langle\cos^2\theta\rangle_0 = 1/3$ である。Boltzmann 因子を y の一次まで展開すれば $\langle\cos\theta\rangle = y\langle\cos^2\theta\rangle_0 + O(y^3) = y/3 + O(y^3)$ となる。このため [1.4] の 1 次元模型に比べて線形係数が 3 倍になる。