物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 調和振動子の幅

$V_0 = 0$ のハミルトニアンを $\hat{H}_0$ と書く。式 (2) の Gaussian を微分すると

$$\psi_0''(x) = (\alpha^2 x^2 - \alpha)\psi_0(x).$$

これを $\hat{H}_0\psi_0 = E_0\psi_0$ に代入し、x^2 の係数を比較すると

$$-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} = 0.$$

$\alpha > 0$ は波動関数が無限遠で減衰する条件だから、

$$\boxed{\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}}.$$

このとき定数項も $E_0 = \hbar^2\alpha/(2m) = \hbar\omega/2$ となる。

[1.2] 小さい段差によるエネルギーの変化

段差の摂動は $x < 0$ で V_0、$x \geq 0$ で 0 である。有限の V_0 に対する基底エネルギーを $E_0(V_0)$ と書く。非縮退基底状態の一次補正は、左半直線に粒子を見いだす確率を V_0 に掛けたものになる。$|\psi_0(x)|^2$ は偶関数で規格化されているため、この確率は $1/2$。したがって

$$\boxed{E_0(V_0) - E_0 = V_0 \int_{-\infty}^{0} |\psi_0(x)|^2 \,\mathrm{d}x + O(V_0^2) = \frac{V_0}{2} + O\left(\frac{V_0^2}{\hbar\omega}\right)}.$$

ここでは $V_0 \ll \hbar\omega$ とし、二次以上の項を省いた。

[2.1] 無限壁と許される固有関数

$V_0 \to \infty$ では、有限のエネルギーをもつ束縛状態は $x < 0$ に確率振幅をもてない。無限壁の境界条件は $\phi_k(0) = 0$ である。$x > 0$ の Schrödinger 方程式は $\hat{H}_0$ と同じである。正の半直線で減衰する解を $x < 0$ へ $-\phi_k(-x)$ として奇拡張すると、$\phi_k(0) = 0$ により原点で関数値がつながり、左右の導関数も一致する。調和振動子のポテンシャルは偶関数なので、拡張した関数は両半直線で同じ固有値の Schrödinger 方程式を満たし、全直線の奇固有関数となる。問題文のパリティ条件によれば、それは奇数番号の ψ_{2k+1} に比例する。負の半直線を 0 とし、正の半直線で ψ_{2k+1} を定数倍したものが式 (4) になる。

[2.2] 規格化とエネルギー

ψ_{2k+1} は奇関数で全直線上で規格化されている。その確率密度は偶関数だから

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x.$$

式 (4) の規格化条件 $N^2 \int_0^\infty |\psi_{2k+1}|^2 \,\mathrm{d}x = 1$ と $N > 0$ より

$$\boxed{N = \sqrt{2}}, \qquad \boxed{\epsilon_k = E_{2k+1} = \left(2k + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega} \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

特に、無限壁の基底状態は全直線振動子の第 1 励起状態の右半分である。

[3.1] 壁を取り去った直後の展開

ポテンシャルを瞬間的に変えても、その瞬間の波動関数は変わらない。したがって $\Psi(x, 0) = \phi_0(x)$ を新しいハミルトニアン $\hat{H}_0$ の完全な固有関数系で展開し、係数は $c_j = \langle \psi_j | \phi_0 \rangle$ とする。c_0 は実で正であり、式 (2)、(3) と $N = \sqrt{2}$ を使うと

$$\begin{aligned} c_0 &= \sqrt{2}\int_0^\infty \psi_0(x)\psi_1(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}.$$

ここで用いた積分は $u = \alpha x^2$ と置けば直ちに得られる。

[3.2] 壁を取り去った後のエネルギー期待値

$t > 0$ では $\hat{H}_0$ が時間に依存しないため、エネルギー期待値は時刻 0 の値に等しい。初期波動関数は原点で 0 となるが、導関数には跳びがある。そこで、エネルギーを運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの積分で評価する。各半直線で部分積分すると

$$-\int_0^\infty \psi_1^* \psi_1''\,dx = -[\psi_1^*\psi_1']_0^\infty + \int_0^\infty |\psi_1'|^2\,dx = \int_0^\infty |\psi_1'|^2\,dx \tag{1}$$

となる。原点では $\psi_1(0) = 0$、無限遠では波動関数が減衰するので境界項は消える。$\phi_0 = \sqrt{2}\psi_1$ $(x > 0)$ だから

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\hbar^2}{2m}|\phi_0'(x)|^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2}|\phi_0(x)|^2\right]\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^\infty \left[\frac{\hbar^2}{2m}|\psi_1'(x)|^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2}|\psi_1(x)|^2\right]\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

角括弧の中は偶関数なので、最後の式は全直線上の ψ_1 のエネルギー期待値である。したがって

$$\boxed{E(t) = E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad (t > 0)}.$$

この値は壁を取り去った後の $\hat{H}_0$ に関する期待値であり、ϕ_0 自体が $\hat{H}_0$ の固有状態だという意味ではない。

[3.3] 一周期後の波動関数

急変後の展開の各成分は、$\hat{H}_0$ の固有エネルギー $E_j = (j+1/2)\hbar\omega$ に従い

$$\Psi(x,t) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j e^{-i(j+1/2)\omega t}\psi_j(x)$$

と進む。$t = 2\pi/\omega$ では全ての j で位相が $e^{-i(2j+1)\pi} = -1$ となるので、$\Psi(x, 2\pi/\omega) = -\phi_0(x)$。式 (3) と $\alpha = m\omega/\hbar$ を使って明示すると

$$\boxed{\Psi\left(x, \frac{2\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ -2\sqrt{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2} & (x \geq 0). \end{cases}}$$

位相 -1 は確率密度を変えないが、波動関数の値としては残る。

[3.4] 半周期後の波動関数

$t = \pi/\omega$ では各成分の位相は $e^{-i(j+1/2)\pi} = -i(-1)^j$ となる。問題文で与えられたパリティ $\psi_j(-x) = (-1)^j\psi_j(x)$ を項ごとに使うと

$$\Psi\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right) = -i\sum_{j=0}^{\infty} c_j\psi_j(-x) = -i\phi_0(-x).$$

右半直線にあった初期波動関数は左半直線へ鏡映される。ψ_1 が奇関数であることにも注意して書き下すと

$$\boxed{\Psi\left(x, \frac{\pi}{\omega}\right) = \begin{cases} 2i\sqrt{\alpha}\left(\dfrac{\alpha}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\alpha x^2/2} & (x < 0), \\ 0 & (x \geq 0). \end{cases}}$$

原点ではどちらの枝も 0 であり、鏡映と位相因子は規格化を保つ。