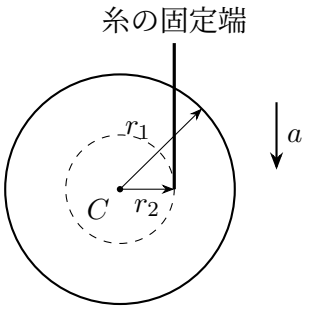
物理工学専攻院試解答集
2026 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 糸で落下する剛体

図 1 の内側の円盤は厚さを無視するので、剛体の質量は外側の 2 枚に分布する。一方、糸は半径 r_2 の内側の円盤に接している。この二つの半径の役割を区別する。



外円盤の半径と糸のトルク腕

[1.1] 中心軸まわりの慣性モーメント

外側の 2 枚は同じ厚さ d_1 と同じ密度を持つため、1 枚の質量は $M/2$ である。1 枚について半径 s から $s+\mathrm{d}s$ の環の質量は、面密度を $(M/2)/(\pi r_1^2)$ として

$$\mathrm{d}m = \frac{M/2}{\pi r_1^2}\, 2\pi s\, \mathrm{d}s = \frac{M}{r_1^2} s\, \mathrm{d}s.$$

よって 1 枚の中心軸まわりの慣性モーメントは $\int_0^{r_1} s^2\, \mathrm{d}m = Mr_1^2/4$。2 枚を足すと

$$\boxed{I_C = \frac{1}{2} M r_1^2}.$$

厚さを無視する内側の円盤には質量を割り当てない。d_1 は面密度を通じて M に含まれている。

[1.2] 並進と回転の運動方程式

並進の正方向を鉛直下向き、回転の正方向を糸がほどける向きに選ぶ。重力と糸の張力による並進の式は

$$\boxed{Ma = Mg - T}.$$

糸の張力は中心軸から距離 r_2 で作用するので、角速度のこの正方向の成分を ω とすれば

$$\boxed{I_C \dot{\omega} = T r_2}.$$

糸が滑らないため、糸のほどけた長さは重心の下降距離に等しい。これを時間で二度微分すると $\boxed{a = r_2 \dot{\omega}}$ となる。

[1.3] 重心の加速度

回転の式と滑りなしの条件から $T = I_C a / r_2^2$。これを並進の式に代入し、[1.1] の I_C を使うと

$$\left(M + \frac{M r_1^2}{2 r_2^2}\right) a = Mg, \qquad \boxed{a = \frac{2 r_2^2}{r_1^2 + 2 r_2^2}\, g}.$$

$r_1, r_2, g > 0$ なら $0 < a < g$ であり、$T = M(g - a) > 0$ とも整合する。

[2] 磁場中の帯電球殻

位置 $\boldsymbol{r}$ は球殻の重心から表面上の点へ向かう。電荷は球殻とともに回るので、各表面素片の電荷に働く磁気力を求め、そのトルクを球面全体で積分する。外部磁場 $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ だけを用いる。

[2.1] 表面上の速度

角速度 $\boldsymbol{\omega}$ で剛体回転する点の速度は、中心が静止しているため

$$\boxed{\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}}.$$

[2.2] 微小面積に働く力

面積 $\mathrm{d}S$ の電荷は $\sigma\, \mathrm{d}S$。磁場によるローレンツ力は、問題の三重積公式に $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B}$ を代入して

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{F} = \sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B} = \sigma\, \mathrm{d}S\, [(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{r} - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{\omega}]}.$$

σ は符号付きの面電荷密度なので、負電荷では力の向きが反転する。

[2.3] 微小トルク

原点まわりのトルクは $\boldsymbol{r} \times \mathrm{d}\boldsymbol{F}$。力のうち $\boldsymbol{r}$ と平行な項は寄与しない。したがって

$$\boxed{\mathrm{d}\boldsymbol{N} = -\sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{\omega}) = \sigma\, \mathrm{d}S\, (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})}.$$

[2.4] 球面全体からのトルク

球面の回転・反射対称性［問題の式 (1)］により、$\int_{\Omega_R} x^2\, \mathrm{d}S$, $\int_{\Omega_R} y^2\, \mathrm{d}S$, $\int_{\Omega_R} z^2\, \mathrm{d}S$ は等しく、異なる座標の積の積分はゼロである。$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ と球面積 $4\pi R^2$ から

$$\int_{\Omega_R} x^2\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega_R} y^2\, \mathrm{d}S = \int_{\Omega_R} z^2\, \mathrm{d}S = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

よって $\int_{\Omega_R} (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{r}\, \mathrm{d}S = (4\pi R^4/3)\boldsymbol{B}$。$\boldsymbol{\omega}$ は球面上の位置に依らないので [2.3] を積分して

$$\boldsymbol{N} = \frac{4\pi\sigma R^4}{3}\, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{B}.$$

$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ を代入した答えは

$$\boxed{N_x = \frac{4\pi\sigma B R^4}{3}\omega_y, \qquad N_y = -\frac{4\pi\sigma B R^4}{3}\omega_x, \qquad N_z = 0}.$$

[2.5] 各軸の慣性モーメント

面質量密度 ρ について x 軸からの距離の二乗は y^2+z^2。したがって

$$I_x = \rho \int_{\Omega_R} (y^2+z^2)\,\mathrm{d}S = \frac{8\pi\rho R^4}{3}.$$

同じ球対称性を y, z 軸にも用いると

$$\boxed{I_x = I_y = I_z = I = \frac{8\pi\rho R^4}{3}}.$$

[2.6] 角速度と歳差の向き

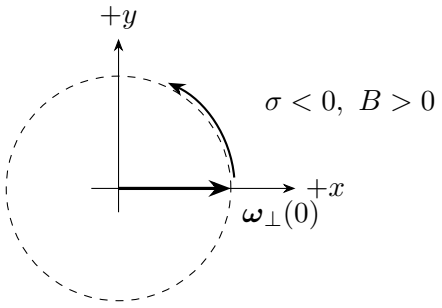
球殻の慣性モーメントはどの軸でも I なので、角運動量は $I\boldsymbol{\omega}$ であり、回転運動方程式は $I\dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{N}$。[2.4] と [2.5] を代入して

$$\dot{\omega}_x = \frac{\sigma B}{2\rho}\omega_y, \qquad \dot{\omega}_y = -\frac{\sigma B}{2\rho}\omega_x, \qquad \dot{\omega}_z = 0.$$

初期条件は $\omega_x(0) = \omega_0 \sin\theta$, $\omega_y(0) = 0$, $\omega_z(0) = \omega_0\cos\theta$。最初の二式から $\ddot{\omega}_x = -(\sigma B/2\rho)^2\omega_x$ となり、初期値を満たす解は

$$\boxed{\begin{aligned}
&\omega_x(t) = \omega_0 \sin\theta \cos\left(\frac{\sigma B}{2\rho}t\right), \\
&\omega_y(t) = -\omega_0 \sin\theta \sin\left(\frac{\sigma B}{2\rho}t\right), \\
&\omega_z(t) = \omega_0\cos\theta.
\end{aligned}}$$

横成分を $\boldsymbol{\omega}_\perp = (\omega_x, \omega_y, 0)$ と書く。その大きさは $\omega_0\sin\theta$ のまま xy 平面を回り、ω_z も一定である。したがって回転軸は z 軸となす角 θ を保って歳差する。



$+z$ 側から見た横成分

$\sigma < 0, B > 0$ なら、初期時刻の $\dot{\omega}_y(0) = -\sigma B\omega_0\sin\theta/(2\rho) > 0$。すなわち横成分は $+x$ から $+y$ に向かうので、$+z$ 側から見た歳差の向きは反時計回りである。