物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

質点の質量を m、自然角周波数を ω_0、粘性抵抗係数を ζ とする。バネによる復元力は $-m\omega_0^2 x$ であるから、両部分で用いる運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = f(t). \tag{1}$$

位置の正方向は自然長の位置を原点とする x 軸の正方向とする。

[1.1] 周期外力に対する定常解

この節では周期外力 $f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$（$\Omega > 0$）を加える。外力と同じ時間因子をもつ定常解 $x(t) = X_0 e^{i\Omega t}$ を式(1)に代入する。$\dot{x} = i\Omega x$、$\ddot{x} = -\Omega^2 x$ なので

$$\{m(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\zeta\Omega\} X_0 = F_0.$$

$\zeta > 0$ かつ $\Omega > 0$ で分母はゼロにならない。したがって、過渡項が減衰した後の複素表示は

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0 e^{i\Omega t}}{m(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\zeta\Omega}}. \tag{2}$$

実際の位置が必要なら、この複素式の実部を取る。

[1.2] 応答関数の実部と虚部

式(2)を $f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ で割り、分母の共役複素数を掛ける。$D(\Omega) = m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \zeta^2\Omega^2 > 0$ とおくと

$$\varepsilon = \frac{m(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\zeta\Omega}{D(\Omega)}, \qquad \boxed{\varepsilon' = \frac{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}{D(\Omega)}, \quad \varepsilon'' = -\frac{\zeta\Omega}{D(\Omega)}}. \tag{3}$$

$e^{i\Omega t}$ を選んだため減衰項は分母で $+i\zeta\Omega$ となり、$\Omega > 0$ で $\varepsilon'' < 0$ である。固有角周波数 $\Omega = \omega_0$ では $\varepsilon' = 0$、$-\varepsilon'' = 1/(\zeta\omega_0)$ となる。

[1.3] 弱減衰・近共鳴での概形と極値

$\Delta = \Omega - \omega_0$、$\gamma = \zeta/(2m)$ とおく。弱減衰 $\gamma \ll \omega_0$ かつ $|\Delta| \ll \omega_0$ の範囲では $\omega_0^2 - \Omega^2 \simeq -2\omega_0\Delta$、$\zeta\Omega \simeq \zeta\omega_0$ だから

$$\varepsilon' \simeq -\frac{\Delta}{2m\omega_0(\Delta^2 + \gamma^2)}, \qquad -\varepsilon'' \simeq \frac{\gamma}{2m\omega_0(\Delta^2 + \gamma^2)}. \tag{4}$$

第一式を Δ で微分すると極値条件は $\Delta^2 = \gamma^2$ である。よって ε' の正の極大は $\Omega \simeq \omega_0 - \gamma$、負の極小は $\Omega \simeq \omega_0 + \gamma$ にある。第二式は $\Delta = 0$ で極大となる。下図は横軸を Δ/γ とする近共鳴領域の概形であり、縦軸は両関数に共通の $A = 1/(2m\omega_0\gamma)$ で割っている。

[2.1] 平均二乗変位

ここから x, f は実数であり、角括弧は定常状態のアンサンブル平均を表す。問題で与えられた平均零 $\langle f \rangle = 0$ と同時刻の $x(t), f(t)$ の無相関を用いる。式(1)に $x(t)$ を掛けて平均すると

$$m\langle x\ddot{x}\rangle + \zeta\langle x\dot{x}\rangle + m\omega_0^2\langle x^2\rangle = \langle xf\rangle = \langle x\rangle\langle f\rangle = 0.$$

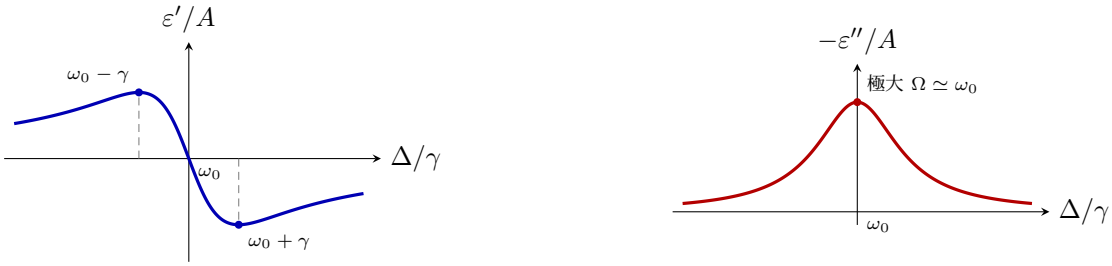


Figure 1: 近共鳴の ε' と $-\varepsilon''$。左右の横軸の原点は $\Omega=\omega_0$ に対応する。

定常状態では $d\langle x^2\rangle/dt=0$ より $\langle x\dot{x}\rangle=0$。また $d\langle x\dot{x}\rangle/dt=\langle\dot{x}^2+x\ddot{x}\rangle=0$ より $\langle x\ddot{x}\rangle=-\langle\dot{x}^2\rangle=-\overline{v^2}$ とする。ここで $v=\dot{x}$、$\overline{v^2}$ はその二乗の定常平均である。したがって

$$\boxed{\langle x(t)^2\rangle=\frac{\overline{v^2}}{\omega_0^2}}. \tag{5}$$

[2.2] フーリエ変換とパワースペクトル

原本の無限時間表示 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$ と $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ を形式的に用いると、時間微分のフーリエ変換は $i\omega X$、二階微分は $-\omega^2X$ となる。定常雑音のスペクトルは、長さ $T>0$ の観測窓で $X_T(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$ と $F_T(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ を定め、$I_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\langle|X_T(\omega)|^2\rangle/T$、$I_f(\omega)=\lim_{T\to\infty}\langle|F_T(\omega)|^2\rangle/T$ と読む。有限窓では部分積分により、$D(\omega)=m(\omega_0^2-\omega^2)+i\zeta\omega$ として

$$D(\omega)X_T(\omega)=F_T(\omega)-\left[e^{-i\omega t}\{m\dot{x}(t)+(\zeta+im\omega)x(t)\}\right]_{-T/2}^{T/2}.$$

定常な $x,\dot{x}$ の二乗平均が有限なら、角括弧内の端点項の二乗平均は T に依存せず有界である。$\langle|F_T|^2\rangle=O(T)$ のとき、端点項と F_T の交差項も Cauchy–Schwarz の不等式で $O(\sqrt{T})$ だから、T で割るスペクトルの極限には寄与しない。したがって、形式的な無限時間の関係と、それが表す定常スペクトルは

$$\boxed{X(\omega)=\frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2-\omega^2)+i\zeta\omega}},\qquad \boxed{I_x(\omega)=\frac{I_f(\omega)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\zeta^2\omega^2}}. \tag{6}$$

後の白色入力では $\langle|F_T|^2\rangle=IT$ となり、上の条件を満たす。

[2.3] 変位の相関関数

白色揺動力の相関 $\langle f(t)f(t+\tau)\rangle=I\delta(\tau)\,(I>0)$ をフーリエ変換すると、$I_f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(t)f(t+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}\,d\tau=I$ となる。先に定めた減衰率 $\gamma=\zeta/(2m)$ を再び用い、問題の条件 $\gamma<\omega_0$ のもとで $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}>0$ とおけば

$$I_x(\omega)=\frac{I/m^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}. \tag{7}$$

逆変換を具体的に確認するため、$g(\tau)=e^{-\gamma|\tau|}\{\cos(\omega_1\tau)+(\gamma/\omega_1)\sin(\omega_1|\tau|)\}$ とおく。g は偶関数であり、$\gamma>0$ を用いた指数・三角関数の積分から

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau=2\int_0^{\infty}e^{-\gamma\tau}\left(\cos\omega_1\tau+\frac{\gamma}{\omega_1}\sin\omega_1\tau\right)\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{4\gamma\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}.$$

原本の逆変換 $C_x(\tau)=(2\pi)^{-1}\int I_x(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega$ と式(7)を照合し、$4m^2\gamma\omega_0^2=2\zeta m\omega_0^2$ を使うと

$$\boxed{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\frac{I}{2\zeta m\omega_0^2}e^{-\zeta|\tau|/(2m)}\left[\cos(\omega_1\tau)+\frac{\zeta}{2m\omega_1}\sin(\omega_1|\tau|)\right]}. \tag{8}$$

相関は τ の偶関数で、$|\tau|\to\infty$ でゼロに減衰する。$\tau=0$ では括弧が 1 となる。

[2.4] 揺動力の強さと平均二乗速度

式(8)に $\tau = 0$ を入れると $\langle x^2 \rangle = I/(2\zeta m \omega_0^2)$。これを式(5)と比較し、$\omega_0 > 0$ を用いて

$$\boxed{I = 2\zeta m \, \overline{v^2}}. \tag{9}$$

両辺の次元は「力の二乗 × 時間」で一致する。

物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1] 障壁より低いエネルギー $0 < \mathcal{E} < V_0$

原題の A は左から入射する波の振幅、B は反射波、E は右へ透過する波の振幅である。障壁の左右でポテンシャルは同じなので両側の進行波数は k、障壁内の減衰定数は γ である。

[1.1] $x = -a$ の接続

有限の段差では波動関数とその一階導関数が連続する。左側の $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ と内部の $Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ を $x = -a$ に代入して

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-\gamma a} + De^{\gamma a}, \tag{1}$$

$$ik\big(Ae^{-ika} - Be^{ika}\big) = \gamma\big(Ce^{-\gamma a} - De^{\gamma a}\big). \tag{2}$$

この二式が求める関係である。

[1.2] $x = a$ の接続

内部解と右側の Ee^{ikx} に同じ条件を課すと

$$Ce^{\gamma a} + De^{-\gamma a} = Ee^{ika}, \tag{3}$$

$$\gamma\big(Ce^{\gamma a} - De^{-\gamma a}\big) = ikEe^{ika}. \tag{4}$$

これが残る二式である。以下ではこれらを使って A/E と B/E を得る。

[1.3] 透過率 T_1

式(3), (4) を加減すると

$$Ce^{\gamma a} = \frac{Ee^{ika}}{2}\left(1 + \frac{ik}{\gamma}\right), \qquad De^{-\gamma a} = \frac{Ee^{ika}}{2}\left(1 - \frac{ik}{\gamma}\right).$$

これを式(1), (2) に代入し、二式の和と差を取る。反射波については原題の式 (3) に一致する

$$\begin{aligned}\frac{B}{E} &= \frac{(ik-\gamma)(ik+\gamma)}{4ik\gamma}e^{-2\gamma a} - \frac{(ik+\gamma)(ik-\gamma)}{4ik\gamma}e^{2\gamma a} \\ &= -i\frac{k^2+\gamma^2}{2k\gamma}\sinh(2\gamma a).\end{aligned} \tag{5}$$

同じ計算で

$$\frac{A}{E} = e^{2ika}\left[\cosh(2\gamma a) + i\frac{\gamma^2 - k^2}{2k\gamma}\sinh(2\gamma a)\right]. \tag{6}$$

左右の波数が等しいため、入射・透過確率流の比は $T_1 = |E/A|^2$ である。式(6) の絶対値を取って $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を使えば

$$\boxed{T_1 = \left[1 + \frac{(k^2+\gamma^2)^2}{4k^2\gamma^2}\sinh^2(2\gamma a)\right]^{-1}}. \tag{7}$$

実際、式(5)から $|B/A|^2 = |B/E|^2 T_1$ となり、式(7)は反射率と透過率の和が 1 であることとも一致する。

[1.4] $\gamma/k \ll 1$ かつ $a\gamma \ll 1$

$\sinh(2\gamma a) = 2\gamma a + O((\gamma a)^3)$ であり、$(k^2+\gamma^2)^2/k^4 = 1 + O((\gamma/k)^2)$ である。式(7) の角括弧内の増分は、相対誤差 $O((\gamma/k)^2 + (a\gamma)^2)$ で k^2a^2 となる。従って

$$\boxed{T_1 \simeq \frac{1}{1+k^2a^2}} \qquad (\gamma/k \ll 1,\ a\gamma \ll 1).$$

ここでは ka の大小は指定されておらず、この因子をさらに展開しない。

[1.5] $a\gamma \gg 1$

$\sinh^2(2\gamma a) \simeq e^{4\gamma a}/4$ を式(7) に入れる。指数項が支配的になるので

$$\boxed{T_1 \simeq \frac{16k^2\gamma^2}{(k^2+\gamma^2)^2} e^{-4\gamma a}} \qquad (a\gamma \gg 1).$$

指数 $4\gamma a$ は障壁の幅 $2a$ を確率（振幅二乗）で評価した結果である。

[2] 障壁より高いエネルギー $\mathcal{E} > V_0$

[2.1] 透過率 $T_2(\mathcal{E})$

障壁の内部も進行波となり、その波数は $q = \sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}/\hbar$ である。両境界を連続につないで得た式(7)で $\gamma = iq$ と置いてもよい。$\sinh(2iqa) = i\sin(2qa)$ と $k^2 - q^2 = 2mV_0/\hbar^2$ から

$$\boxed{T_2(\mathcal{E}) = \left[1 + \frac{V_0^2}{4\mathcal{E}(\mathcal{E}-V_0)}\sin^2\left(\frac{2a\sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}}{\hbar}\right)\right]^{-1}}, \qquad \mathcal{E} > V_0. \tag{8}$$

[2.2] 概形と極大

式(8) の角括弧内で正弦二乗以外の因子は正である。従って $T_2 \le 1$ であり、全ての透過率 1 の極大は

$$\boxed{\frac{2a\sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}}{\hbar} = n\pi \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{E} = V_0 + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

これら以外に局所極大もない。$z = 2aq$、$\beta = 8ma^2V_0/\hbar^2 > 0$ と置くと、逆透過率の正の増分は

$$T_2^{-1} - 1 = \frac{\beta^2 \sin^2 z}{4z^2(z^2+\beta)}. \tag{10}$$

$0 < z < \pi$ では $\sin z/z$ も $1/(z^2+\beta)$ も減少するため、T_2 に内部の極大はない。$n\pi < z < (n+1)\pi$（$n \geq 1$）では、この正の増分の対数微分の半分は

$$h(z) = \cot z - \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+\beta}, \qquad h'(z) = -\csc^2 z + \frac{1}{z^2} + \frac{z^2-\beta}{(z^2+\beta)^2} < -1 + \frac{2}{\pi^2} < 0. \tag{11}$$

h は区間の左端で $+\infty$、右端で $-\infty$ へ向かうので、零点は一つだけである。その点は逆透過率の極大、すなわち T_2 の谷である。従って共鳴点以外に局所極大はない。

$n = 0$ は $\mathcal{E} = V_0$ であり、指定された $\mathcal{E} > V_0$ の範囲外である。境界の片側極限は $\sin z \sim z$ から

$$\lim_{\mathcal{E} \downarrow V_0} T_2 = \left(1 + \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}\right)^{-1}.$$

また $\mathcal{E} \gg V_0$ では振動する項の係数が $O(V_0^2/\mathcal{E}^2)$ となるため、$T_2 \to 1$ である。つまり共鳴の谷も高エネルギーでは 1 へ近づく。

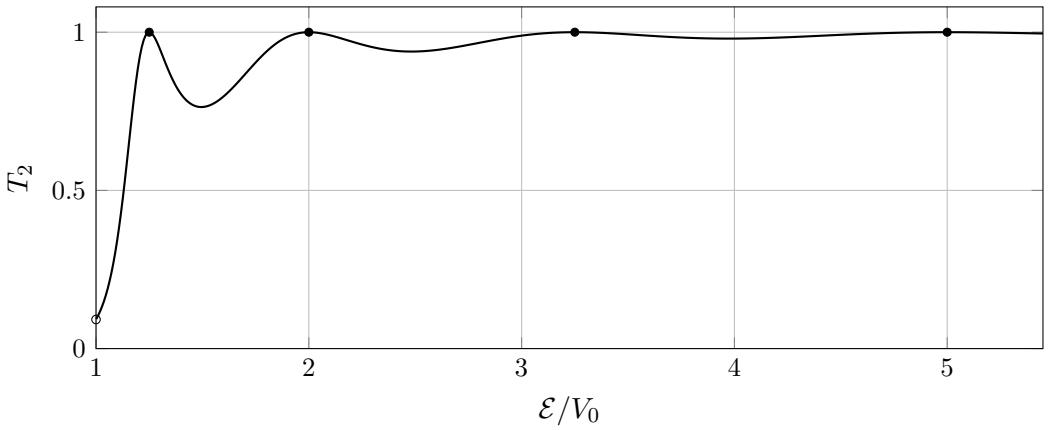


Figure 1: $2a\sqrt{2mV_0}/\hbar = 2\pi$ と選んだ場合の式(8) の概形。白丸は $\mathcal{E} = V_0$ の片側極限で、定義域には含まれない。黒点は透過率 1 の共鳴である。

図 1は障壁の幅を一例に固定している。一般の幅ではピークの横位置は式(9) に従う。

[3] 右側が $V(x) = -V_1$ の場合

[3.1] 透過率 T_3 と反射率 R_3

$0 < \mathcal{E} < V_0$、$V_1 > 0$ の範囲を保つ。左側と障壁内の解は [1] と同じで、右側の透過波は Ee^{ik_1x} と書く。$k_1 = \sqrt{2m(\mathcal{E}+V_1)}/\hbar$ である。右境界 $x = a$ では $\psi(a) = Ee^{ik_1a}$、$\psi'(a) = ik_1Ee^{ik_1a}$。障壁内では任意の点 x で

$$\psi(x) = \psi(a)\cosh[\gamma(x-a)] + \frac{\psi'(a)}{\gamma}\sinh[\gamma(x-a)],$$
$$\psi'(x) = \gamma\psi(a)\sinh[\gamma(x-a)] + \psi'(a)\cosh[\gamma(x-a)].$$

この二式に $x = -a$ を代入して右境界の値を幅 $2a$ だけ左境界まで運ぶと

$$\psi(-a) = Ee^{ik_1a}\left[\cosh(2\gamma a) - i\frac{k_1}{\gamma}\sinh(2\gamma a)\right],$$
$$\psi'(-a) = Ee^{ik_1a}\left[-\gamma\sinh(2\gamma a) + ik_1\cosh(2\gamma a)\right].$$

一方、左境界では $\psi(-a) = Ae^{-ika} + Be^{ika}$、$\psi'(-a) = ik(Ae^{-ika} - Be^{ika})$ である。和と差を解くと

$$\frac{2Ae^{-ika}}{Ee^{ik_1 a}} = \left(1 + \frac{k_1}{k}\right)\cosh(2\gamma a) + i\left(\frac{\gamma}{k} - \frac{k_1}{\gamma}\right)\sinh(2\gamma a), \tag{12}$$

$$\frac{2Be^{ika}}{Ee^{ik_1 a}} = \left(1 - \frac{k_1}{k}\right)\cosh(2\gamma a) - i\left(\frac{\gamma}{k} + \frac{k_1}{\gamma}\right)\sinh(2\gamma a). \tag{13}$$

進行波 Fe^{ipx} の確率流は $\hbar p|F|^2/m$ である。右側の速度が違うため、透過率には k_1/k が掛かる。式(12), (13) の絶対値から

$$\boxed{T_3 = \frac{k_1}{k}\left|\frac{E}{A}\right|^2 = \frac{4kk_1}{(k+k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma - kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}}. \tag{14}$$

$$\boxed{R_3 = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k-k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma + kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}{(k+k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma - kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}}. \tag{15}$$

二式の分母から R_3 の分子を引くと $4kk_1(\cosh^2 - \sinh^2) = 4kk_1$ となり、$R_3 + T_3 = 1$ が確かめられる。また $k_1 = k$ とすれば式(7)に戻る。

[3.2] $\mathcal{E}$ 固定で $V_1 \to \infty$

V_1 を大きくすると $k_1 \to \infty$ だが、k, γ, a は固定される。式(14) の分母の主要項は $k_1^2[\cosh^2(2\gamma a) + (k/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)]$ なので

$$T_3 \sim \frac{4k}{k_1\{\cosh^2(2\gamma a) + (k/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)\}} \propto V_1^{-1/2}.$$

従って求める漸近値は $\boxed{\lim_{V_1\to\infty} T_3 = 0}$ である。右側への速度は増すが、その速度差に伴う反射が強くなる。

物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

各スピンは $\sigma_\alpha \in \{+1, -1\}$、結合定数は $J \neq 0$ である。N 個のスピンのエネルギーは $E = -(J/N)\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta$ とし、各異なるペアを一度ずつ数える。

[1.1] $N = 2$ のエネルギーと縮退度

原題の式 (2) は $E = -J\sigma_1\sigma_2/2$ である。同じ向きなら積は $+1$ で、$(+,+),(-,-)$ の 2 通りがある。逆向きなら積は -1 で、$(+,-),(-,+)$ の 2 通りがある。従って $J \neq 0$ のもとで、取りうる値をすべて挙げると

	E	W
$\sigma_1 = \sigma_2$	$-J/2$	2
$\sigma_1 = -\sigma_2$	$J/2$	2

である。縮退度の和 $2 + 2 = 2^2$ は全配置数と一致する。

[1.2] $N = 3$ のエネルギーと縮退度

3 スピンでは $E = -(J/3)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)$ である。すべて同じ向きなら括弧内の三つの積はすべて $+1$ となる。配置は全上向きと全下向きの 2 通りである。1 個だけ他の 2 個と逆向きなら、同じ向きのペアが 1 組、逆向きのペアが 2 組なので、積の和は $1 - 1 - 1 = -1$ となる。逆向きの 1 個の選び方が 3 通り、その向きが 2 通りある。よって

	E	W
全スピンが同じ向き	$-J$	2
1 個だけ逆向き	$J/3$	6

を得る。$2 + 6 = 2^3$ で全配置を数え尽くしている。

[1.3] $N = 3$ の基底状態

$J > 0$ なら $-J < J/3$ なので全スピンが同じ向きの配置が基底状態であり、$\boxed{W = 2}$。$J < 0$ なら $J/3 < -J$ なので 1 個だけ逆向きの配置が基底状態であり、$\boxed{W = 6}$ である。

[2.1] 一般の N に対するエネルギー

M を -1 向きのスピン数とすると、総スピンは $\sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha = N - 2M$ である。その二乗を展開すると、$\sigma_\alpha^2 = 1$ から

$$(N - 2M)^2 = \sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = N + 2\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta.$$

二つ目の和は、順序の異なる同一ペアを重複して含まない。これを式 (1) に入れて

$$\boxed{E(M) = -\frac{J}{2N}\big[(N-2M)^2 - N\big]}, \qquad M = 0, 1, \ldots, N$$

を得る。指定した M に対して -1 スピンの位置を選ぶ状態数は $\binom{N}{M}$ である。ただし、M と $N-M$ のように異なる値が同じエネルギーを与えるとき、エネルギーの縮退度はそれぞれの状態数を加えたものになる。

[2.2] 一般の N に対する基底状態

$J > 0$ では $E(M)$ を最小にするには $|N-2M|$ を最大にする。$M = 0, N$ が該当し、$N \geq 1$ で

$$\boxed{E = -\frac{J}{2}(N-1), \qquad W = 2 \quad (J > 0)}.$$

$J < 0$ では逆に $|N-2M|$ を最小にする。偶数 N では $M = N/2$ のみ、奇数 N では $M = (N-1)/2, (N+1)/2$ の二つが該当する。従って

$$\boxed{\begin{array}{ll} N \text{ が偶数}: & E = J/2, \quad W = \dbinom{N}{N/2}, \\ N \text{ が奇数}: & E = \dfrac{J(N-1)}{2N}, \quad W = 2\dbinom{N}{(N-1)/2} \end{array} \qquad (J < 0).}$$

ここで奇数 N の二つの M は異なる配置集合を表す。$N = 1$ でも式は $E = 0, W = 2$ を与える。また $N = 2, 3$ を代入すると [1.1]–[1.3] の結果に戻る。

[3.1] エネルギー密度

以下は原題に従い $N \gg 1, J > 0$、$m = M/N$、$0 < m < 1/2$ とする。[2.1] の厳密式を N で割れば

$$\frac{E}{N} = -\frac{J}{2}(1-2m)^2 + \frac{J}{2N}.$$

最後の項は有限 N の補正である。大 N で求める関数の主項は

$$\boxed{\frac{E}{N} \simeq -\frac{J}{2}(1-2m)^2.}$$

[3.2] エントロピー密度

$M = Nm$ 個の -1 スピンを N 箇所から選ぶので、式 (4) で指定した磁化の配置数は $W = \binom{N}{M}$ である。$S = k_B \log W$ とし、原題の式 (5) を $N, M, N-M$ に適用すると

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \frac{k_B}{N}\big(\log N! - \log M! - \log(N-M)!\big) \\ &\simeq -k_B\big[m\log m + (1-m)\log(1-m)\big]. \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{\frac{S}{N} \simeq -k_B\big[m\log m + (1-m)\log(1-m)\big].}$$

この主項は $N \to \infty$ で m を固定し、M と $N-M$ がともに十分大きいときに得られる。$J > 0$ の同じエネルギーには m と $1-m$ の両方が対応するが、二枝を合算してもエントロピー密度に加わるのは高々 $k_B \log 2/N$ であり、この主項は変わらない。

[3.3] 温度と m の関係

m を変化させると、[3.1] と [3.2] の主項の微分は

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = 2J(1-2m), \qquad \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}m} = k_B \log\frac{1-m}{m}.$$

$0 < m < 1/2$ ではどちらも正である。式 (6) をこの曲線に沿って用い、

$$\frac{1}{T} = \frac{\mathrm{d}S/\mathrm{d}m}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}m} = \frac{k_B \log[(1-m)/m]}{2J(1-2m)}$$

から

$$\boxed{T(m) = \frac{2J(1-2m)}{k_B \log[(1-m)/m]}} \qquad (0 < m < 1/2)$$

を得る。分母は正なので $T > 0$ であり、$m \to 0$ で $T \to 0$ となる。

[3.4] 低温の m

$k_B T \ll J$ のとき原題の条件どおり $m \ll 1$ とする。[3.3] を

$$\log\frac{1-m}{m} = \frac{2J}{k_B T}(1-2m)$$

と書けば、左辺は先頭で $-\log m$、右辺は先頭で $2J/(k_B T)$ である。従って、熱力学極限を先に取った低温の支配項は

$$\boxed{m \sim \exp\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

等号ではなく漸近等価を用いるのは、元の式には m に依存する補正が残るためである。

[3.5] 低温のエントロピー

$m \ll 1$ に対して $-(1-m)\log(1-m) = m + O(m^2)$ なので、[3.2] は

$$\frac{S}{N} = k_B\big[m(1-\log m) + O(m^2)\big].$$

[3.4] の $-\log m \sim 2J/(k_B T)$ を代入すると

$$\boxed{\frac{S}{N} \sim k_B\left(1 + \frac{2J}{k_B T}\right)\exp\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

括弧内の 1 は $-(1-m)\log(1-m)$ からの寄与である。さらに厳密な最先頭だけなら、括弧内は $2J/(k_B T)$ に置き換えられる。

[3.6] 低温の熱容量

体積や外場など他の外部条件は変えていないので、$C = T\,\mathrm{d}S/\mathrm{d}T$ を用いる。[3.5] で使ったエントロピーを温度で微分するため、$x = 2J/(k_B T)$ とおき、[3.3] の関係を微分する。

$$\log\frac{1-m}{m} = x(1-2m), \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = -\frac{m(1-m)(1-2m)}{1-2xm(1-m)} \sim -m.$$

ここで [3.4] より $m \sim e^{-x}$ であり、$xm \to 0$ を用いた。[3.2] のエントロピーから $\mathrm{d}(S/N)/\mathrm{d}m = k_B \log[(1-m)/m]$ なので、$T\,\mathrm{d}/\mathrm{d}T = -x\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ により

$$\frac{C}{N} = -k_B x \log\frac{1-m}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} \sim k_B x^2 e^{-x}.$$

従って

$$\boxed{\frac{C}{N} \sim k_B \left(\frac{2J}{k_B T}\right)^2 \exp\!\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

同じ結果は、$E/N \simeq -J/2 + 2Jm$ と上の $\mathrm{d}m/\mathrm{d}x$ を使い、$C/N = \mathrm{d}(E/N)/\mathrm{d}T$ を計算しても得られる。正の値で、$T \to 0$ では指数的にゼロになる。

[4] 臨界温度

原題では $T \geq T_c$ の平衡状態が $m = 1/2$ である。[3.3] の式はこの点で分子と分母がともにゼロになるため、$0 < m < 1/2$ からの極限を取る。$\log[(1-m)/m]$ の $m = 1/2$ での一次微分は -4 だから、$m \to 1/2$ では

$$\log\frac{1-m}{m} = 2(1-2m) + O\big((1-2m)^3\big).$$

従って

$$\boxed{T_c = \lim_{m \to 1/2^-} T(m) = \frac{J}{k_B}.}$$

これは $N \gg 1$ の熱力学的な臨界温度である。有限 N の [2] に臨界特異点を主張するものではない。

物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

以下では $e>0$ とし、電子の電荷は $-e$ である。N は電子数密度、m は電子質量、ε_0 は真空の誘電率、c は光速である。複素表示した電場の実部を物理的な電場とする。原題と同じく時間依存は $e^{-i\omega t}$ であり、$\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$ とおく。

[1] 静磁場がないときの電子の運動方程式

電磁波の磁場による力と他粒子との相互作用は仮定により無視する。電子に働く力は電気力 $-e\boldsymbol{E}(z,t)$ だけなので、横方向の速度 $\boldsymbol{v}(z,t)$ は

$$\boxed{m\frac{\partial \boldsymbol{v}(z,t)}{\partial t} = -e\boldsymbol{E}(z,t)}$$

に従う。電子の熱運動は平均電流に寄与しない。

[2] 電流密度の時間微分

正イオンは静止しているので、電流密度は $\boldsymbol{J} = -Ne\boldsymbol{v}$ である。N は一様で時間に依存しないから、[1] を用いて

$$\boxed{\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} = -Ne\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\omega_p^2\boldsymbol{E}.}$$

負電荷をもつ電子の速度と電流の向きが逆になるため、最後の係数は正である。

[3] 無磁場での分散関係と伝搬条件

使用する波動方程式と平面波は

$$\partial_z^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}\partial_t\boldsymbol{J}, \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} \tag{1}$$

である。代入すると、$\partial_z^2\boldsymbol{E} = -k^2\boldsymbol{E}$、$\partial_t^2\boldsymbol{E} = -\omega^2\boldsymbol{E}$ となる。[2] も代入して

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\boldsymbol{E} = \frac{\omega_p^2}{c^2}\boldsymbol{E}.$$

従って

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}.}$$

$\omega > \omega_p$ なら正の実波数 $k = \sqrt{\omega^2-\omega_p^2}/c$ を選べ、$+z$ 方向の進行波は減衰せず長距離を伝搬する。$0<\omega<\omega_p$ では k が純虚数となり、$+z$ 側で有限な解は指数的に減衰する。$\omega=\omega_p$ では $k=0$ で進行しない。よって条件は $\boxed{\omega > \omega_p}$ である。

[4] 静磁場中の電子の運動方程式

以下は原題後半の追加条件 $B_z > 0$、$\omega > \omega_c$、$\omega_p > \omega_c$ のもとで考える。静磁場を $B_z\boldsymbol{e}_z$ と書く。横方向速度と静磁場の外積は $\boldsymbol{v} \times B_z\boldsymbol{e}_z = (B_z v_y, -B_z v_x, 0)$ であり、電子に働く力は $-e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times B_z\boldsymbol{e}_z)$ となる。$\omega_c = eB_z/m$ を用いれば

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{e}{m}E_x - \omega_c v_y, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{e}{m}E_y + \omega_c v_x. \end{aligned}}$$

ここで $\boldsymbol{e}_z$ は $+z$ 方向の単位ベクトルであり、各量の引数は (z,t) である。

[5] 導電率行列

$\boldsymbol{J} = -Ne\boldsymbol{v}$ を [4] の両式に代入し、$e^{-i\omega t}$ に比例する量の時間微分を $-i\omega$ 倍に置き換えると

$$\begin{pmatrix} -i\omega & \omega_c \\ -\omega_c & -i\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \omega_p^2 \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}.$$

左の行列の行列式は $\omega_c^2 - \omega^2 \neq 0$ である。逆行列を掛けて原題の式 (4) の行列を求めると

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} \begin{pmatrix} i\omega & \omega_c \\ -\omega_c & i\omega \end{pmatrix}.}$$

例えば第 1 行は $J_x = \varepsilon_0\omega_p^2(i\omega E_x + \omega_c E_y)/(\omega^2 - \omega_c^2)$ となる。B_z をゼロに近づけると $\boldsymbol{\sigma} = i\varepsilon_0\omega_p^2\mathbf{I}/\omega$ に戻り、[2] の $-i\omega\boldsymbol{J} = \varepsilon_0\omega_p^2\boldsymbol{E}$ と一致する。

[6] 波動方程式の行列

式 (1) に式 (2) と $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{E}$ を代入すれば

$$\boldsymbol{A} = \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{I} + \frac{i\omega}{c^2\varepsilon_0}\boldsymbol{\sigma}, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{E} = k^2\boldsymbol{E}.$$

[5] の $\boldsymbol{\sigma}$ を入れて整理すると

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}\right)\mathbf{I} - \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right].$$

原題の式 (6) と比べて

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}, \qquad \beta = \frac{\omega_p^2 \omega_c}{\omega(\omega^2 - \omega_c^2)}.}$$

仮定 $\omega > \omega_c > 0$ により $\beta > 0$ である。

[7] 固有波数、固有ベクトル、二モードの伝搬

式 (6) の非対角行列を $\boldsymbol{H} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ と書く。直接掛け算すると、$\boldsymbol{H}(1,-i)^{\mathsf{T}} = -(1,-i)^{\mathsf{T}}$、$\boldsymbol{H}(1,i)^{\mathsf{T}} = (1,i)^{\mathsf{T}}$ である。$\beta > 0$ より前者の k^2 が大きい。各固有空間の代表ベクトルと対応

する固有値は

固有ベクトル	k^2
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$	$k_+^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega+\omega_c)}\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$	$k_-^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}\left(1-\dfrac{\omega_p^2}{\omega(\omega-\omega_c)}\right)$

であり、それぞれの非零スカラー倍も固有ベクトルである。$\omega > \omega_c$ では $k_+^2 > k_-^2$ なので、二つとも $+z$ 方向へ長距離伝搬する条件は、より小さい k_-^2 が正になることである。すなわち

$$\omega(\omega-\omega_c) > \omega_p^2 \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\omega > \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2+4\omega_p^2}}{2}.}$$

等号では $k_- = 0$ となり進行波ではない。条件を満たす場合、以後 k_+, k_- は上の固有値の正の平方根とし、$k_+ > k_- > 0$ である。

[8] 直線偏光の回転

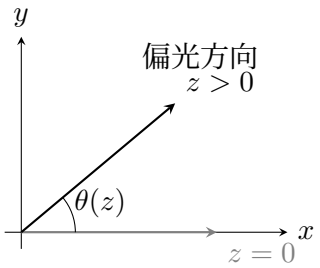
位置 $z=0$ の x 方向の電場を $\boldsymbol{E}(0,t) = E_0(1,0)^{\mathsf{T}} e^{-i\omega t}$ とする。これは [7] の二つの固有ベクトルを等しい係数で重ねたものである。$+z$ へ進む各モードにはそれぞれ $e^{ik_+ z}$、$e^{ik_- z}$ を掛ける。従って

$$\boxed{\boldsymbol{E}(z,t) = \frac{E_0}{2} e^{-i\omega t}\left[e^{ik_+ z}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} + e^{ik_- z}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right].}$$

ここで $\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$、$\theta(z) = (k_+ - k_-)z/2$ と書けば、和と差の公式によって同じ電場は

$$\boxed{\boldsymbol{E}(z,t) = E_0 e^{i(\bar{k}z - \omega t)}\begin{pmatrix}\cos\theta(z)\\ \sin\theta(z)\end{pmatrix}.}$$

$z=0$ では $\theta = 0$ で原題の式 (7) に戻る。二成分には共通の時間位相しか残らないため、実電場はどの z でも直線偏光である。その偏光方向は z が増すにつれ $+x$ から $+y$ へ向けて回転し、角度は $\theta(z) = (k_+ - k_-)z/2$ だけ増える。偏光軸を向きの区別なしで見れば、長さ $2\pi/(k_+ - k_-)$ ごとに同じ向きに戻る。



図は $0 < \theta(z) < \pi/2$ の一例を示す。一般の z ではこの向きが連続して回転する。