物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

各スピンは $\sigma_\alpha \in \{+1, -1\}$、結合定数は $J \neq 0$ である。N 個のスピンのエネルギーは $E = -(J/N)\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta$ とし、各異なるペアを一度ずつ数える。

[1.1] $N = 2$ のエネルギーと縮退度

原題の式 (2) は $E = -J\sigma_1\sigma_2/2$ である。同じ向きなら積は $+1$ で、$(+,+),(-,-)$ の 2 通りがある。逆向きなら積は -1 で、$(+,-),(-,+)$ の 2 通りがある。従って $J \neq 0$ のもとで、取りうる値をすべて挙げると

	E	W
$\sigma_1 = \sigma_2$	$-J/2$	2
$\sigma_1 = -\sigma_2$	$J/2$	2

である。縮退度の和 $2 + 2 = 2^2$ は全配置数と一致する。

[1.2] $N = 3$ のエネルギーと縮退度

3 スピンでは $E = -(J/3)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)$ である。すべて同じ向きなら括弧内の三つの積はすべて $+1$ となる。配置は全上向きと全下向きの 2 通りである。1 個だけ他の 2 個と逆向きなら、同じ向きのペアが 1 組、逆向きのペアが 2 組なので、積の和は $1 - 1 - 1 = -1$ となる。逆向きの 1 個の選び方が 3 通り、その向きが 2 通りある。よって

	E	W
全スピンが同じ向き	$-J$	2
1 個だけ逆向き	$J/3$	6

を得る。$2 + 6 = 2^3$ で全配置を数え尽くしている。

[1.3] $N = 3$ の基底状態

$J > 0$ なら $-J < J/3$ なので全スピンが同じ向きの配置が基底状態であり、$\boxed{W = 2}$。$J < 0$ なら $J/3 < -J$ なので 1 個だけ逆向きの配置が基底状態であり、$\boxed{W = 6}$ である。

[2.1] 一般の N に対するエネルギー

M を -1 向きのスピン数とすると、総スピンは $\sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha = N - 2M$ である。その二乗を展開すると、$\sigma_\alpha^2 = 1$ から

$$(N - 2M)^2 = \sum_{\alpha=1}^{N}\sigma_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta = N + 2\sum_{\alpha<\beta}\sigma_\alpha\sigma_\beta.$$

二つ目の和は、順序の異なる同一ペアを重複して含まない。これを式 (1) に入れて

$$\boxed{E(M) = -\frac{J}{2N}\big[(N-2M)^2 - N\big]}, \qquad M = 0, 1, \ldots, N$$

を得る。指定した M に対して -1 スピンの位置を選ぶ状態数は $\binom{N}{M}$ である。ただし、M と $N-M$ のように異なる値が同じエネルギーを与えるとき、エネルギーの縮退度はそれぞれの状態数を加えたものになる。

[2.2] 一般の N に対する基底状態

$J > 0$ では $E(M)$ を最小にするには $|N-2M|$ を最大にする。$M = 0, N$ が該当し、$N \geq 1$ で

$$\boxed{E = -\frac{J}{2}(N-1), \qquad W = 2 \quad (J > 0)}.$$

$J < 0$ では逆に $|N-2M|$ を最小にする。偶数 N では $M = N/2$ のみ、奇数 N では $M = (N-1)/2, (N+1)/2$ の二つが該当する。従って

$$\boxed{\begin{array}{ll} N \text{ が偶数}: & E = J/2, \quad W = \dbinom{N}{N/2}, \\ N \text{ が奇数}: & E = \dfrac{J(N-1)}{2N}, \quad W = 2\dbinom{N}{(N-1)/2} \end{array} \qquad (J < 0).}$$

ここで奇数 N の二つの M は異なる配置集合を表す。$N = 1$ でも式は $E = 0, W = 2$ を与える。また $N = 2, 3$ を代入すると [1.1]–[1.3] の結果に戻る。

[3.1] エネルギー密度

以下は原題に従い $N \gg 1, J > 0$、$m = M/N$、$0 < m < 1/2$ とする。[2.1] の厳密式を N で割れば

$$\frac{E}{N} = -\frac{J}{2}(1-2m)^2 + \frac{J}{2N}.$$

最後の項は有限 N の補正である。大 N で求める関数の主項は

$$\boxed{\frac{E}{N} \simeq -\frac{J}{2}(1-2m)^2.}$$

[3.2] エントロピー密度

$M = Nm$ 個の -1 スピンを N 箇所から選ぶので、式 (4) で指定した磁化の配置数は $W = \binom{N}{M}$ である。$S = k_B \log W$ とし、原題の式 (5) を $N, M, N-M$ に適用すると

$$\begin{aligned} \frac{S}{N} &= \frac{k_B}{N}\big(\log N! - \log M! - \log(N-M)!\big) \\ &\simeq -k_B\big[m\log m + (1-m)\log(1-m)\big]. \end{aligned}$$

従って

$$\boxed{\frac{S}{N} \simeq -k_B\big[m\log m + (1-m)\log(1-m)\big].}$$

この主項は $N \to \infty$ で m を固定し、M と $N-M$ がともに十分大きいときに得られる。$J > 0$ の同じエネルギーには m と $1-m$ の両方が対応するが、二枝を合算してもエントロピー密度に加わるのは高々 $k_B \log 2/N$ であり、この主項は変わらない。

[3.3] 温度と m の関係

m を変化させると、[3.1] と [3.2] の主項の微分は

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}m} = 2J(1-2m), \qquad \frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}m} = k_B \log\frac{1-m}{m}.$$

$0 < m < 1/2$ ではどちらも正である。式 (6) をこの曲線に沿って用い、

$$\frac{1}{T} = \frac{\mathrm{d}S/\mathrm{d}m}{\mathrm{d}E/\mathrm{d}m} = \frac{k_B \log[(1-m)/m]}{2J(1-2m)}$$

から

$$\boxed{T(m) = \frac{2J(1-2m)}{k_B \log[(1-m)/m]}} \qquad (0 < m < 1/2)$$

を得る。分母は正なので $T > 0$ であり、$m \to 0$ で $T \to 0$ となる。

[3.4] 低温の m

$k_B T \ll J$ のとき原題の条件どおり $m \ll 1$ とする。[3.3] を

$$\log\frac{1-m}{m} = \frac{2J}{k_B T}(1-2m)$$

と書けば、左辺は先頭で $-\log m$、右辺は先頭で $2J/(k_B T)$ である。従って、熱力学極限を先に取った低温の支配項は

$$\boxed{m \sim \exp\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

等号ではなく漸近等価を用いるのは、元の式には m に依存する補正が残るためである。

[3.5] 低温のエントロピー

$m \ll 1$ に対して $-(1-m)\log(1-m) = m + O(m^2)$ なので、[3.2] は

$$\frac{S}{N} = k_B\big[m(1-\log m) + O(m^2)\big].$$

[3.4] の $-\log m \sim 2J/(k_B T)$ を代入すると

$$\boxed{\frac{S}{N} \sim k_B\left(1 + \frac{2J}{k_B T}\right)\exp\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

括弧内の 1 は $-(1-m)\log(1-m)$ からの寄与である。さらに厳密な最先頭だけなら、括弧内は $2J/(k_B T)$ に置き換えられる。

[3.6] 低温の熱容量

体積や外場など他の外部条件は変えていないので、$C = T\,\mathrm{d}S/\mathrm{d}T$ を用いる。[3.5] で使ったエントロピーを温度で微分するため、$x = 2J/(k_B T)$ とおき、[3.3] の関係を微分する。

$$\log\frac{1-m}{m} = x(1-2m), \qquad \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} = -\frac{m(1-m)(1-2m)}{1-2xm(1-m)} \sim -m.$$

ここで [3.4] より $m \sim e^{-x}$ であり、$xm \to 0$ を用いた。[3.2] のエントロピーから $\mathrm{d}(S/N)/\mathrm{d}m = k_B \log[(1-m)/m]$ なので、$T\,\mathrm{d}/\mathrm{d}T = -x\,\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ により

$$\frac{C}{N} = -k_B x \log\frac{1-m}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}x} \sim k_B x^2 e^{-x}.$$

従って

$$\boxed{\frac{C}{N} \sim k_B \left(\frac{2J}{k_B T}\right)^2 \exp\!\left(-\frac{2J}{k_B T}\right)} \qquad (k_B T/J \to 0).$$

同じ結果は、$E/N \simeq -J/2 + 2Jm$ と上の $\mathrm{d}m/\mathrm{d}x$ を使い、$C/N = \mathrm{d}(E/N)/\mathrm{d}T$ を計算しても得られる。正の値で、$T \to 0$ では指数的にゼロになる。

[4] 臨界温度

原題では $T \geq T_c$ の平衡状態が $m = 1/2$ である。[3.3] の式はこの点で分子と分母がともにゼロになるため、$0 < m < 1/2$ からの極限を取る。$\log[(1-m)/m]$ の $m = 1/2$ での一次微分は -4 だから、$m \to 1/2$ では

$$\log\frac{1-m}{m} = 2(1-2m) + O\big((1-2m)^3\big).$$

従って

$$\boxed{T_c = \lim_{m \to 1/2^-} T(m) = \frac{J}{k_B}.}$$

これは $N \gg 1$ の熱力学的な臨界温度である。有限 N の [2] に臨界特異点を主張するものではない。