物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1] 障壁より低いエネルギー $0 < \mathcal{E} < V_0$

原題の A は左から入射する波の振幅、B は反射波、E は右へ透過する波の振幅である。障壁の左右でポテンシャルは同じなので両側の進行波数は k、障壁内の減衰定数は γ である。

[1.1] $x = -a$ の接続

有限の段差では波動関数とその一階導関数が連続する。左側の $Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ と内部の $Ce^{\gamma x} + De^{-\gamma x}$ を $x = -a$ に代入して

$$Ae^{-ika} + Be^{ika} = Ce^{-\gamma a} + De^{\gamma a}, \tag{1}$$

$$ik\big(Ae^{-ika} - Be^{ika}\big) = \gamma\big(Ce^{-\gamma a} - De^{\gamma a}\big). \tag{2}$$

この二式が求める関係である。

[1.2] $x = a$ の接続

内部解と右側の Ee^{ikx} に同じ条件を課すと

$$Ce^{\gamma a} + De^{-\gamma a} = Ee^{ika}, \tag{3}$$

$$\gamma\big(Ce^{\gamma a} - De^{-\gamma a}\big) = ikEe^{ika}. \tag{4}$$

これが残る二式である。以下ではこれらを使って A/E と B/E を得る。

[1.3] 透過率 T_1

式(3), (4) を加減すると

$$Ce^{\gamma a} = \frac{Ee^{ika}}{2}\left(1 + \frac{ik}{\gamma}\right), \qquad De^{-\gamma a} = \frac{Ee^{ika}}{2}\left(1 - \frac{ik}{\gamma}\right).$$

これを式(1), (2) に代入し、二式の和と差を取る。反射波については原題の式 (3) に一致する

$$\begin{aligned}\frac{B}{E} &= \frac{(ik-\gamma)(ik+\gamma)}{4ik\gamma}e^{-2\gamma a} - \frac{(ik+\gamma)(ik-\gamma)}{4ik\gamma}e^{2\gamma a} \\ &= -i\frac{k^2+\gamma^2}{2k\gamma}\sinh(2\gamma a).\end{aligned} \tag{5}$$

同じ計算で

$$\frac{A}{E} = e^{2ika}\left[\cosh(2\gamma a) + i\frac{\gamma^2 - k^2}{2k\gamma}\sinh(2\gamma a)\right]. \tag{6}$$

左右の波数が等しいため、入射・透過確率流の比は $T_1 = |E/A|^2$ である。式(6) の絶対値を取って $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ を使えば

$$\boxed{T_1 = \left[1 + \frac{(k^2+\gamma^2)^2}{4k^2\gamma^2}\sinh^2(2\gamma a)\right]^{-1}}. \tag{7}$$

実際、式(5)から $|B/A|^2 = |B/E|^2 T_1$ となり、式(7)は反射率と透過率の和が 1 であることとも一致する。

[1.4] $\gamma/k \ll 1$ かつ $a\gamma \ll 1$

$\sinh(2\gamma a) = 2\gamma a + O((\gamma a)^3)$ であり、$(k^2+\gamma^2)^2/k^4 = 1 + O((\gamma/k)^2)$ である。式(7) の角括弧内の増分は、相対誤差 $O((\gamma/k)^2 + (a\gamma)^2)$ で k^2a^2 となる。従って

$$\boxed{T_1 \simeq \frac{1}{1+k^2a^2}} \qquad (\gamma/k \ll 1,\ a\gamma \ll 1).$$

ここでは ka の大小は指定されておらず、この因子をさらに展開しない。

[1.5] $a\gamma \gg 1$

$\sinh^2(2\gamma a) \simeq e^{4\gamma a}/4$ を式(7) に入れる。指数項が支配的になるので

$$\boxed{T_1 \simeq \frac{16k^2\gamma^2}{(k^2+\gamma^2)^2} e^{-4\gamma a}} \qquad (a\gamma \gg 1).$$

指数 $4\gamma a$ は障壁の幅 $2a$ を確率（振幅二乗）で評価した結果である。

[2] 障壁より高いエネルギー $\mathcal{E} > V_0$

[2.1] 透過率 $T_2(\mathcal{E})$

障壁の内部も進行波となり、その波数は $q = \sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}/\hbar$ である。両境界を連続につないで得た式(7)で $\gamma = iq$ と置いてもよい。$\sinh(2iqa) = i\sin(2qa)$ と $k^2 - q^2 = 2mV_0/\hbar^2$ から

$$\boxed{T_2(\mathcal{E}) = \left[1 + \frac{V_0^2}{4\mathcal{E}(\mathcal{E}-V_0)}\sin^2\left(\frac{2a\sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}}{\hbar}\right)\right]^{-1}}, \qquad \mathcal{E} > V_0. \tag{8}$$

[2.2] 概形と極大

式(8) の角括弧内で正弦二乗以外の因子は正である。従って $T_2 \le 1$ であり、全ての透過率 1 の極大は

$$\boxed{\frac{2a\sqrt{2m(\mathcal{E}-V_0)}}{\hbar} = n\pi \quad\Longleftrightarrow\quad \mathcal{E} = V_0 + \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{8ma^2}}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{9}$$

これら以外に局所極大もない。$z = 2aq$、$\beta = 8ma^2V_0/\hbar^2 > 0$ と置くと、逆透過率の正の増分は

$$T_2^{-1} - 1 = \frac{\beta^2 \sin^2 z}{4z^2(z^2+\beta)}. \tag{10}$$

$0 < z < \pi$ では $\sin z/z$ も $1/(z^2+\beta)$ も減少するため、T_2 に内部の極大はない。$n\pi < z < (n+1)\pi$（$n \geq 1$）では、この正の増分の対数微分の半分は

$$h(z) = \cot z - \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+\beta}, \qquad h'(z) = -\csc^2 z + \frac{1}{z^2} + \frac{z^2-\beta}{(z^2+\beta)^2} < -1 + \frac{2}{\pi^2} < 0. \tag{11}$$

h は区間の左端で $+\infty$、右端で $-\infty$ へ向かうので、零点は一つだけである。その点は逆透過率の極大、すなわち T_2 の谷である。従って共鳴点以外に局所極大はない。

$n = 0$ は $\mathcal{E} = V_0$ であり、指定された $\mathcal{E} > V_0$ の範囲外である。境界の片側極限は $\sin z \sim z$ から

$$\lim_{\mathcal{E} \downarrow V_0} T_2 = \left(1 + \frac{2mV_0a^2}{\hbar^2}\right)^{-1}.$$

また $\mathcal{E} \gg V_0$ では振動する項の係数が $O(V_0^2/\mathcal{E}^2)$ となるため、$T_2 \to 1$ である。つまり共鳴の谷も高エネルギーでは 1 へ近づく。

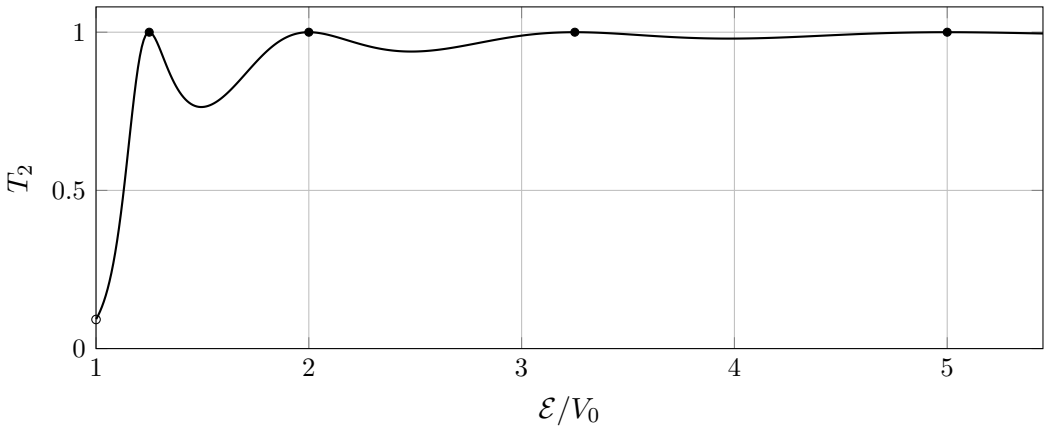


Figure 1: $2a\sqrt{2mV_0}/\hbar = 2\pi$ と選んだ場合の式(8) の概形。白丸は $\mathcal{E} = V_0$ の片側極限で、定義域には含まれない。黒点は透過率 1 の共鳴である。

図 1は障壁の幅を一例に固定している。一般の幅ではピークの横位置は式(9) に従う。

[3] 右側が $V(x) = -V_1$ の場合

[3.1] 透過率 T_3 と反射率 R_3

$0 < \mathcal{E} < V_0$、$V_1 > 0$ の範囲を保つ。左側と障壁内の解は [1] と同じで、右側の透過波は Ee^{ik_1x} と書く。$k_1 = \sqrt{2m(\mathcal{E}+V_1)}/\hbar$ である。右境界 $x = a$ では $\psi(a) = Ee^{ik_1a}$、$\psi'(a) = ik_1Ee^{ik_1a}$。障壁内では任意の点 x で

$$\psi(x) = \psi(a)\cosh[\gamma(x-a)] + \frac{\psi'(a)}{\gamma}\sinh[\gamma(x-a)],$$
$$\psi'(x) = \gamma\psi(a)\sinh[\gamma(x-a)] + \psi'(a)\cosh[\gamma(x-a)].$$

この二式に $x = -a$ を代入して右境界の値を幅 $2a$ だけ左境界まで運ぶと

$$\psi(-a) = Ee^{ik_1a}\left[\cosh(2\gamma a) - i\frac{k_1}{\gamma}\sinh(2\gamma a)\right],$$
$$\psi'(-a) = Ee^{ik_1a}\left[-\gamma\sinh(2\gamma a) + ik_1\cosh(2\gamma a)\right].$$

一方、左境界では $\psi(-a) = Ae^{-ika} + Be^{ika}$、$\psi'(-a) = ik(Ae^{-ika} - Be^{ika})$ である。和と差を解くと

$$\frac{2Ae^{-ika}}{Ee^{ik_1 a}} = \left(1 + \frac{k_1}{k}\right)\cosh(2\gamma a) + i\left(\frac{\gamma}{k} - \frac{k_1}{\gamma}\right)\sinh(2\gamma a), \tag{12}$$

$$\frac{2Be^{ika}}{Ee^{ik_1 a}} = \left(1 - \frac{k_1}{k}\right)\cosh(2\gamma a) - i\left(\frac{\gamma}{k} + \frac{k_1}{\gamma}\right)\sinh(2\gamma a). \tag{13}$$

進行波 Fe^{ipx} の確率流は $\hbar p|F|^2/m$ である。右側の速度が違うため、透過率には k_1/k が掛かる。式(12), (13) の絶対値から

$$\boxed{T_3 = \frac{k_1}{k}\left|\frac{E}{A}\right|^2 = \frac{4kk_1}{(k+k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma - kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}}. \tag{14}$$

$$\boxed{R_3 = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(k-k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma + kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}{(k+k_1)^2\cosh^2(2\gamma a) + (\gamma - kk_1/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)}}. \tag{15}$$

二式の分母から R_3 の分子を引くと $4kk_1(\cosh^2 - \sinh^2) = 4kk_1$ となり、$R_3 + T_3 = 1$ が確かめられる。また $k_1 = k$ とすれば式(7)に戻る。

[3.2] $\mathcal{E}$ 固定で $V_1 \to \infty$

V_1 を大きくすると $k_1 \to \infty$ だが、k, γ, a は固定される。式(14) の分母の主要項は $k_1^2[\cosh^2(2\gamma a) + (k/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)]$ なので

$$T_3 \sim \frac{4k}{k_1\{\cosh^2(2\gamma a) + (k/\gamma)^2\sinh^2(2\gamma a)\}} \propto V_1^{-1/2}.$$

従って求める漸近値は $\boxed{\lim_{V_1\to\infty} T_3 = 0}$ である。右側への速度は増すが、その速度差に伴う反射が強くなる。