物理工学専攻院試解答集
2025 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

質点の質量を m、自然角周波数を ω_0、粘性抵抗係数を ζ とする。バネによる復元力は $-m\omega_0^2 x$ であるから、両部分で用いる運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + \zeta\dot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) = f(t). \tag{1}$$

位置の正方向は自然長の位置を原点とする x 軸の正方向とする。

[1.1] 周期外力に対する定常解

この節では周期外力 $f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$（$\Omega > 0$）を加える。外力と同じ時間因子をもつ定常解 $x(t) = X_0 e^{i\Omega t}$ を式(1)に代入する。$\dot{x} = i\Omega x$、$\ddot{x} = -\Omega^2 x$ なので

$$\{m(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\zeta\Omega\} X_0 = F_0.$$

$\zeta > 0$ かつ $\Omega > 0$ で分母はゼロにならない。したがって、過渡項が減衰した後の複素表示は

$$\boxed{x(t) = \frac{F_0 e^{i\Omega t}}{m(\omega_0^2 - \Omega^2) + i\zeta\Omega}}. \tag{2}$$

実際の位置が必要なら、この複素式の実部を取る。

[1.2] 応答関数の実部と虚部

式(2)を $f(t) = F_0 e^{i\Omega t}$ で割り、分母の共役複素数を掛ける。$D(\Omega) = m^2(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \zeta^2\Omega^2 > 0$ とおくと

$$\varepsilon = \frac{m(\omega_0^2 - \Omega^2) - i\zeta\Omega}{D(\Omega)}, \qquad \boxed{\varepsilon' = \frac{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}{D(\Omega)}, \quad \varepsilon'' = -\frac{\zeta\Omega}{D(\Omega)}}. \tag{3}$$

$e^{i\Omega t}$ を選んだため減衰項は分母で $+i\zeta\Omega$ となり、$\Omega > 0$ で $\varepsilon'' < 0$ である。固有角周波数 $\Omega = \omega_0$ では $\varepsilon' = 0$、$-\varepsilon'' = 1/(\zeta\omega_0)$ となる。

[1.3] 弱減衰・近共鳴での概形と極値

$\Delta = \Omega - \omega_0$、$\gamma = \zeta/(2m)$ とおく。弱減衰 $\gamma \ll \omega_0$ かつ $|\Delta| \ll \omega_0$ の範囲では $\omega_0^2 - \Omega^2 \simeq -2\omega_0\Delta$、$\zeta\Omega \simeq \zeta\omega_0$ だから

$$\varepsilon' \simeq -\frac{\Delta}{2m\omega_0(\Delta^2 + \gamma^2)}, \qquad -\varepsilon'' \simeq \frac{\gamma}{2m\omega_0(\Delta^2 + \gamma^2)}. \tag{4}$$

第一式を Δ で微分すると極値条件は $\Delta^2 = \gamma^2$ である。よって ε' の正の極大は $\Omega \simeq \omega_0 - \gamma$、負の極小は $\Omega \simeq \omega_0 + \gamma$ にある。第二式は $\Delta = 0$ で極大となる。下図は横軸を Δ/γ とする近共鳴領域の概形であり、縦軸は両関数に共通の $A = 1/(2m\omega_0\gamma)$ で割っている。

[2.1] 平均二乗変位

ここから x, f は実数であり、角括弧は定常状態のアンサンブル平均を表す。問題で与えられた平均零 $\langle f \rangle = 0$ と同時刻の $x(t), f(t)$ の無相関を用いる。式(1)に $x(t)$ を掛けて平均すると

$$m\langle x\ddot{x}\rangle + \zeta\langle x\dot{x}\rangle + m\omega_0^2\langle x^2\rangle = \langle xf\rangle = \langle x\rangle\langle f\rangle = 0.$$

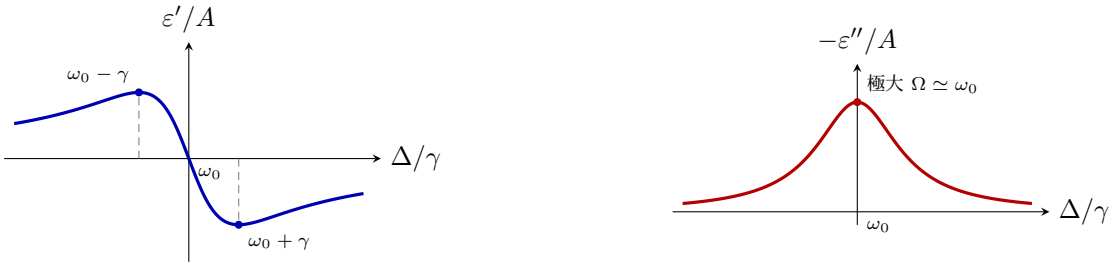


Figure 1: 近共鳴の ε' と $-\varepsilon''$。左右の横軸の原点は $\Omega=\omega_0$ に対応する。

定常状態では $d\langle x^2\rangle/dt=0$ より $\langle x\dot{x}\rangle=0$。また $d\langle x\dot{x}\rangle/dt=\langle\dot{x}^2+x\ddot{x}\rangle=0$ より $\langle x\ddot{x}\rangle=-\langle\dot{x}^2\rangle=-\overline{v^2}$ とする。ここで $v=\dot{x}$、$\overline{v^2}$ はその二乗の定常平均である。したがって

$$\boxed{\langle x(t)^2\rangle=\frac{\overline{v^2}}{\omega_0^2}}. \tag{5}$$

[2.2] フーリエ変換とパワースペクトル

原本の無限時間表示 $X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$ と $F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ を形式的に用いると、時間微分のフーリエ変換は $i\omega X$、二階微分は $-\omega^2X$ となる。定常雑音のスペクトルは、長さ $T>0$ の観測窓で $X_T(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}x(t)e^{-i\omega t}\,dt$ と $F_T(\omega)=\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-i\omega t}\,dt$ を定め、$I_x(\omega)=\lim_{T\to\infty}\langle|X_T(\omega)|^2\rangle/T$、$I_f(\omega)=\lim_{T\to\infty}\langle|F_T(\omega)|^2\rangle/T$ と読む。有限窓では部分積分により、$D(\omega)=m(\omega_0^2-\omega^2)+i\zeta\omega$ として

$$D(\omega)X_T(\omega)=F_T(\omega)-\left[e^{-i\omega t}\{m\dot{x}(t)+(\zeta+im\omega)x(t)\}\right]_{-T/2}^{T/2}.$$

定常な $x,\dot{x}$ の二乗平均が有限なら、角括弧内の端点項の二乗平均は T に依存せず有界である。$\langle|F_T|^2\rangle=O(T)$ のとき、端点項と F_T の交差項も Cauchy–Schwarz の不等式で $O(\sqrt{T})$ だから、T で割るスペクトルの極限には寄与しない。したがって、形式的な無限時間の関係と、それが表す定常スペクトルは

$$\boxed{X(\omega)=\frac{F(\omega)}{m(\omega_0^2-\omega^2)+i\zeta\omega}},\qquad \boxed{I_x(\omega)=\frac{I_f(\omega)}{m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2+\zeta^2\omega^2}}. \tag{6}$$

後の白色入力では $\langle|F_T|^2\rangle=IT$ となり、上の条件を満たす。

[2.3] 変位の相関関数

白色揺動力の相関 $\langle f(t)f(t+\tau)\rangle=I\delta(\tau)\,(I>0)$ をフーリエ変換すると、$I_f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\langle f(t)f(t+\tau)\rangle e^{-i\omega\tau}\,d\tau=I$ となる。先に定めた減衰率 $\gamma=\zeta/(2m)$ を再び用い、問題の条件 $\gamma<\omega_0$ のもとで $\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}>0$ とおけば

$$I_x(\omega)=\frac{I/m^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}. \tag{7}$$

逆変換を具体的に確認するため、$g(\tau)=e^{-\gamma|\tau|}\{\cos(\omega_1\tau)+(\gamma/\omega_1)\sin(\omega_1|\tau|)\}$ とおく。g は偶関数であり、$\gamma>0$ を用いた指数・三角関数の積分から

$$\int_{-\infty}^{\infty}g(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau=2\int_0^{\infty}e^{-\gamma\tau}\left(\cos\omega_1\tau+\frac{\gamma}{\omega_1}\sin\omega_1\tau\right)\cos\omega\tau\,d\tau=\frac{4\gamma\omega_0^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}.$$

原本の逆変換 $C_x(\tau)=(2\pi)^{-1}\int I_x(\omega)e^{i\omega\tau}\,d\omega$ と式(7)を照合し、$4m^2\gamma\omega_0^2=2\zeta m\omega_0^2$ を使うと

$$\boxed{\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\frac{I}{2\zeta m\omega_0^2}e^{-\zeta|\tau|/(2m)}\left[\cos(\omega_1\tau)+\frac{\zeta}{2m\omega_1}\sin(\omega_1|\tau|)\right]}. \tag{8}$$

相関は τ の偶関数で、$|\tau|\to\infty$ でゼロに減衰する。$\tau=0$ では括弧が 1 となる。

[2.4] 揺動力の強さと平均二乗速度

式(8)に $\tau = 0$ を入れると $\langle x^2 \rangle = I/(2\zeta m \omega_0^2)$。これを式(5)と比較し、$\omega_0 > 0$ を用いて

$$\boxed{I = 2\zeta m \, \overline{v^2}}. \tag{9}$$

両辺の次元は「力の二乗 × 時間」で一致する。