物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

出典：2023 年 8 月 29 日実施の物理学入学試験、第 1 問（原本 PDF の 2–3 ページ）。棒の下端を P、回転軸上の点を O とする。P から O までが l_1、P から上端までが l_0 であり、$l_1 > l_0/2$ だから重心は O より下にある。

[1] 棒の慣性モーメント

[1.1] 中心軸に関する慣性モーメント

棒の密度は一様なので、中心軸に垂直な断面内でも質量は一様に分布する。半径 r、幅 $\mathrm{d}r$ の円環が全質量に占める割合は $2\pi r\,\mathrm{d}r/(\pi a^2)$ である。この円環の質量は $\mathrm{d}m = M(2\pi r\,\mathrm{d}r)/(\pi a^2) = 2Mr\,\mathrm{d}r/a^2$。各円環の寄与 $r^2\mathrm{d}m$ を積分して

$$I_{\parallel} = \int_0^a r^2\,\mathrm{d}m = \int_0^a r^2 \frac{2M}{a^2} r\,\mathrm{d}r = \boxed{\frac{1}{2}Ma^2}.$$

[1.2] 薄い円板の直径に関する慣性モーメント

円板の質量は $\Delta M = M\Delta l/l_0$ である。円板面内で互いに直交する二本の直径に関する慣性モーメントは対称性から等しい。垂直軸の定理より、その和は中心軸に関する $\Delta M a^2/2$ なので、一方の直径について

$$\boxed{\Delta I_{\perp} = \frac{1}{4}\Delta M a^2 = \frac{Ma^2}{4l_0}\Delta l}.$$

厚さに伴う $O((\Delta l)^3)$ の項は、十分に薄い円板の極限で消える。

[1.3] O を通る回転軸に関する慣性モーメント

P から中心軸に沿って距離 s の位置の薄い円板を考える。O を通る y 方向の軸は、その円板の重心を通る平行な直径から $|s - l_1|$ 離れている。平行軸の定理と [1.2] より

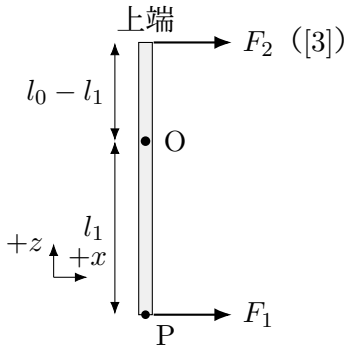
$$I_{\mathrm{O}} = \int_0^{l_0} \frac{M}{l_0}\left(\frac{a^2}{4} + (s - l_1)^2\right)\mathrm{d}s = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{l_0^2}{3} - l_0 l_1 + l_1^2\right).$$

平方完成すると、重心が P から $l_0/2$ にあることも見える形で

$$\boxed{I_{\mathrm{O}} = M\left[\frac{a^2}{4} + \frac{l_0^2}{12} + \left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)^2\right]}.$$

[2] 力を取り除いた後の運動

O を原点とし、$\theta > 0$ のとき P が O より右にある向きを正に取る。右向きの F_1 は下端 P で正の回転モーメントを与え、重力は棒を鉛直に戻す。次の図は [2] の力の作用点と、後の [3] で使う上端の作用点を共通に示す。



図の棒は $\theta = 0$ を表す。F_1 と F_2 は同じ右向きでも、O の反対側に作用するので回転モーメントは逆向きである。

[2.1] 静止角

重心は O から棒に沿って $l_1 - l_0/2$ だけ下にある。力の作用線までの垂直距離は、水平な F_1 では $l_1 \cos\theta$、鉛直な重力では重心の水平変位 $(l_1 - l_0/2)\sin\theta$ である。したがって O に関する正向きのモーメントは $F_1 l_1 \cos\theta$、重力による負向きのモーメントは $-Mg(l_1 - l_0/2)\sin\theta$。静止条件から

$$F_1 l_1 \cos\theta_0 = Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)\sin\theta_0, \qquad \boxed{\tan\theta_0 = \frac{F_1 l_1}{Mg(l_1 - l_0/2)}}.$$

$F_1 > 0$、$l_1 > l_0/2$、$|\theta_0| < \pi/2$ なので、この平衡角は正である。

[2.2] 鉛直位置での角速度

F_1 を取り除いた直後の角速度は 0 である。その後は O の固定軸に関する重力の位置エネルギーと回転運動エネルギーの和が保存する。$\theta = 0$ を位置エネルギーの基準にすると

$$U(\theta) = Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)(1 - \cos\theta), \qquad \frac{1}{2} I_{\mathrm{O}} \dot{\theta}^2 \Big|_{\theta=0} = U(\theta_0).$$

したがって角速度の大きさは

$$\boxed{\left|\dot{\theta}\right|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{2Mg(l_1 - l_0/2)(1 - \cos\theta_0)}{I_{\mathrm{O}}}}}.$$

[2.3] 微小振動の周期

力を除いた後の運動方程式は

$$I_{\mathrm{O}}\ddot{\theta} = -Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)\sin\theta.$$

$|\theta| \le \theta_0 \ll 1$ なら $\sin\theta \simeq \theta$ であり、角振動数の二乗は $Mg(l_1 - l_0/2)/I_{\mathrm{O}}$ となる。よって

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{O}}}{Mg(l_1 - l_0/2)}}}.$$

[3] ソレノイドと磁気モーメント

[3.1] 鉄芯のない長いソレノイド

ソレノイド内に軸方向の長さ ℓ の辺を置いた長方形のアンペール経路をとる。長いソレノイドの近似で外側の磁場を無視すると、内側の辺による線積分は $H\ell$、経路が囲む電流は $N\ell$ 巻分の $N\ell I$ である。アンペールの法則 $H\ell = N\ell I$ より、磁場の強さと真空中の磁束密度はそれぞれ

$$\boxed{H = NI}, \qquad \boxed{B = \mu_0 NI}.$$

以下の μ は鉄芯の透磁率である。問題の長いソレノイドと端の漏れ磁場を無視する近似を鉄芯が入った部分にも適用すると、そこでも $H = NI$ と扱え、鉄芯内の磁束密度は $B = \mu H = \mu NI$ となる。

[3.2] $X/3$ だけ挿入したときのインダクタンス

[3.3] ではインダクタンスを挿入長で微分するので、まず一般の挿入長 ξ に対する磁束鎖交数を求める。鉄芯内部の断面積は πb^2 であり、上の近似で一巻きあたりの磁束は $\Phi = \mu NI\pi b^2$ となる。鉄芯を囲む巻数は $N\xi$ で、鉄芯のない部分の磁束は設問の近似で無視する。全磁束鎖交数を LI と置けば

$$LI = (N\xi)\Phi, \qquad L(\xi) = \mu N^2 \pi b^2 \xi.$$

従って $\xi = X/3$ では

$$\boxed{L = \frac{1}{3}\mu N^2 \pi b^2 X}.$$

[3.3] 上端の力から下端の力を測る

上の $L(\xi)$ を設問の力の式に代入すると、鉄芯を引き込む力は挿入長に依らず

$$F_2 = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\mu N^2 \pi b^2 I^2.$$

棒が鉛直に保たれたとき、重力の作用線は O を通る。図のように O から下端 P までの腕は l_1、O から上端までの腕は $l_0 - l_1$ であり、二つの右向きの力のモーメントがつり合う。ゆえに

$$F_1 l_1 = F_2(l_0 - l_1), \qquad \boxed{F_1 = \frac{\mu N^2 \pi b^2 I^2}{2}\frac{l_0 - l_1}{l_1}}.$$

[3.4] 数値と単位

長さと電流を SI 単位に直すと、$l_0 - l_1 = 0.50\,\mathrm{m}$、$l_1 = 0.90\,\mathrm{m}$、$b = 0.015\,\mathrm{m}$、$I = 0.200\,\mathrm{A}$ である。[3.3] より

$$F_2 = \frac{(6.4\times10^{-3})(2000)^2\pi(0.015)^2(0.200)^2}{2} = 0.3619\ldots\,\mathrm{N}, \qquad F_1 = F_2\frac{0.50}{0.90} = 0.2011\ldots\,\mathrm{N}.$$

与えられた換算を磁場勾配にも適用すると

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1600\,\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{cm}} \times \frac{10^3}{4\pi}\,\frac{\mathrm{A/m}}{\mathrm{Oe}} \times 100\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} = \frac{4.0\times10^7}{\pi}\,\mathrm{A\,m^{-2}}.$$

$F_1 = m\,\partial H/\partial x$ なので

$$m = \frac{0.2011\ldots}{(4.0\times10^7/\pi)} = 1.579\ldots\times10^{-8}\,\mathrm{Wb\,m}.$$

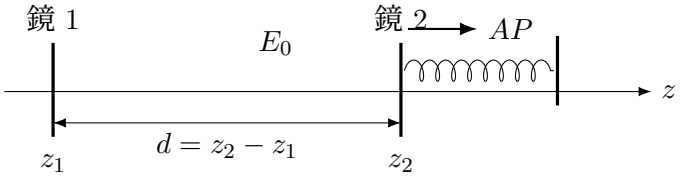
実際に $\mathrm{N/(A\,m^{-2})} = \mathrm{N\,m^2/A} = \mathrm{Wb\,m}$ である。求める空欄は有効数字二桁で

$$\boxed{1.6\times10^{-8}} \quad (\mathrm{Wb\,m}).$$

物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

z 軸の正方向を鏡 1 から鏡 2 へとり、電場は $\boldsymbol{e}_x$、磁場は $\boldsymbol{e}_y$ の方向にとる。$\boldsymbol{e}_x \times \boldsymbol{e}_y = \boldsymbol{e}_z$ である。電場の複素振幅には問題文と同じく $e^{-i\omega t}$ の時間依存を用いる。真空中の波数を $q = \omega/c$ と記し、ばね定数 k と区別する。以下の配置図はばねを付けた場合も示す。A は照射面積、P は後で求める鏡 2 への光圧で、矢印 AP は鏡 2 を右へ押す力を表す。



[1.1] 完全反射鏡の間の角周波数

完全導体表面では接線方向の電場が零である。$u = z + L/2$ とおけば鏡間は $0 < u < L$ であり、電場の空間部分は両端で零となる正弦波である。したがって

$$\sin(q_n L) = 0, \qquad q_n = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \boxed{\omega_n = \frac{n\pi c}{L}}.$$

n の偶奇にかかわらず許される。偶数 n と奇数 n はそれぞれ中心 $z = 0$ に節をもつ状態と腹をもつ状態に対応する。

[1.2] 電場・磁束密度の複素振幅

腹の電場振幅を E_0 とし、電場の全体位相を実数の正の係数に選ぶと

$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{E}}_n(z) = E_0 \sin\left[q_n\left(z + \frac{L}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_x}.$$

ファラデーの法則 $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$ の y 成分は、上記の時間依存では $\partial_z \widetilde{E}_x = i\omega_n \widetilde{B}_y$ である。よって

$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{B}}_n(z) = -i\frac{E_0}{c}\cos\left[q_n\left(z + \frac{L}{2}\right)\right]\boldsymbol{e}_y}.$$

電場の節で磁束密度は腹になり、両者は時間的に $\pi/2$ だけずれる。これらを $e^{-i\omega_n t}$ に掛けて実部を取れば、実際の電場と磁束密度が得られる。

[1.3] 鏡 2 への放射圧

$\widetilde{\boldsymbol{H}} = \widetilde{\boldsymbol{B}}/\mu_0$ を代入すると、$\widetilde{\boldsymbol{E}}_n \times \widetilde{\boldsymbol{H}}_n^*$ は純虚数である。従って鏡間の平均エネルギー流と平均運動量密度はともに零である。しかし、これは鏡への力が零であることを意味しない。定在波は振幅 $E_0/2$ の右向き進行波と左向き進行波に分解できる。右向き波の時間平均強度は $I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c(E_0/2)^2$ であり、鏡 2 で完全反射すると単位面積・単位時間あたりの運動量変化は $2I/c$ となる。従って $+z$ 方向に作用する圧力は

$$\boxed{P = \frac{2I}{c} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4}}.$$

別法として、鏡面では $E_x = 0$ であり、$|B_y|$ の振幅が E_0/c となることから、磁気圧の時間平均 $\langle B^2/(2\mu_0)\rangle = E_0^2/(4\mu_0 c^2)$ も同じ値を与える。

[2] ばねで支えられた完全反射鏡

鏡 2 に働く放射圧の力は $+z$ 方向に AP、自然長から δ だけ移動したばねの力は $-k\delta$ である。静的平衡条件 $AP - k\delta = 0$ と [1.3] より

$$\boxed{\delta = \frac{\varepsilon_0 A E_0^2}{4k} > 0}.$$

圧力に面積を掛けたものが力なので、右辺の単位は長さである。完全反射の定在波が成立する角周波数は移動後の鏡間長に応じて選ばれるが、腹の振幅を E_0 に固定したときの鏡面圧力は [1.3] と同じである。

[3.1] 部分反射鏡を通して入射する光

鏡間長を $d = z_2 - z_1$ とする。鏡 1 から鏡間へ入る進行波の複素振幅は tE_1、$t = \sqrt{1-r^2}$ である。鏡間で一往復すると、鏡 1・鏡 2 でそれぞれ $-r, -1$ の反射と位相 e^{2iqd} を受け、複素振幅は re^{2iqd} 倍される。$0 < r < 1$ だから多重反射の和は収束し、右向き進行波の振幅は

$$a = \frac{tE_1}{1 - re^{2iqd}}.$$

完全反射する鏡 2 により左向き波の振幅の大きさも $|a|$ である。実際、鏡間の電場は

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z) = a\big[e^{iq(z-z_1)} - e^{2iqd}e^{-iq(z-z_1)}\big]\boldsymbol{e}_x = 2iae^{iqd}\sin[q(z-z_2)]\boldsymbol{e}_x.$$

鏡 2 の位置では零となり、腹では二つの進行波が同位相に重なるので $E_0 = 2|a|$ となる。E_1 を正の実振幅とすると

$$\boxed{\frac{E_0}{E_1} = \frac{2\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd)}}}.$$

特に $z_1 = -L/2, z_2 = L/2$ では $d = L$ を代入する。共振条件 $qL = n\pi$ も満たす場合に限り、比は $2\sqrt{(1+r)/(1-r)}$ になる。[3.1] 単独では ω にその条件は課されていないため、上式の $d = L$ が一般の答えである。

[3.2] 半値となる鏡 1 の移動量

問題文の条件から、$z_1 = -L/2$、すなわち $d = L$ で比が極大になるように ω を選ぶ。これは $qL = n\pi$ (n は正の整数) を満たす選択であり、極大値は

$$\left(\frac{E_0}{E_1}\right)_{\max} = \frac{2\sqrt{1-r^2}}{1-r}.$$

鏡 1 を $\pm\Delta$ 動かすと $d = L \mp \Delta$ となる。比が極大値の $1/\sqrt{2}$ となる条件は、分母の二乗が共振時の 2 倍になること、すなわち

$$4r\sin^2(q\Delta) = (1-r)^2.$$

$0 < q\Delta < \pi/2$ の枝を問題文が指定しているので

$$\boxed{\Delta = \frac{c}{\omega}\arcsin\left(\frac{1-r}{2\sqrt{r}}\right)}.$$

$1/2 < r < 1$ では逆正弦の引数は 0 と 1 の間にあり、指定された範囲に入る。

[3.3] 微小振動の実効ばね定数

ここでは入射振幅 E_1 と角周波数 ω を固定し、光学場は鏡 2 の動きに即座に追従する。鏡 2 が右へ動けば $d = z_2 - z_1$ が増す。[3.1] と [1.3] より、鏡 2 を右へ押す力は

$$F_{\rm opt}(d) = AP(d), \qquad P(d) = \frac{\varepsilon_0 E_0(d)^2}{4} = \frac{\varepsilon_0(1-r^2)E_1^2}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd)}.$$

鏡 1 を固定して鏡 2 の平衡位置を $z_{2*} = L/2 + \delta$、平衡時の鏡間長を $d_* = z_{2*} - z_1$ とする。平衡条件は $k\delta = F_{\rm opt}(d_*)$ であるから、入射光があるとき $\delta > 0$ となる。平衡点からの微小変位 $x = z_2 - z_{2*}$ に対する合力は

$$F_{\rm opt}(d_* + x) - k(\delta + x) = [F'_{\rm opt}(d_*) - k]x + O(x^2) \tag{1}$$

である。従って一次項を $-k'x$ と書けば

$$\begin{aligned} k' &= k - \left.\frac{dF_{\rm opt}}{dd}\right|_{d_*} \\ &= k + \frac{4Arq\varepsilon_0(1-r^2)E_1^2\sin(2qd_*)}{\left[(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd_*)\right]^2}. \end{aligned}$$

分母は正なので、$k' - k$ の符号は $\sin(2qd_*)$ で決まる。まず $|\delta| \ll \Delta$ に基づき、δ/Δ の一次までの光ばね効果を比較する。平衡条件 $k\delta = F_{\rm opt}(d_*)$ を使うと

$$\frac{k'-k}{k} = \frac{4rq\delta\sin(2qd_*)}{(1-r)^2 + 4r\sin^2(qd_*)}.$$

共振条件 $qL = n\pi$ より、(a) の基準位置 $d = L$ では光圧の傾きが零であり、一次では $k' \simeq k$ となる。(b) の基準位置 $d = L - \Delta$ では鏡 2 を右へ動かすと共振へ近づき、光圧が増して復元力を弱める。(c) の $d = L + \Delta$ では共振から遠ざかり、光圧が減って復元力を強める。実際、(b),(c) ではそれぞれ

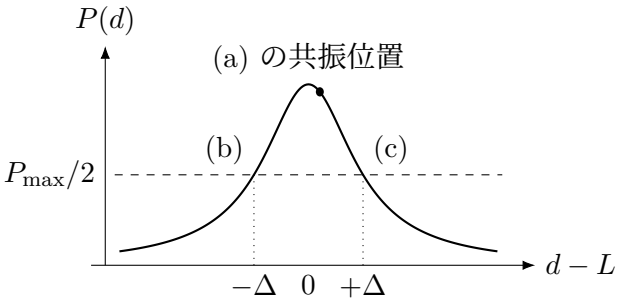
$$\frac{k'-k}{k} = \mp q\delta\cot(q\Delta) + O\big((\delta/\Delta)^2\big).$$

ここで δ/Δ の一次項だけを残す追加の近似をすれば、硬化がその次数で見えるのは (c) である。

ただし、厳密な平衡点はどの配置でも自然長から $\delta > 0$ だけ右にある。(a) では $d_* = L + \delta$ なので光圧は極大を少し過ぎて減少し、やはり復元力を増す。上式でその補正は

$$\left.\frac{k'-k}{k}\right|_{\rm (a)} = \frac{8rq^2\delta^2}{(1-r)^2} + O((q\delta)^4) > 0.$$

(b) は $d_* = L - \Delta + \delta$、(c) は $d_* = L + \Delta + \delta$ であり、$0 < \delta \ll \Delta$ の範囲では先ほどの符号を保つ。本問は δ/Δ の一次で打ち切るよう指定していないので、$k' > k$ となる答えは $\boxed{\text{(a), (c)}}$ である。(a) の硬化は一次の近似では見えない二次の効果である。



共振近傍の光圧の模式図。(a) の実際の平衡点は共振位置より右にあり、黒点はその小さなずれを表す。

物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

以下で $C = (\partial U/\partial T)$ は指定された振動子系の全熱容量とする。固体の単位質量あたりの格子比熱は、得られた C を固体の質量で割ったものである。体積や振動数は温度に依存しないものとして微分する。

[1] 古典的な 1 次元調和振動子

[1.1] 分配関数

M 個の振動子は独立なので、まず 1 個の位相空間積分 z_{cl} を計算する。運動量と位置の積分を分け、問題文のガウス積分を使うと

$$z_{\mathrm{cl}} = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\, e^{-\beta p^2/(2m)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\, e^{-\beta m\omega^2 x^2/2} \tag{1}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar}\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\sqrt{\frac{2\pi}{\beta m\omega^2}} = \frac{1}{\beta\hbar\omega}. \tag{2}$$

従って

$$\boxed{Z(T) = z_{\mathrm{cl}}^M = \left(\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\hbar\omega}\right)^M}. \tag{3}$$

[1.2] 内部エネルギー

正準分布の関係 $U = -\partial \ln Z/\partial\beta$ に上式を代入する。$\ln Z = -M\ln(\beta\hbar\omega)$ より

$$\boxed{U = \frac{M}{\beta} = Mk_{\mathrm{B}}T}. \tag{4}$$

1 振動子に運動・位置の二つの二次項があり、各項が $k_{\mathrm{B}}T/2$ を担うという等分配則とも一致する。

[1.3] 熱容量

振動数を固定して U を温度微分すると

$$\boxed{C = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_{\omega} = Mk_{\mathrm{B}}}. \tag{5}$$

[2] 単一振動数の量子的調和振動子

[2.1] 分配関数

1 振動子について $n = 0, 1, \ldots$ のボルツマン因子を和にする。$q = e^{-\beta\hbar\omega}$ は $0 < q < 1$ なので等比級数を使え、

$$z_{\mathrm{q}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega(n+1/2)} = \frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2\sinh(\beta\hbar\omega/2)}. \tag{6}$$

M 個の独立なモードでは

$$\boxed{Z(T) = \left[\frac{e^{-\beta\hbar\omega/2}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}\right]^{M}}. \tag{7}$$

[2.2] 内部エネルギー

$\ln Z = M[-\beta\hbar\omega/2 - \ln(1 - e^{-\beta\hbar\omega})]$ を β で微分すると

$$\boxed{U = M\hbar\omega\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}\right)}. \tag{8}$$

第 1 項は $T = 0$ でも残る零点エネルギー、第 2 項は熱励起のエネルギーである。

[2.3] 熱容量

$\Theta = \hbar\omega/k_{\mathrm{B}}$ を振動子の温度尺度とおくと、$\beta\hbar\omega = \Theta/T$ である。零点項は温度微分で消え、$y = \Theta/T$ について $\mathrm{d}y/\mathrm{d}T = -y/T$ を使えば

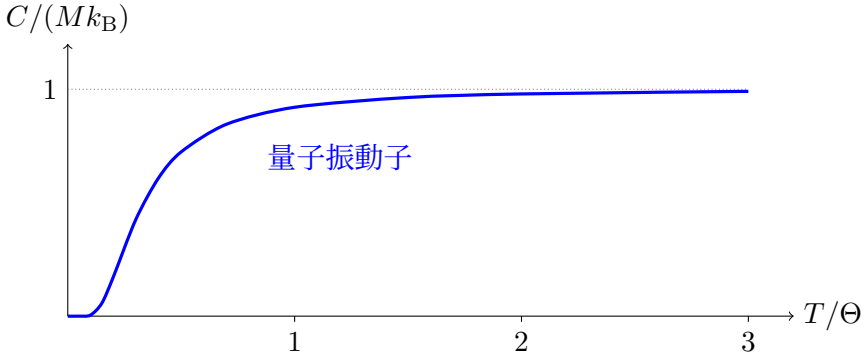
$$\boxed{C = Mk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^{2}\frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T} - 1)^{2}}} = Mk_{\mathrm{B}}\left[\frac{\Theta/(2T)}{\sinh(\Theta/(2T))}\right]^{2}. \tag{9}$$

[2.4] 低温・高温と概形

$T \ll \Theta$ では $e^{\Theta/T} \gg 1$、$T \gg \Theta$ では $\sinh(y/2) \sim y/2$ である。従って

$$\boxed{C \sim Mk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^{2} e^{-\Theta/T} \quad (T \ll \Theta)}, \qquad \boxed{C \longrightarrow Mk_{\mathrm{B}} \quad (T \gg \Theta)}. \tag{10}$$

低温では最初の励起に必要な有限のエネルギー $\hbar\omega$ が熱励起を抑える。図の横軸 T/Θ、縦軸 $C/(Mk_{\mathrm{B}})$ は無次元である。



[3] デバイ型の振動数分布

[3.1] 内部エネルギーと熱容量の積分

まず与えられた状態密度の規格化は

$$\int_0^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \frac{9N}{\omega_\mathrm{D}^3}\int_0^{\omega_\mathrm{D}} \omega^2\,\mathrm{d}\omega = 3N \tag{11}$$

であり、3 次元固体の振動モード数に一致する。各周波数のモードに [2.2] の 1 振動子のエネルギーを適用して、

$$\boxed{U = \int_0^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)\hbar\omega\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}\right]\mathrm{d}\omega}. \tag{12}$$

このうち零点エネルギーは $\frac{1}{2}\int g(\omega)\hbar\omega\,\mathrm{d}\omega = 9N\hbar\omega_\mathrm{D}/8$ であり、熱容量に寄与しない。従って、微分を積分の中に入れると

$$\boxed{C = k_\mathrm{B}\int_0^{\omega_\mathrm{D}} g(\omega)(\beta\hbar\omega)^2\frac{e^{\beta\hbar\omega}}{(e^{\beta\hbar\omega}-1)^2}\mathrm{d}\omega}. \tag{13}$$

[3.2] 低温・高温と概形

デバイ温度 $\Theta_\mathrm{D} = \hbar\omega_\mathrm{D}/k_\mathrm{B}$ を導入し、積分変数を $x = \beta\hbar\omega$ に変える。上限は Θ_D/T、また $g(\omega)\mathrm{d}\omega = 9N(T/\Theta_\mathrm{D})^3x^2\mathrm{d}x$ なので

$$C = 9Nk_\mathrm{B}\left(\frac{T}{\Theta_\mathrm{D}}\right)^3\int_0^{\Theta_\mathrm{D}/T}\frac{x^4e^x}{(e^x-1)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

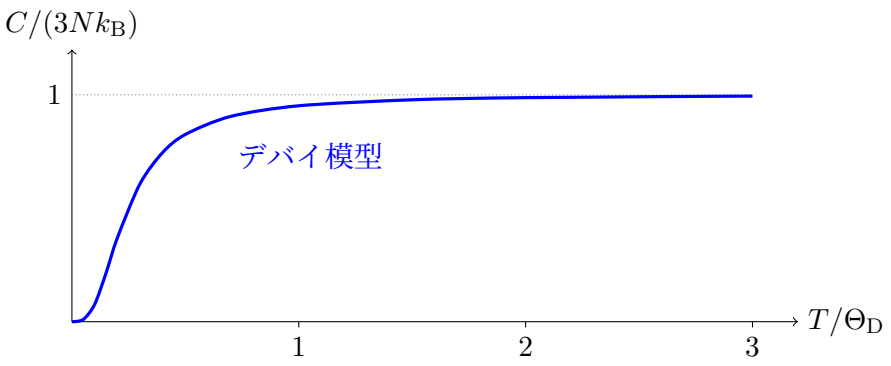
$T \ll \Theta_\mathrm{D}$ では上限が十分大きい。被積分関数は大きい x で x^4e^{-x} に近づくため、上限から先の尾部は指数的に小さく、積分の上限を無限大に延ばせる。問題文の積分値を使い、

$$\boxed{C \sim \frac{12\pi^4}{5}Nk_\mathrm{B}\left(\frac{T}{\Theta_\mathrm{D}}\right)^3 \quad (T \ll \Theta_\mathrm{D})}. \tag{15}$$

高温では全モードに k_B の熱容量が戻る。実際、$x \ll 1$ で $x^2e^x/(e^x-1)^2 \to 1$ だから、規格化したモード数を用いて

$$\boxed{C \longrightarrow 3Nk_\mathrm{B} \quad (T \gg \Theta_\mathrm{D})}. \tag{16}$$

概形は低温で原点から T^3 に沿って立ち上がり、上側の漸近値 $3Nk_\mathrm{B}$ に近づく。



[4] 3 種類の固体モデルの比較

[4.1] 同じ座標でのプロット

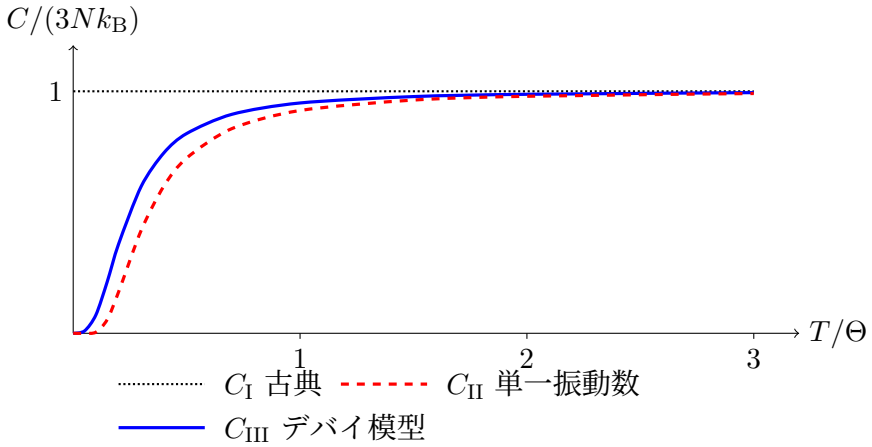
[1] と [2] の M を $3N$ に替えると、$\Theta = \hbar\omega/k_{\mathrm{B}}$ を用いて

$$C_{\mathrm{I}} = 3Nk_{\mathrm{B}}, \tag{17}$$

$$C_{\mathrm{II}} = 3Nk_{\mathrm{B}} \left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 \frac{e^{\Theta/T}}{(e^{\Theta/T}-1)^2}, \tag{18}$$

$$C_{\mathrm{III}} = 9Nk_{\mathrm{B}} \left(\frac{T}{\Theta_{\mathrm{D}}}\right)^3 \int_0^{\Theta_{\mathrm{D}}/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{19}$$

原題は ω と ω_{D} の比を指定していない。以下の図は比較例として $\omega = \omega_{\mathrm{D}}$、すなわち $\Theta = \Theta_{\mathrm{D}}$ と置き、縦軸を $3Nk_{\mathrm{B}}$ で割った。



[4.2] 高温での比較

$T \gg \Theta, \Theta_{\mathrm{D}}$ では各量子モードの平均エネルギーの主項が $k_{\mathrm{B}}T$ となる。従って $3N$ 個の振動モードはいずれも等分配則の値に戻り、

$$\boxed{C_{\mathrm{I}} = 3Nk_{\mathrm{B}}, \qquad C_{\mathrm{II}} \longrightarrow 3Nk_{\mathrm{B}}, \qquad C_{\mathrm{III}} \longrightarrow 3Nk_{\mathrm{B}}}. \tag{20}$$

有限の高温での近づき方も確認できる。$y^2e^y/(e^y-1)^2 = 1 - y^2/12 + O(y^4)$ を各モードに用いると

$$C_{\mathrm{II}} = 3Nk_{\mathrm{B}}\left[1 - \frac{1}{12}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 + O\big((\Theta/T)^4\big)\right], \qquad C_{\mathrm{III}} = 3Nk_{\mathrm{B}}\left[1 - \frac{1}{20}\left(\frac{\Theta_{\mathrm{D}}}{T}\right)^2 + O\big((\Theta_{\mathrm{D}}/T)^4\big)\right]. \tag{21}$$

後者では $g(\omega)$ による平均が $\langle\omega^2\rangle = (3N)^{-1}\int_0^{\omega_{\mathrm{D}}} g(\omega)\omega^2\,d\omega = 3\omega_{\mathrm{D}}^2/5$ であり、$1/12$ にこれを掛けて係数 $1/20$ を得る。どちらの量子曲線も古典値へ下から近づく。

[4.3] 低温での比較

古典模型を形式的に低温へ外挿すると $C_{\mathrm{I}} = 3Nk_{\mathrm{B}}$ のままであり、熱励起の量子化による凍結を表せない。一方、単一振動数の量子模型にはすべてのモードに同じ有限の励起ギャップ $\hbar\omega$ があるので

$$\boxed{C_{\mathrm{II}} \sim 3Nk_{\mathrm{B}}\left(\frac{\Theta}{T}\right)^2 e^{-\Theta/T}}. \tag{22}$$

デバイ模型には $\omega \to 0$ の低周波モードが連続して存在する。温度 T で励起しやすい $\hbar\omega \lesssim k_{\mathrm{B}}T$ のモード数は $g(\omega) \propto \omega^2$ から T^3 に比例するため、

$$\boxed{C_{\mathrm{III}} \sim \frac{12\pi^4}{5} N k_{\mathrm{B}} \left(\frac{T}{\Theta_{\mathrm{D}}}\right)^3}. \tag{23}$$

したがって $T \to 0$ では両量子模型の熱容量は零になるが、デバイ模型の冪減衰は単一振動数模型の指数減衰より遅い。ここでは格子振動だけを比較している。実在の金属では電子の熱容量が低温でおおむね T に比例する場合があり、この 3 模型の式には含まれない。

物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 観測量の交換関係

式 (3) の定義と $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を使う。$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -1$ なので

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i}{2}[\hat{a}^\dagger + \hat{a}, \hat{a}^\dagger - \hat{a}] = \frac{i}{2}\{-[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} = \boxed{i}.$$

$\hat{x}, \hat{p}$ は無次元の共役な観測量である。

[1.2] 真空のゆらぎ

$\hat{a}|0\rangle = 0$ と交換関係から、$\langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$、$\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1$ である。$\hat{a}^2$ と $(\hat{a}^\dagger)^2$ の真空期待値もゼロであり、$\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0$ だから

$$\sigma_x^2 = \langle\hat{x}^2\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_p^2 = \langle\hat{p}^2\rangle = \frac{1}{2}.$$

従って $\boxed{\sigma_x\sigma_p = 1/2}$。右辺も $\frac{1}{2}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle| = 1/2$ なので、不確定性関係の等号が成立する。

[2.1] スクイーズ変換後の係数

式 (5) で $\hat{S}^\dagger\hat{a}\hat{S}$ と $\hat{S}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{S}$ を式 (1) へ代入する。$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$ に注意すると

$$\hat{S}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{S} = \cosh(2r)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sinh^2 r - \frac{\sinh(2r)}{2}\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big),$$
$$\hat{S}^\dagger\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big)\hat{S} = \cosh(2r)\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big) - 2\sinh(2r)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \sinh(2r).$$

よって式 (6) の各係数は

$$\boxed{\omega(r)} = \boxed{\omega\cosh(2r) - \Delta\sinh(2r)},$$
$$\boxed{\Delta(r)} = \boxed{\Delta\cosh(2r) - \omega\sinh(2r)},$$
$$\boxed{E(r)} = \boxed{\hbar\omega\sinh^2 r - \frac{\hbar\Delta}{2}\sinh(2r)}.$$

$r = 0$ を入れると元の $\omega, \Delta, E = 0$ に戻る。

[2.2] 基底状態と偶数光子

$\omega > \Delta > 0$ のとき $\Delta(r) = 0$ とする実数 r は

$$\tanh(2r) = \frac{\Delta}{\omega}, \qquad \boxed{r = \frac{1}{4}\log\frac{\omega+\Delta}{\omega-\Delta}} > 0.$$

この値で $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} > 0$ とおけば $\omega(r) = \Omega$、$E(r) = \hbar(\Omega - \omega)/2$ であり、

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{H}\hat{S}(r) = \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega).$$

右辺では $\hat{a}^\dagger\hat{a} \geq 0$ なので $|0\rangle$ が基底状態である。元のハミルトニアンの基底状態とそのエネルギーは、それぞれ $\boxed{\hat{S}(r)|0\rangle}$、$\hbar(\Omega - \omega)/2$ となる。

$\hat{S}(r)$ の指数の各項 $\hat{a}^2, (\hat{a}^\dagger)^2$ は光子数を 2 だけ変える。真空は光子数 0 から始まるため、指数を展開して作用させても偶数光子の部分空間から出ない。従って $\hat{S}(r)|0\rangle$ には奇数光子成分がない。

[2.3] スクイーズされた基底状態のゆらぎ

式 (5) と観測量の定義から

$$\hat{S}^\dagger\hat{x}\hat{S} = e^{-r}\hat{x}, \qquad \hat{S}^\dagger\hat{p}\hat{S} = e^{r}\hat{p}.$$

$\hat{S}|0\rangle$ での期待値を真空期待値に移すと、平均値はどちらもゼロであり、[1.2] の分散から

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{e^{-2r}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega-\Delta}{\omega+\Delta}}}, \qquad \boxed{\sigma_p^2 = \frac{e^{2r}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega+\Delta}{\omega-\Delta}}}.$$

$\Delta > 0$ では真空に比べて x の分散が小さく、p の分散が大きい。一方、積は $\sigma_x\sigma_p = 1/2 = \frac{1}{2}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle|$ であり、等号は保たれる。$\Delta \to 0$ では両分散は $1/2$ に戻る。

[3.1] ハイゼンベルク方程式の行列

交換関係を積に適用すると

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [(\hat{a}^\dagger)^2, \hat{a}] = -2\hat{a}^\dagger, \quad [\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger] = 2\hat{a}.$$

式 (7) から $\dot{\hat{a}} = -i(\omega\hat{a} + \Delta\hat{a}^\dagger)$、$\dot{\hat{a}}^\dagger = i(\Delta\hat{a} + \omega\hat{a}^\dagger)$ となる。従って式 (8) の行列は

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \omega & \Delta \\ -\Delta & -\omega \end{pmatrix}}.$$

[3.2] 固有値と安定性

$M^2 = (\omega^2 - \Delta^2)I$ なので固有値は

$$\boxed{\lambda_\pm = \pm\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}.$$

$\omega > \Delta$ なら実数の $\lambda_\pm = \pm\Omega$ である。$M^2 = \Omega^2 I$ を指数級数の偶数次と奇数次に適用すると、$e^{-iMt} = I\cos(\Omega t) - i(M/\Omega)\sin(\Omega t)$ となり振動的かつ有界である。$\omega < \Delta$ なら $\gamma = \sqrt{\Delta^2 - \omega^2} > 0$ として $M^2 = -\gamma^2 I$ なので、同じ展開から $e^{-iMt} = I\cosh(\gamma t) - i(M/\gamma)\sinh(\gamma t)$ となる。一方のモードは指数的に増大するので不安定である。境界 $\omega = \Delta$ では固有値がともにゼロでも $M^2 = 0$ かつ $M \neq 0$ なので $e^{-iMt} = I - iMt$ は時間に比例して増大する。この意味でも有界な安定領域には含まれない。

[3.3] 境界での光子数

$\omega = \Delta$ で $M^2 = 0$ を使い、初期条件 $\hat{a}(0) = \hat{a}$、$\hat{a}^\dagger(0) = \hat{a}^\dagger$ を式 (8) に適用する。

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \end{pmatrix} = (I - iMt) \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}(t) = (1 - i\Delta t)\hat{a} - i\Delta t \hat{a}^\dagger.$$

初期真空では $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$、$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle = 1$ である。従って $\hat{a}(t)$ の生成演算子の係数だけが $\langle 0|\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|0\rangle$ に寄与し、

$$\boxed{\langle \hat{n}(t) \rangle = |-i\Delta t|^2 = \Delta^2 t^2}.$$

$t = 0$ でゼロに戻り、Δt は無次元である。