物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 観測量の交換関係

式 (3) の定義と $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を使う。$[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] = -1$ なので

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \frac{i}{2}[\hat{a}^\dagger + \hat{a}, \hat{a}^\dagger - \hat{a}] = \frac{i}{2}\{-[\hat{a}^\dagger, \hat{a}] + [\hat{a}, \hat{a}^\dagger]\} = \boxed{i}.$$

$\hat{x}, \hat{p}$ は無次元の共役な観測量である。

[1.2] 真空のゆらぎ

$\hat{a}|0\rangle = 0$ と交換関係から、$\langle 0|\hat{a}^\dagger\hat{a}|0\rangle = 0$、$\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1$ である。$\hat{a}^2$ と $(\hat{a}^\dagger)^2$ の真空期待値もゼロであり、$\langle\hat{x}\rangle = \langle\hat{p}\rangle = 0$ だから

$$\sigma_x^2 = \langle\hat{x}^2\rangle = \frac{1}{2}, \qquad \sigma_p^2 = \langle\hat{p}^2\rangle = \frac{1}{2}.$$

従って $\boxed{\sigma_x\sigma_p = 1/2}$。右辺も $\frac{1}{2}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle| = 1/2$ なので、不確定性関係の等号が成立する。

[2.1] スクイーズ変換後の係数

式 (5) で $\hat{S}^\dagger\hat{a}\hat{S}$ と $\hat{S}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{S}$ を式 (1) へ代入する。$\hat{a}\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1$ に注意すると

$$\hat{S}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{S} = \cosh(2r)\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sinh^2 r - \frac{\sinh(2r)}{2}\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big),$$
$$\hat{S}^\dagger\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big)\hat{S} = \cosh(2r)\big((\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2\big) - 2\sinh(2r)\hat{a}^\dagger\hat{a} - \sinh(2r).$$

よって式 (6) の各係数は

$$\boxed{\omega(r)} = \boxed{\omega\cosh(2r) - \Delta\sinh(2r)},$$
$$\boxed{\Delta(r)} = \boxed{\Delta\cosh(2r) - \omega\sinh(2r)},$$
$$\boxed{E(r)} = \boxed{\hbar\omega\sinh^2 r - \frac{\hbar\Delta}{2}\sinh(2r)}.$$

$r = 0$ を入れると元の $\omega, \Delta, E = 0$ に戻る。

[2.2] 基底状態と偶数光子

$\omega > \Delta > 0$ のとき $\Delta(r) = 0$ とする実数 r は

$$\tanh(2r) = \frac{\Delta}{\omega}, \qquad \boxed{r = \frac{1}{4}\log\frac{\omega+\Delta}{\omega-\Delta}} > 0.$$

この値で $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \Delta^2} > 0$ とおけば $\omega(r) = \Omega$、$E(r) = \hbar(\Omega - \omega)/2$ であり、

$$\hat{S}^\dagger(r)\hat{H}\hat{S}(r) = \hbar\Omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{\hbar}{2}(\Omega - \omega).$$

右辺では $\hat{a}^\dagger\hat{a} \geq 0$ なので $|0\rangle$ が基底状態である。元のハミルトニアンの基底状態とそのエネルギーは、それぞれ $\boxed{\hat{S}(r)|0\rangle}$、$\hbar(\Omega - \omega)/2$ となる。

$\hat{S}(r)$ の指数の各項 $\hat{a}^2, (\hat{a}^\dagger)^2$ は光子数を 2 だけ変える。真空は光子数 0 から始まるため、指数を展開して作用させても偶数光子の部分空間から出ない。従って $\hat{S}(r)|0\rangle$ には奇数光子成分がない。

[2.3] スクイーズされた基底状態のゆらぎ

式 (5) と観測量の定義から

$$\hat{S}^\dagger\hat{x}\hat{S} = e^{-r}\hat{x}, \qquad \hat{S}^\dagger\hat{p}\hat{S} = e^{r}\hat{p}.$$

$\hat{S}|0\rangle$ での期待値を真空期待値に移すと、平均値はどちらもゼロであり、[1.2] の分散から

$$\boxed{\sigma_x^2 = \frac{e^{-2r}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega-\Delta}{\omega+\Delta}}}, \qquad \boxed{\sigma_p^2 = \frac{e^{2r}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega+\Delta}{\omega-\Delta}}}.$$

$\Delta > 0$ では真空に比べて x の分散が小さく、p の分散が大きい。一方、積は $\sigma_x\sigma_p = 1/2 = \frac{1}{2}|\langle[\hat{x}, \hat{p}]\rangle|$ であり、等号は保たれる。$\Delta \to 0$ では両分散は $1/2$ に戻る。

[3.1] ハイゼンベルク方程式の行列

交換関係を積に適用すると

$$[\hat{a}^\dagger\hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [(\hat{a}^\dagger)^2, \hat{a}] = -2\hat{a}^\dagger, \quad [\hat{a}^2, \hat{a}^\dagger] = 2\hat{a}.$$

式 (7) から $\dot{\hat{a}} = -i(\omega\hat{a} + \Delta\hat{a}^\dagger)$、$\dot{\hat{a}}^\dagger = i(\Delta\hat{a} + \omega\hat{a}^\dagger)$ となる。従って式 (8) の行列は

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \omega & \Delta \\ -\Delta & -\omega \end{pmatrix}}.$$

[3.2] 固有値と安定性

$M^2 = (\omega^2 - \Delta^2)I$ なので固有値は

$$\boxed{\lambda_\pm = \pm\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}}.$$

$\omega > \Delta$ なら実数の $\lambda_\pm = \pm\Omega$ である。$M^2 = \Omega^2 I$ を指数級数の偶数次と奇数次に適用すると、$e^{-iMt} = I\cos(\Omega t) - i(M/\Omega)\sin(\Omega t)$ となり振動的かつ有界である。$\omega < \Delta$ なら $\gamma = \sqrt{\Delta^2 - \omega^2} > 0$ として $M^2 = -\gamma^2 I$ なので、同じ展開から $e^{-iMt} = I\cosh(\gamma t) - i(M/\gamma)\sinh(\gamma t)$ となる。一方のモードは指数的に増大するので不安定である。境界 $\omega = \Delta$ では固有値がともにゼロでも $M^2 = 0$ かつ $M \neq 0$ なので $e^{-iMt} = I - iMt$ は時間に比例して増大する。この意味でも有界な安定領域には含まれない。

[3.3] 境界での光子数

$\omega = \Delta$ で $M^2 = 0$ を使い、初期条件 $\hat{a}(0) = \hat{a}$、$\hat{a}^\dagger(0) = \hat{a}^\dagger$ を式 (8) に適用する。

$$\begin{pmatrix} \hat{a}(t) \\ \hat{a}^\dagger(t) \end{pmatrix} = (I - iMt) \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{a}^\dagger \end{pmatrix}, \qquad \hat{a}(t) = (1 - i\Delta t)\hat{a} - i\Delta t \hat{a}^\dagger.$$

初期真空では $\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle = 0$、$\langle \hat{a}\hat{a}^\dagger \rangle = 1$ である。従って $\hat{a}(t)$ の生成演算子の係数だけが $\langle 0|\hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)|0\rangle$ に寄与し、

$$\boxed{\langle \hat{n}(t) \rangle = |-i\Delta t|^2 = \Delta^2 t^2}.$$

$t = 0$ でゼロに戻り、Δt は無次元である。