物理工学専攻院試解答集
2024 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

出典：2023 年 8 月 29 日実施の物理学入学試験、第 1 問（原本 PDF の 2–3 ページ）。棒の下端を P、回転軸上の点を O とする。P から O までが l_1、P から上端までが l_0 であり、$l_1 > l_0/2$ だから重心は O より下にある。

[1] 棒の慣性モーメント

[1.1] 中心軸に関する慣性モーメント

棒の密度は一様なので、中心軸に垂直な断面内でも質量は一様に分布する。半径 r、幅 $\mathrm{d}r$ の円環が全質量に占める割合は $2\pi r\,\mathrm{d}r/(\pi a^2)$ である。この円環の質量は $\mathrm{d}m = M(2\pi r\,\mathrm{d}r)/(\pi a^2) = 2Mr\,\mathrm{d}r/a^2$。各円環の寄与 $r^2\mathrm{d}m$ を積分して

$$I_{\parallel} = \int_0^a r^2\,\mathrm{d}m = \int_0^a r^2 \frac{2M}{a^2} r\,\mathrm{d}r = \boxed{\frac{1}{2}Ma^2}.$$

[1.2] 薄い円板の直径に関する慣性モーメント

円板の質量は $\Delta M = M\Delta l/l_0$ である。円板面内で互いに直交する二本の直径に関する慣性モーメントは対称性から等しい。垂直軸の定理より、その和は中心軸に関する $\Delta M a^2/2$ なので、一方の直径について

$$\boxed{\Delta I_{\perp} = \frac{1}{4}\Delta M a^2 = \frac{Ma^2}{4l_0}\Delta l}.$$

厚さに伴う $O((\Delta l)^3)$ の項は、十分に薄い円板の極限で消える。

[1.3] O を通る回転軸に関する慣性モーメント

P から中心軸に沿って距離 s の位置の薄い円板を考える。O を通る y 方向の軸は、その円板の重心を通る平行な直径から $|s - l_1|$ 離れている。平行軸の定理と [1.2] より

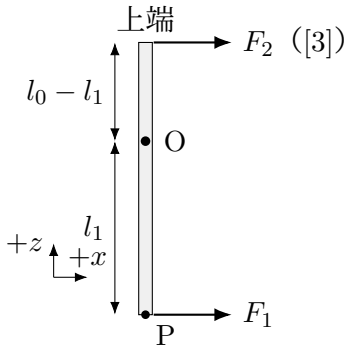
$$I_{\mathrm{O}} = \int_0^{l_0} \frac{M}{l_0}\left(\frac{a^2}{4} + (s - l_1)^2\right)\mathrm{d}s = M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{l_0^2}{3} - l_0 l_1 + l_1^2\right).$$

平方完成すると、重心が P から $l_0/2$ にあることも見える形で

$$\boxed{I_{\mathrm{O}} = M\left[\frac{a^2}{4} + \frac{l_0^2}{12} + \left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)^2\right]}.$$

[2] 力を取り除いた後の運動

O を原点とし、$\theta > 0$ のとき P が O より右にある向きを正に取る。右向きの F_1 は下端 P で正の回転モーメントを与え、重力は棒を鉛直に戻す。次の図は [2] の力の作用点と、後の [3] で使う上端の作用点を共通に示す。



図の棒は $\theta = 0$ を表す。F_1 と F_2 は同じ右向きでも、O の反対側に作用するので回転モーメントは逆向きである。

[2.1] 静止角

重心は O から棒に沿って $l_1 - l_0/2$ だけ下にある。力の作用線までの垂直距離は、水平な F_1 では $l_1 \cos\theta$、鉛直な重力では重心の水平変位 $(l_1 - l_0/2)\sin\theta$ である。したがって O に関する正向きのモーメントは $F_1 l_1 \cos\theta$、重力による負向きのモーメントは $-Mg(l_1 - l_0/2)\sin\theta$。静止条件から

$$F_1 l_1 \cos\theta_0 = Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)\sin\theta_0, \qquad \boxed{\tan\theta_0 = \frac{F_1 l_1}{Mg(l_1 - l_0/2)}}.$$

$F_1 > 0$、$l_1 > l_0/2$、$|\theta_0| < \pi/2$ なので、この平衡角は正である。

[2.2] 鉛直位置での角速度

F_1 を取り除いた直後の角速度は 0 である。その後は O の固定軸に関する重力の位置エネルギーと回転運動エネルギーの和が保存する。$\theta = 0$ を位置エネルギーの基準にすると

$$U(\theta) = Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)(1 - \cos\theta), \qquad \frac{1}{2} I_{\mathrm{O}} \dot{\theta}^2 \Big|_{\theta=0} = U(\theta_0).$$

したがって角速度の大きさは

$$\boxed{\left|\dot{\theta}\right|_{\theta=0} = \sqrt{\frac{2Mg(l_1 - l_0/2)(1 - \cos\theta_0)}{I_{\mathrm{O}}}}}.$$

[2.3] 微小振動の周期

力を除いた後の運動方程式は

$$I_{\mathrm{O}}\ddot{\theta} = -Mg\left(l_1 - \frac{l_0}{2}\right)\sin\theta.$$

$|\theta| \le \theta_0 \ll 1$ なら $\sin\theta \simeq \theta$ であり、角振動数の二乗は $Mg(l_1 - l_0/2)/I_{\mathrm{O}}$ となる。よって

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_{\mathrm{O}}}{Mg(l_1 - l_0/2)}}}.$$

[3] ソレノイドと磁気モーメント

[3.1] 鉄芯のない長いソレノイド

ソレノイド内に軸方向の長さ ℓ の辺を置いた長方形のアンペール経路をとる。長いソレノイドの近似で外側の磁場を無視すると、内側の辺による線積分は $H\ell$、経路が囲む電流は $N\ell$ 巻分の $N\ell I$ である。アンペールの法則 $H\ell = N\ell I$ より、磁場の強さと真空中の磁束密度はそれぞれ

$$\boxed{H = NI}, \qquad \boxed{B = \mu_0 NI}.$$

以下の μ は鉄芯の透磁率である。問題の長いソレノイドと端の漏れ磁場を無視する近似を鉄芯が入った部分にも適用すると、そこでも $H = NI$ と扱え、鉄芯内の磁束密度は $B = \mu H = \mu NI$ となる。

[3.2] $X/3$ だけ挿入したときのインダクタンス

[3.3] ではインダクタンスを挿入長で微分するので、まず一般の挿入長 ξ に対する磁束鎖交数を求める。鉄芯内部の断面積は πb^2 であり、上の近似で一巻きあたりの磁束は $\Phi = \mu NI\pi b^2$ となる。鉄芯を囲む巻数は $N\xi$ で、鉄芯のない部分の磁束は設問の近似で無視する。全磁束鎖交数を LI と置けば

$$LI = (N\xi)\Phi, \qquad L(\xi) = \mu N^2 \pi b^2 \xi.$$

従って $\xi = X/3$ では

$$\boxed{L = \frac{1}{3}\mu N^2 \pi b^2 X}.$$

[3.3] 上端の力から下端の力を測る

上の $L(\xi)$ を設問の力の式に代入すると、鉄芯を引き込む力は挿入長に依らず

$$F_2 = \frac{I^2}{2}\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\mu N^2 \pi b^2 I^2.$$

棒が鉛直に保たれたとき、重力の作用線は O を通る。図のように O から下端 P までの腕は l_1、O から上端までの腕は $l_0 - l_1$ であり、二つの右向きの力のモーメントがつり合う。ゆえに

$$F_1 l_1 = F_2(l_0 - l_1), \qquad \boxed{F_1 = \frac{\mu N^2 \pi b^2 I^2}{2}\frac{l_0 - l_1}{l_1}}.$$

[3.4] 数値と単位

長さと電流を SI 単位に直すと、$l_0 - l_1 = 0.50\,\mathrm{m}$、$l_1 = 0.90\,\mathrm{m}$、$b = 0.015\,\mathrm{m}$、$I = 0.200\,\mathrm{A}$ である。[3.3] より

$$F_2 = \frac{(6.4\times10^{-3})(2000)^2\pi(0.015)^2(0.200)^2}{2} = 0.3619\ldots\,\mathrm{N}, \qquad F_1 = F_2\frac{0.50}{0.90} = 0.2011\ldots\,\mathrm{N}.$$

与えられた換算を磁場勾配にも適用すると

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 1600\,\frac{\mathrm{Oe}}{\mathrm{cm}} \times \frac{10^3}{4\pi}\,\frac{\mathrm{A/m}}{\mathrm{Oe}} \times 100\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{m}} = \frac{4.0\times10^7}{\pi}\,\mathrm{A\,m^{-2}}.$$

$F_1 = m\,\partial H/\partial x$ なので

$$m = \frac{0.2011\ldots}{(4.0\times10^7/\pi)} = 1.579\ldots\times10^{-8}\,\mathrm{Wb\,m}.$$

実際に $\mathrm{N/(A\,m^{-2})} = \mathrm{N\,m^2/A} = \mathrm{Wb\,m}$ である。求める空欄は有効数字二桁で

$$\boxed{1.6\times10^{-8}} \quad (\mathrm{Wb\,m}).$$