物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 1 次元無限深井戸の固有状態

井戸の内部 $-a < x < a$ では $-\hbar^2\psi''/(2m) = E\psi$、壁では $\psi(\pm a) = 0$ である。規格化された非零の固有状態について、部分積分と壁の条件から

$$E = \int_{-a}^{a} \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' \right) dx = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a}^{a} |\psi'|^2 dx > 0. \tag{1}$$

従って $k = \sqrt{2mE}/\hbar > 0$ は実数である。内部の一般解は正弦と余弦の線形結合であり、左端の条件を満たす形は $\psi(x) = C\sin[k(x+a)]$ となる。右端の条件は

$$\psi(a) = C\sin(2ka) = 0. \tag{2}$$

非零状態では $C \neq 0$ なので、$2ka = n\pi$、すなわち $k_n = n\pi/(2a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を得る。奇数 $n = 2l+1$ $(l = 0, 1, \ldots)$ では余弦、偶数 $n = 2l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ では正弦が境界条件を満たす。規格化を行うと

$$\boxed{\psi_{2l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2l+1)\pi x}{2a} \right) \quad (l = 0, 1, \ldots)}, \qquad \boxed{\psi_{2l}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a} \right) \quad (l = 1, 2, \ldots)}.$$

したがって全準位のエネルギーは

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

特に $\psi_1(x) = a^{-1/2}\cos(\pi x/2a)$ を含む。

[1.2] 反転パリティ

奇数準位の余弦は偶関数、偶数準位の正弦は奇関数なので

$$\hat{P}\psi_n(x) = \psi_n(-x) = \boxed{(-1)^{n+1}\psi_n(x)}.$$

固有値は n が奇数なら $+1$、偶数なら -1 である。

[2.1] 座標交換

分離解のエネルギーは $E_{n_x,n_y} = E_{n_x} + E_{n_y} = \hbar^2\pi^2(n_x^2 + n_y^2)/(8ma^2)$ である。座標を交換すると

$$\hat{M}\Psi_{1,1} = \psi_1(y)\psi_1(x) = \Psi_{1,1}, \qquad \hat{M}\Psi_{2,2} = \psi_2(y)\psi_2(x) = \Psi_{2,2}.$$

両状態の $\hat{M}$ 固有値は $+1$ である。

[2.2] $\hat{H}$ と $\hat{M}$ の同時固有状態

第一励起部分空間の二つの直交した積状態は縮退している。交換演算子はこれらを入れ替えるので、正の実係数の規約に従う規格化同時固有状態は

$$\boxed{|\Psi_+\rangle = \frac{\Psi_{2,1}+\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{M}|\Psi_+\rangle = +|\Psi_+\rangle}, \qquad \boxed{|\Psi_-\rangle = \frac{\Psi_{2,1}-\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{M}|\Psi_-\rangle = -|\Psi_-\rangle}.$$

[2.3] 交換固有状態の角運動量

$x \leftrightarrow y$ は $\hat{L} = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$ の符号を反転するため

$$\hat{M}\hat{L}\hat{M} = -\hat{L}.$$

$\hat{M}|\Psi_\pm\rangle = \pm|\Psi_\pm\rangle$ より

$$\langle\Psi_\pm|\hat{L}|\Psi_\pm\rangle = \langle\Psi_\pm|\hat{M}(-\hat{L})\hat{M}|\Psi_\pm\rangle = -\langle\Psi_\pm|\hat{L}|\Psi_\pm\rangle, \qquad \boxed{\langle\hat{L}\rangle_\pm = 0}.$$

[2.4] 四回回転の固有値

ψ_1 は偶関数、ψ_2 は奇関数であり、$\hat{C}_4\Psi(x,y) = \Psi(-y,x)$ だから

$$\hat{C}_4\Psi_{1,1} = \psi_1(-y)\psi_1(x) = \Psi_{1,1}, \qquad \hat{C}_4\Psi_{2,2} = \psi_2(-y)\psi_2(x) = -\Psi_{2,2}.$$

固有値はそれぞれ $+1, -1$ である。

[2.5] $\hat{H}$ と $\hat{C}_4$ の同時固有状態

第一励起部分空間では

$$\hat{C}_4\Psi_{2,1} = -\Psi_{1,2}, \qquad \hat{C}_4\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1}.$$

従って、正の実係数の規約で規格化された回転固有状態は

$$\boxed{|\Psi'_+\rangle = \frac{\Psi_{2,1}+i\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{C}_4|\Psi'_+\rangle = +i|\Psi'_+\rangle}, \qquad \boxed{|\Psi'_-\rangle = \frac{\Psi_{2,1}-i\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{C}_4|\Psi'_-\rangle = -i|\Psi'_-\rangle}.$$

[2.6] 回転固有状態の角運動量

$A = \langle\psi_2|x|\psi_1\rangle$ と $B = \langle\psi_1|\hat{p}|\psi_2\rangle$ とおく。問題の積分公式を用いると

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} x\sin\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{2a}\Big)\,dx = \frac{32a}{9\pi^2}, \qquad B = -\frac{i\hbar\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}\cos\Big(\frac{\pi x}{2a}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\,dx = -\frac{4i\hbar}{3a}.$$

ここで $\hat{L} = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$ である。異なる積状態間の行列要素は

$$\langle\Psi_{2,1}|\hat{L}|\Psi_{1,2}\rangle = AB - \langle\psi_2|\hat{p}|\psi_1\rangle A = A(B - B^*) = -\frac{256i\hbar}{27\pi^2}.$$

対角要素は実の積状態の運動量平均がゼロなので消える。$C = \langle\Psi_{2,1}|\hat{L}|\Psi_{1,2}\rangle = -256i\hbar/(27\pi^2)$ と書けば、Ψ'_+ の交差項は $i(C - C^*)/2 = 256\hbar/(27\pi^2)$ であり、Ψ'_- ではその符号が反転する。従って

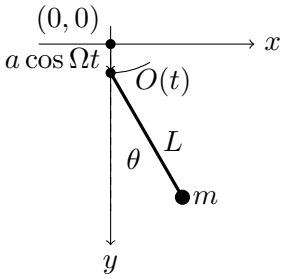
$$\boxed{\langle\Psi'_\pm|\hat{L}|\Psi'_\pm\rangle = \pm\frac{256\hbar}{27\pi^2}}.$$

回転固有値 $\pm i$ の状態が反対符号の角運動量を持つ。

物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

図の幾何では y は下向き正で、棒の方向単位ベクトルは $(\sin\theta, \cos\theta)$ である。振動する支点の変位は鉛直成分だけに加わる。



[1] おもりの座標

支点からおもりへの変位は $(L\sin\theta, L\cos\theta)$ なので

$$\boxed{x = L\sin\theta, \qquad y = a\cos\Omega t + L\cos\theta}.$$

[2] Cartesian の運動方程式

張力は支点へ向かうため x 成分は $-T\sin\theta$、下向き y 成分は $-T\cos\theta$。重力は下向き正だから

$$\boxed{m\ddot{x} = -T\sin\theta, \qquad m\ddot{y} = mg - T\cos\theta}.$$

[3] 座標の二階微分

[1] を時間微分すると

$$\boxed{\ddot{x} = L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)}, \qquad \boxed{\ddot{y} = -a\Omega^2\cos\Omega t - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)}.$$

[4] 張力を消去した角運動方程式

第一式に $\cos\theta$ を掛け、第二式に $-\sin\theta$ を掛けて加えると張力が消え、

$$m(\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta) = -mg\sin\theta.$$

[3] の加速度を代入すると $\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta = L\ddot{\theta} + a\Omega^2\cos\Omega t\sin\theta$ なので

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{a\Omega^2}{L}\cos\Omega t\sin\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta}.$$

[5] 支点が静止したときの小振動

微小角では $\sin\theta \simeq \theta$。$a = 0$ の方程式は

$$\ddot{\theta}_0 + \frac{g}{L}\theta_0 = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

初期条件 $\theta_0(0) = A$, $\dot{\theta}_0(0) = 0$ より

$$\boxed{\theta_0(t) = A\cos\omega_0 t}.$$

[6] 振幅 a の一次応答

小角の方程式を $\theta = \theta_0 + a\theta_1$ として展開する。a^0 の項は [5] の式、a^1 の項は

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = -\frac{\Omega^2}{L}\theta_0(t)\cos\Omega t = -\frac{A\Omega^2}{2L}\left\{\cos[(\Omega+\omega_0)t] + \cos[(\Omega-\omega_0)t]\right\}.$$

右辺には積和公式による二つの側帯波が現れる。

[7] 二つの側帯波をもつ特解

特解 $\theta_1 = u_1\cos[(\Omega+\omega_0)t] + u_2\cos[(\Omega-\omega_0)t]$ を [6] に代入する。各周波数の係数条件は

$$\left[\omega_0^2 - (\Omega+\omega_0)^2\right]u_1 = -\frac{A\Omega^2}{2L}, \qquad \left[\omega_0^2 - (\Omega-\omega_0)^2\right]u_2 = -\frac{A\Omega^2}{2L}.$$

$\Omega > 0$ なので第 1 の分母は零にならず、第 2 の分母が零となるのは $\Omega = 2\omega_0$ のときである。$A \neq 0$ のとき、有限な二側帯波特解が存在する条件は

$$\boxed{\Omega \neq 2\sqrt{\frac{g}{L}}}.$$

そのとき

$$\boxed{u_1 = \frac{A\Omega}{2L\left(\Omega + 2\sqrt{g/L}\right)}, \qquad u_2 = \frac{A\Omega}{2L\left(\Omega - 2\sqrt{g/L}\right)}}.$$

共鳴点 $\Omega = 2\omega_0$ では差周波側帯波が固有振動と一致し、通常は永年項を含むためこの有界な形の特解は得られない。$A = 0$ なら一次の駆動自体がなく、$\theta_1 = 0$ は共鳴点でも解である。

物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 静止円柱内の 1 粒子分配関数

確率密度の規格化は

$$1 = \frac{1}{h^3 L \widetilde{Z}_1} \int_{-L/2}^{L/2} dz \int_{x^2+y^2\le R^2} dx\, dy \int_{\mathbb{R}^3} d^3p\, e^{-p^2/(2mkT)}.$$

運動量積分は $(2\pi mkT)^{3/2}$、断面積は πR^2、高さ積分は L なので

$$\widetilde{Z}_1(T,R) = \frac{\pi R^2}{h^3}(2\pi mkT)^{3/2} = \boxed{\gamma R^2 (kT)^{3/2}}, \qquad \gamma = \frac{\pi^{5/2}(2m)^{3/2}}{h^3}.$$

[1.2] 自由エネルギー密度

古典的な同種粒子の分配関数は $Z_N = [L\widetilde{Z}_1]^N/N!$ である。Stirling 近似から

$$F = -kT \log Z_N \simeq -NkT \left[\log\left(\frac{L\widetilde{Z}_1}{N} \right) + 1 \right].$$

$\nu = N/L$ を固定して割り算すると

$$\boxed{\widetilde{F} = \frac{F}{L} = -\nu kT \left[\log\left(\frac{\widetilde{Z}_1}{\nu} \right) + 1 \right] = -\nu kT (\log \widetilde{Z}_1 - \log \nu + 1)}.$$

[1.3] 静止容器の側圧

半径を dR だけ準静的に増やすと体積変化は $dV = 2\pi RL\, dR$。したがって

$$P = -\frac{1}{2\pi R}\left(\frac{\partial \widetilde{F}}{\partial R} \right)_{T,\nu} = \boxed{\frac{\nu kT}{2\pi R \widetilde{Z}_1}\left(\frac{\partial \widetilde{Z}_1}{\partial R} \right)_T}.$$

ここで [1.1] の $\widetilde{Z}_1 \propto R^2$ を使うと

$$\boxed{P = \frac{\nu kT}{\pi R^2}}.$$

[2.1] 回転系ハミルトニアンの最小値

$r^2 = x^2 + y^2$ とし平方完成すると

$$H_1 - \omega M_1 = \frac{(p_x + m\omega y)^2 + (p_y - m\omega x)^2 + p_z^2}{2m} - \frac{m\omega^2 r^2}{2}.$$

$r \le R$ のもとでは二乗項をゼロにし、$r = R$ としたとき最小になる。よって

$$\boxed{\min(H_1 - \omega M_1) = -\frac{m\omega^2 R^2}{2} = -\epsilon}, \qquad \epsilon = \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

$\omega = 0$ では最小値は 0 である。

[2.2] 平衡流の速度場

位置 $\boldsymbol{r}$ を固定した運動量分布は

$$\exp\left[-\frac{(p_x + m\omega y)^2 + (p_y - m\omega x)^2 + p_z^2}{2mkT}\right]$$

に比例するガウス分布である。その中心運動量を m で割れば局所平均速度となる：

$$\boxed{v_x(\boldsymbol{r}) = -\omega y, \qquad v_y(\boldsymbol{r}) = \omega x, \qquad v_z(\boldsymbol{r}) = 0}.$$

これは z 軸周りの剛体回転 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ である。

[2.3] 回転系の規格化定数

平方完成した運動量積分は通常の Gaussian と同じであり、位置に残る重みは $e^{m\omega^2 r^2/(2kT)}$ である。$\lambda = \epsilon/(kT)$ とすると

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}_1(T, R, \omega) &= \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3}\, 2\pi \int_0^R r\, e^{m\omega^2 r^2/(2kT)} dr \\
&= \frac{(2\pi mkT)^{3/2}}{h^3} \frac{2\pi kT}{m\omega^2} (e^{\lambda} - 1) \\
&= \boxed{\gamma R^2 (kT)^{3/2} \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}} = \boxed{\frac{2\gamma (kT)^{5/2}}{m\omega^2} (e^{\epsilon/(kT)} - 1)}.
\end{aligned}$$

ここでは $\omega \neq 0$ とした。$\lambda \to 0$ で $(e^{\lambda} - 1)/\lambda \to 1$ となり、[1.1] の非回転極限に戻る。

[2.4] 回転容器の側圧

全粒子の角運動量を $M = \sum_j M_{1,j}$ とし、逆温度を $\beta = 1/(kT)$ と書く。角速度 ω の容器が粒子に及ぼすトルクの仕事率は $\omega\, d\langle M \rangle/dt$ なので、準静的な変化での第一法則は

$$d\langle H \rangle = T\, dS + \omega\, d\langle M \rangle - P\, dV \qquad (N \text{ 固定})$$

である。回転分布 $e^{-\beta(H-\omega M)}$ から得る熱力学ポテンシャルを F_ω と書くと、[1.2] と同じ粒子数の数え上げにより

$$\begin{aligned} F_\omega &= -kT\log\frac{[L\widetilde{Z}_1(T,R,\omega)]^N}{N!} = \langle H\rangle - TS - \omega\langle M\rangle \\ &\simeq -NkT\left[\log\left(\frac{L\widetilde{Z}_1(T,R,\omega)}{N}\right)+1\right], \\ dF_\omega &= -S\,dT - \langle M\rangle\,d\omega - P\,dV. \end{aligned}$$

従って側圧は T,ω,N,L 固定での半径微分から得られる。$dV = 2\pi RL\,dR$ と [2.3] を用いると

$$P = \frac{\nu kT}{2\pi R}\left(\frac{\partial\log\widetilde{Z}_1}{\partial R}\right)_{T,\omega} = \boxed{\frac{\nu m\omega^2}{2\pi(1-e^{-\lambda})}}, \qquad \lambda = \frac{mR^2\omega^2}{2kT}.$$

角速度固定で $T\to 0$、すなわち $\lambda\to\infty$ とすると

$$\boxed{P \longrightarrow \frac{\nu m\omega^2}{2\pi}}.$$

また $\lambda\to 0$ では $P\to \nu kT/(\pi R^2)$ となり、静止容器の式と一致する。

[2.5] 慣性モーメント

既に得た局所平均速度は $\langle \boldsymbol{v}\mid r\rangle = (-\omega y,\omega x,0)$ である。よって一粒子の軸まわり角運動量は $\langle M_1\mid r\rangle = x(m\omega x) - y(-m\omega y) = m\omega r^2$、全粒子について $\langle M\rangle = Nm\omega\langle r^2\rangle$ となる。ここで $I = Nm\langle r^2\rangle$ が質量分布の慣性モーメントである。回転分配関数は $e^{\beta\omega M_1}$ を含むため

$$I = \frac{\langle M\rangle}{\omega} = \frac{NkT}{\omega}\left(\frac{\partial\log\widetilde{Z}_1}{\partial\omega}\right)_{T,R}.$$

$$\log\widetilde{Z}_1 = (\text{terms independent of }\omega) - 2\log|\omega| + \log(e^\lambda - 1), \qquad \partial_\omega\lambda = \frac{2\lambda}{\omega}.$$

従って $\omega\neq 0$ で

$$\boxed{I = \frac{2N}{\omega^2}\left[\frac{\epsilon}{1-e^{-\epsilon/(kT)}} - kT\right]}.$$

極限 $\omega\to 0$ では $I\to NmR^2/2$、$T\to 0$ では $I\to NmR^2$ で、後者は粒子が側壁近くに集まることに対応する。

[2.6] 固定角速度の熱容量

固定した R,L,N,ω のもとで加熱すると、[2.4] の第一法則から、加えた熱は回転仕事を差し引いた

$$\delta Q = d\langle H\rangle - \omega\,d\langle M\rangle = d\langle H-\omega M\rangle$$

となる。従って固定角速度の熱容量では共回転系の平均 $U_\omega = \langle H-\omega M\rangle$ を温度微分する。回転分布の逆温度微分もこの同じ平均を与え、

$$U_\omega = \langle H-\omega M\rangle = -N\left(\frac{\partial\log\widetilde{Z}_1}{\partial\beta}\right)_{\omega,R}.$$

同じ式は $\langle H\rangle = \frac{3}{2}NkT + \frac{1}{2}I\omega^2$ と $\langle M\rangle = I\omega$ から $U_\omega = \frac{3}{2}NkT - \frac{1}{2}I\omega^2$ としても得られる。$\widetilde{Z}_1 \propto \beta^{-5/2}(e^{\beta\epsilon}-1)$ より

$$U_\omega = \frac{5}{2}NkT - \frac{N\epsilon}{1-e^{-\epsilon/(kT)}}.$$

よって ω 固定の熱容量は

$$\boxed{C_\omega = \left(\frac{\partial U_\omega}{\partial T}\right)_\omega = \frac{5}{2}Nk - \frac{N\epsilon^2}{kT^2}\frac{e^{-\epsilon/(kT)}}{\left(1-e^{-\epsilon/(kT)}\right)^2}}.$$

上式の減算項を $Nk\lambda^2 e^{-\lambda}/(1-e^{-\lambda})^2$ と書けば、高温の $\lambda \to 0$ では $1-e^{-\lambda} \sim \lambda$ から Nk に、低温の $\lambda \to \infty$ では 0 に近づく。従って非零の ω を固定した高温極限では $C_\omega \to \frac{3}{2}Nk$、低温極限では $C_\omega \to \frac{5}{2}Nk$ である。$\omega = 0$ では式の連続極限から $C_0 = \frac{3}{2}Nk$ がすべての T で得られる。

物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] Laplace 方程式の制約

真空中では $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ である。$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ と $\phi = ax^2 + by^2 + cz^2$ を代入すると

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla^2\phi = -2(a+b+c), \qquad \boxed{a+b+c=0}.$$

[1.2] Newton–Lorentz 方程式

電場力は $-q\nabla\phi$、磁場力は $q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ だから

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -q\nabla\phi(\boldsymbol{r}(t)) + q\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \boldsymbol{B}}.$$

以降 $a = b = -c/2 < 0$ なので $c > 0$ である。$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とすると

$$m\ddot{x} = qcx + qB\dot{y}, \qquad m\ddot{y} = qcy - qB\dot{x}, \qquad m\ddot{z} = -2qcz.$$

[1.3] z 方向の単振動

$m\ddot{z} = -2qcz$ は復元力をもつ調和振動子であり、角振動数は

$$\boxed{\omega_z = \sqrt{\frac{2qc}{m}}}.$$

[1.4] xy 面内の複素方程式

$u = x + iy$ とおく。上の x, y 方程式の第 2 式に i を掛けて第 1 式に加えると

$$m\ddot{u} = qc(x + iy) + qB(\dot{y} - i\dot{x}) = qcu - iqB\dot{u},$$

したがって

$$\boxed{m\ddot{u} + iqB\dot{u} - qcu = 0}.$$

[1.5] 横方向の束縛条件

固有解 $u(t) = u_0 e^{-i\sigma t}$ を代入すると

$$m\sigma^2 - qB\sigma + qc = 0, \qquad \boxed{\sigma_\pm = \frac{qB \pm \sqrt{q^2B^2 - 4mqc}}{2m}}.$$

初期値によらず有界な振動解を得るには、2 根が実数かつ異なる必要がある。判別式が正なら両根は実数で解は 2 つの振動の重ね合わせとなる。判別式が負なら指数的に増大する解があり、ゼロなら重根に伴う $te^{-i\sigma t}$ 型の解があり、いずれも全初期条件で有界とはならない。$q>0$ を用いると条件は

$$q^2B^2 - 4mqc > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{qB^2 > 4mc}.$$

[2.1] Mathieu 方程式の係数

磁場を無視した x 方向の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2q\alpha x\cos\omega t.$$

$\tau = \omega t/2$ とすると $d^2/dt^2 = (\omega^2/4)d^2/d\tau^2$ かつ $\cos\omega t = \cos 2\tau$ だから

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{8q\alpha}{m\omega^2}x\cos 2\tau = 0.$$

式 (3) と係数を比較して

$$\boxed{\lambda = \frac{4q\alpha}{m\omega^2}}.$$

[2.2] Fourier 係数の漸化式

式 (4) の各項を 2 回微分すると係数は $-(2n+\Omega)^2C_n$ となる。また

$$2\lambda\cos 2\tau\cos[(2n+\Omega)\tau] = \lambda\cos[(2(n+1)+\Omega)\tau] + \lambda\cos[(2(n-1)+\Omega)\tau].$$

同じ周波数ごとに係数を比べると

$$\boxed{(2n+\Omega)^2C_n = \lambda(C_{n-1}+C_{n+1})}.$$

[2.3] 小さい λ での周波数

$C_{\pm 2}$ を無視した $n=\pm 1$ の式と、$n=0$ の式は

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\lambda}{(2+\Omega)^2}, \qquad \frac{C_{-1}}{C_0} = \frac{\lambda}{(\Omega-2)^2}, \qquad \Omega^2 = \lambda\frac{C_{-1}+C_1}{C_0} = \lambda^2\left[\frac{1}{(2-\Omega)^2} + \frac{1}{(2+\Omega)^2}\right].$$

$0<\Omega<1$ の枝では角括弧内の分母がゼロにならず、$\lambda\to 0$ で上の中心式から $\Omega^2/\lambda^2 \to 1/2$ を得る。従って $\Omega = O(\lambda)$ であり、分母の Ω 依存を 1 次近似の係数比で落とすと

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\lambda}{4} + O(\lambda^2), \qquad \frac{C_{-1}}{C_0} = \frac{\lambda}{4} + O(\lambda^2).$$

中心式の右辺は $\lambda^2[1/2 + O(\Omega^2)]$ であり

$$\Omega^2 = \frac{\lambda^2}{2} + O(\lambda^4), \qquad \Omega = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + O(\lambda^3).$$

問題の $0<\Omega<1$ と $\lambda>0$ に合う枝を選ぶと、求める 1 次の定数は

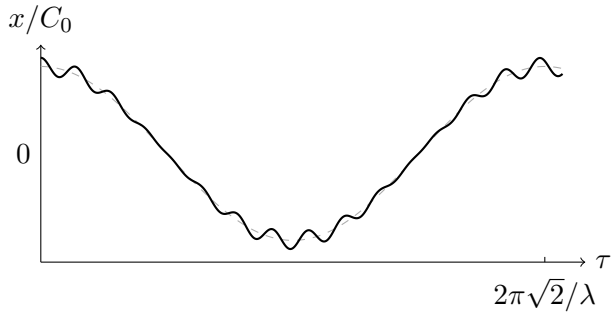
$$\boxed{\frac{C_{-1}}{C_0} = \epsilon\lambda, \quad \frac{C_1}{C_0} = \epsilon\lambda, \quad \Omega = \delta\lambda, \qquad \epsilon = \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

[2.4] 近似解と概形

3 つのモードを残すと

$$x(\tau) = C_0\left[\cos(\Omega\tau) + \frac{\lambda}{4}\cos((2+\Omega)\tau) + \frac{\lambda}{4}\cos((2-\Omega)\tau)\right] + O(\lambda^2)$$
$$= \boxed{C_0\left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos 2\tau\right)\cos\left(\frac{\lambda\tau}{\sqrt{2}}\right)} + O(\lambda^2).$$

ここで $O(\lambda^2)$ の精度は、図に示す緩やかな振動の一周期程度、すなわち $\tau = O(\lambda^{-1})$ までを対象とする。さらに長時間では Ω の省略項による位相誤差が蓄積する。緩やかな余弦が長周期振動を表し、因子 $1 + (\lambda/2)\cos 2\tau$ が小さな速い変調を加える。下図は例として $\lambda = 0.2$ とした x/C_0 の概形で、横軸は τ である。



破線は緩やかな振動のみ、実線は 1 次の速い変調も含む。