物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] Laplace 方程式の制約

真空中では $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ である。$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi$ と $\phi = ax^2 + by^2 + cz^2$ を代入すると

$$0 = \nabla \cdot \boldsymbol{E} = -\nabla^2\phi = -2(a+b+c), \qquad \boxed{a+b+c=0}.$$

[1.2] Newton–Lorentz 方程式

電場力は $-q\nabla\phi$、磁場力は $q\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}$ だから

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{r}}(t) = -q\nabla\phi(\boldsymbol{r}(t)) + q\dot{\boldsymbol{r}}(t) \times \boldsymbol{B}}.$$

以降 $a = b = -c/2 < 0$ なので $c > 0$ である。$\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とすると

$$m\ddot{x} = qcx + qB\dot{y}, \qquad m\ddot{y} = qcy - qB\dot{x}, \qquad m\ddot{z} = -2qcz.$$

[1.3] z 方向の単振動

$m\ddot{z} = -2qcz$ は復元力をもつ調和振動子であり、角振動数は

$$\boxed{\omega_z = \sqrt{\frac{2qc}{m}}}.$$

[1.4] xy 面内の複素方程式

$u = x + iy$ とおく。上の x, y 方程式の第 2 式に i を掛けて第 1 式に加えると

$$m\ddot{u} = qc(x + iy) + qB(\dot{y} - i\dot{x}) = qcu - iqB\dot{u},$$

したがって

$$\boxed{m\ddot{u} + iqB\dot{u} - qcu = 0}.$$

[1.5] 横方向の束縛条件

固有解 $u(t) = u_0 e^{-i\sigma t}$ を代入すると

$$m\sigma^2 - qB\sigma + qc = 0, \qquad \boxed{\sigma_\pm = \frac{qB \pm \sqrt{q^2B^2 - 4mqc}}{2m}}.$$

初期値によらず有界な振動解を得るには、2 根が実数かつ異なる必要がある。判別式が正なら両根は実数で解は 2 つの振動の重ね合わせとなる。判別式が負なら指数的に増大する解があり、ゼロなら重根に伴う $te^{-i\sigma t}$ 型の解があり、いずれも全初期条件で有界とはならない。$q>0$ を用いると条件は

$$q^2B^2 - 4mqc > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{qB^2 > 4mc}.$$

[2.1] Mathieu 方程式の係数

磁場を無視した x 方向の運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2q\alpha x\cos\omega t.$$

$\tau = \omega t/2$ とすると $d^2/dt^2 = (\omega^2/4)d^2/d\tau^2$ かつ $\cos\omega t = \cos 2\tau$ だから

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + \frac{8q\alpha}{m\omega^2}x\cos 2\tau = 0.$$

式 (3) と係数を比較して

$$\boxed{\lambda = \frac{4q\alpha}{m\omega^2}}.$$

[2.2] Fourier 係数の漸化式

式 (4) の各項を 2 回微分すると係数は $-(2n+\Omega)^2C_n$ となる。また

$$2\lambda\cos 2\tau\cos[(2n+\Omega)\tau] = \lambda\cos[(2(n+1)+\Omega)\tau] + \lambda\cos[(2(n-1)+\Omega)\tau].$$

同じ周波数ごとに係数を比べると

$$\boxed{(2n+\Omega)^2C_n = \lambda(C_{n-1}+C_{n+1})}.$$

[2.3] 小さい λ での周波数

$C_{\pm 2}$ を無視した $n=\pm 1$ の式と、$n=0$ の式は

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\lambda}{(2+\Omega)^2}, \qquad \frac{C_{-1}}{C_0} = \frac{\lambda}{(\Omega-2)^2}, \qquad \Omega^2 = \lambda\frac{C_{-1}+C_1}{C_0} = \lambda^2\left[\frac{1}{(2-\Omega)^2} + \frac{1}{(2+\Omega)^2}\right].$$

$0<\Omega<1$ の枝では角括弧内の分母がゼロにならず、$\lambda\to 0$ で上の中心式から $\Omega^2/\lambda^2 \to 1/2$ を得る。従って $\Omega = O(\lambda)$ であり、分母の Ω 依存を 1 次近似の係数比で落とすと

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{\lambda}{4} + O(\lambda^2), \qquad \frac{C_{-1}}{C_0} = \frac{\lambda}{4} + O(\lambda^2).$$

中心式の右辺は $\lambda^2[1/2 + O(\Omega^2)]$ であり

$$\Omega^2 = \frac{\lambda^2}{2} + O(\lambda^4), \qquad \Omega = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + O(\lambda^3).$$

問題の $0<\Omega<1$ と $\lambda>0$ に合う枝を選ぶと、求める 1 次の定数は

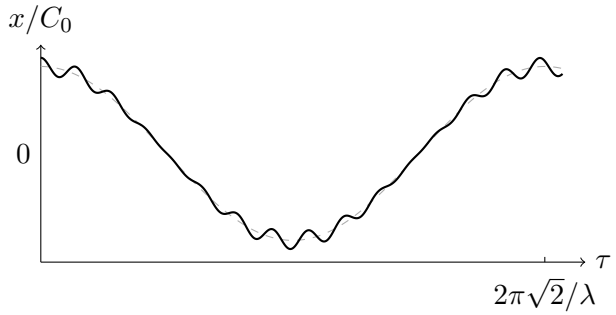
$$\boxed{\frac{C_{-1}}{C_0} = \epsilon\lambda, \quad \frac{C_1}{C_0} = \epsilon\lambda, \quad \Omega = \delta\lambda, \qquad \epsilon = \frac{1}{4}, \quad \delta = \frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

[2.4] 近似解と概形

3 つのモードを残すと

$$x(\tau) = C_0\left[\cos(\Omega\tau) + \frac{\lambda}{4}\cos((2+\Omega)\tau) + \frac{\lambda}{4}\cos((2-\Omega)\tau)\right] + O(\lambda^2)$$
$$= \boxed{C_0\left(1 + \frac{\lambda}{2}\cos 2\tau\right)\cos\left(\frac{\lambda\tau}{\sqrt{2}}\right)} + O(\lambda^2).$$

ここで $O(\lambda^2)$ の精度は、図に示す緩やかな振動の一周期程度、すなわち $\tau = O(\lambda^{-1})$ までを対象とする。さらに長時間では Ω の省略項による位相誤差が蓄積する。緩やかな余弦が長周期振動を表し、因子 $1 + (\lambda/2)\cos 2\tau$ が小さな速い変調を加える。下図は例として $\lambda = 0.2$ とした x/C_0 の概形で、横軸は τ である。



破線は緩やかな振動のみ、実線は 1 次の速い変調も含む。