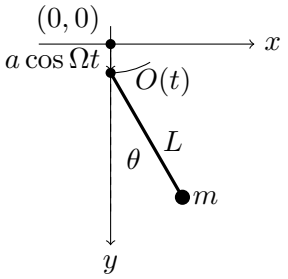
物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

図の幾何では y は下向き正で、棒の方向単位ベクトルは $(\sin\theta, \cos\theta)$ である。振動する支点の変位は鉛直成分だけに加わる。



[1] おもりの座標

支点からおもりへの変位は $(L\sin\theta, L\cos\theta)$ なので

$$\boxed{x = L\sin\theta, \qquad y = a\cos\Omega t + L\cos\theta}.$$

[2] Cartesian の運動方程式

張力は支点へ向かうため x 成分は $-T\sin\theta$、下向き y 成分は $-T\cos\theta$。重力は下向き正だから

$$\boxed{m\ddot{x} = -T\sin\theta, \qquad m\ddot{y} = mg - T\cos\theta}.$$

[3] 座標の二階微分

[1] を時間微分すると

$$\boxed{\ddot{x} = L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)}, \qquad \boxed{\ddot{y} = -a\Omega^2\cos\Omega t - L(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)}.$$

[4] 張力を消去した角運動方程式

第一式に $\cos\theta$ を掛け、第二式に $-\sin\theta$ を掛けて加えると張力が消え、

$$m(\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta) = -mg\sin\theta.$$

[3] の加速度を代入すると $\ddot{x}\cos\theta - \ddot{y}\sin\theta = L\ddot{\theta} + a\Omega^2\cos\Omega t\sin\theta$ なので

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{a\Omega^2}{L}\cos\Omega t\sin\theta = -\frac{g}{L}\sin\theta}.$$

[5] 支点が静止したときの小振動

微小角では $\sin\theta \simeq \theta$。$a = 0$ の方程式は

$$\ddot{\theta}_0 + \frac{g}{L}\theta_0 = 0, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}.$$

初期条件 $\theta_0(0) = A$, $\dot{\theta}_0(0) = 0$ より

$$\boxed{\theta_0(t) = A\cos\omega_0 t}.$$

[6] 振幅 a の一次応答

小角の方程式を $\theta = \theta_0 + a\theta_1$ として展開する。a^0 の項は [5] の式、a^1 の項は

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2\theta_1 = -\frac{\Omega^2}{L}\theta_0(t)\cos\Omega t = -\frac{A\Omega^2}{2L}\left\{\cos[(\Omega+\omega_0)t] + \cos[(\Omega-\omega_0)t]\right\}.$$

右辺には積和公式による二つの側帯波が現れる。

[7] 二つの側帯波をもつ特解

特解 $\theta_1 = u_1\cos[(\Omega+\omega_0)t] + u_2\cos[(\Omega-\omega_0)t]$ を [6] に代入する。各周波数の係数条件は

$$\left[\omega_0^2 - (\Omega+\omega_0)^2\right]u_1 = -\frac{A\Omega^2}{2L}, \qquad \left[\omega_0^2 - (\Omega-\omega_0)^2\right]u_2 = -\frac{A\Omega^2}{2L}.$$

$\Omega > 0$ なので第 1 の分母は零にならず、第 2 の分母が零となるのは $\Omega = 2\omega_0$ のときである。$A \neq 0$ のとき、有限な二側帯波特解が存在する条件は

$$\boxed{\Omega \neq 2\sqrt{\frac{g}{L}}}.$$

そのとき

$$\boxed{u_1 = \frac{A\Omega}{2L\left(\Omega + 2\sqrt{g/L}\right)}, \qquad u_2 = \frac{A\Omega}{2L\left(\Omega - 2\sqrt{g/L}\right)}}.$$

共鳴点 $\Omega = 2\omega_0$ では差周波側帯波が固有振動と一致し、通常は永年項を含むためこの有界な形の特解は得られない。$A = 0$ なら一次の駆動自体がなく、$\theta_1 = 0$ は共鳴点でも解である。