物理工学専攻院試解答集
2023 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 1 次元無限深井戸の固有状態

井戸の内部 $-a < x < a$ では $-\hbar^2\psi''/(2m) = E\psi$、壁では $\psi(\pm a) = 0$ である。規格化された非零の固有状態について、部分積分と壁の条件から

$$E = \int_{-a}^{a} \psi^* \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' \right) dx = \frac{\hbar^2}{2m} \int_{-a}^{a} |\psi'|^2 dx > 0. \tag{1}$$

従って $k = \sqrt{2mE}/\hbar > 0$ は実数である。内部の一般解は正弦と余弦の線形結合であり、左端の条件を満たす形は $\psi(x) = C\sin[k(x+a)]$ となる。右端の条件は

$$\psi(a) = C\sin(2ka) = 0. \tag{2}$$

非零状態では $C \neq 0$ なので、$2ka = n\pi$、すなわち $k_n = n\pi/(2a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を得る。奇数 $n = 2l+1$ $(l = 0, 1, \ldots)$ では余弦、偶数 $n = 2l$ $(l = 1, 2, \ldots)$ では正弦が境界条件を満たす。規格化を行うと

$$\boxed{\psi_{2l+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{(2l+1)\pi x}{2a} \right) \quad (l = 0, 1, \ldots)}, \qquad \boxed{\psi_{2l}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{l\pi x}{a} \right) \quad (l = 1, 2, \ldots)}.$$

したがって全準位のエネルギーは

$$\boxed{E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

特に $\psi_1(x) = a^{-1/2}\cos(\pi x/2a)$ を含む。

[1.2] 反転パリティ

奇数準位の余弦は偶関数、偶数準位の正弦は奇関数なので

$$\hat{P}\psi_n(x) = \psi_n(-x) = \boxed{(-1)^{n+1}\psi_n(x)}.$$

固有値は n が奇数なら $+1$、偶数なら -1 である。

[2.1] 座標交換

分離解のエネルギーは $E_{n_x,n_y} = E_{n_x} + E_{n_y} = \hbar^2\pi^2(n_x^2 + n_y^2)/(8ma^2)$ である。座標を交換すると

$$\hat{M}\Psi_{1,1} = \psi_1(y)\psi_1(x) = \Psi_{1,1}, \qquad \hat{M}\Psi_{2,2} = \psi_2(y)\psi_2(x) = \Psi_{2,2}.$$

両状態の $\hat{M}$ 固有値は $+1$ である。

[2.2] $\hat{H}$ と $\hat{M}$ の同時固有状態

第一励起部分空間の二つの直交した積状態は縮退している。交換演算子はこれらを入れ替えるので、正の実係数の規約に従う規格化同時固有状態は

$$\boxed{|\Psi_+\rangle = \frac{\Psi_{2,1}+\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{M}|\Psi_+\rangle = +|\Psi_+\rangle}, \qquad \boxed{|\Psi_-\rangle = \frac{\Psi_{2,1}-\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{M}|\Psi_-\rangle = -|\Psi_-\rangle}.$$

[2.3] 交換固有状態の角運動量

$x \leftrightarrow y$ は $\hat{L} = -i\hbar(x\partial_y - y\partial_x)$ の符号を反転するため

$$\hat{M}\hat{L}\hat{M} = -\hat{L}.$$

$\hat{M}|\Psi_\pm\rangle = \pm|\Psi_\pm\rangle$ より

$$\langle\Psi_\pm|\hat{L}|\Psi_\pm\rangle = \langle\Psi_\pm|\hat{M}(-\hat{L})\hat{M}|\Psi_\pm\rangle = -\langle\Psi_\pm|\hat{L}|\Psi_\pm\rangle, \qquad \boxed{\langle\hat{L}\rangle_\pm = 0}.$$

[2.4] 四回回転の固有値

ψ_1 は偶関数、ψ_2 は奇関数であり、$\hat{C}_4\Psi(x,y) = \Psi(-y,x)$ だから

$$\hat{C}_4\Psi_{1,1} = \psi_1(-y)\psi_1(x) = \Psi_{1,1}, \qquad \hat{C}_4\Psi_{2,2} = \psi_2(-y)\psi_2(x) = -\Psi_{2,2}.$$

固有値はそれぞれ $+1, -1$ である。

[2.5] $\hat{H}$ と $\hat{C}_4$ の同時固有状態

第一励起部分空間では

$$\hat{C}_4\Psi_{2,1} = -\Psi_{1,2}, \qquad \hat{C}_4\Psi_{1,2} = \Psi_{2,1}.$$

従って、正の実係数の規約で規格化された回転固有状態は

$$\boxed{|\Psi'_+\rangle = \frac{\Psi_{2,1}+i\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{C}_4|\Psi'_+\rangle = +i|\Psi'_+\rangle}, \qquad \boxed{|\Psi'_-\rangle = \frac{\Psi_{2,1}-i\Psi_{1,2}}{\sqrt{2}},\quad \hat{C}_4|\Psi'_-\rangle = -i|\Psi'_-\rangle}.$$

[2.6] 回転固有状態の角運動量

$A = \langle\psi_2|x|\psi_1\rangle$ と $B = \langle\psi_1|\hat{p}|\psi_2\rangle$ とおく。問題の積分公式を用いると

$$A = \frac{1}{a}\int_{-a}^{a} x\sin\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{2a}\Big)\,dx = \frac{32a}{9\pi^2}, \qquad B = -\frac{i\hbar\pi}{a^2}\int_{-a}^{a}\cos\Big(\frac{\pi x}{2a}\Big)\cos\Big(\frac{\pi x}{a}\Big)\,dx = -\frac{4i\hbar}{3a}.$$

ここで $\hat{L} = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$ である。異なる積状態間の行列要素は

$$\langle\Psi_{2,1}|\hat{L}|\Psi_{1,2}\rangle = AB - \langle\psi_2|\hat{p}|\psi_1\rangle A = A(B - B^*) = -\frac{256i\hbar}{27\pi^2}.$$

対角要素は実の積状態の運動量平均がゼロなので消える。$C = \langle\Psi_{2,1}|\hat{L}|\Psi_{1,2}\rangle = -256i\hbar/(27\pi^2)$ と書けば、Ψ'_+ の交差項は $i(C - C^*)/2 = 256\hbar/(27\pi^2)$ であり、Ψ'_- ではその符号が反転する。従って

$$\boxed{\langle\Psi'_\pm|\hat{L}|\Psi'_\pm\rangle = \pm\frac{256\hbar}{27\pi^2}}.$$

回転固有値 $\pm i$ の状態が反対符号の角運動量を持つ。