物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] ハミルトニアンと振幅方程式

$B_x = B_1\cos\omega t,\ B_y = B_1\sin\omega t,\ B_z = B_0$ を問題の行列表式に代入する。$\omega_0 = -2\mu B_0/\hbar$, $\omega_1 = -2\mu B_1/\hbar$ より

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}.$$

$i\hbar\, d|\psi\rangle/dt = \hat{H}|\psi\rangle$ に $|\psi\rangle = (\alpha,\beta)^T$ を代入して

$$i\dot{\alpha} = \frac{\omega_0}{2}\alpha + \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}\beta, \qquad i\dot{\beta} = \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}\alpha - \frac{\omega_0}{2}\beta.$$

[1.2] 回転枠

$\alpha = ae^{-i\omega_0 t/2}$, $\beta = be^{i\omega_0 t/2}$ と書き換えると、対角項は相殺される。

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\omega-\omega_0)t} \\ e^{i(\omega-\omega_0)t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \boxed{A(t) = e^{-i(\omega-\omega_0)t}}.$$

以下 $\Delta = \omega - \omega_0$ とする。静磁場だけの区間では a, b は一定であり、実験室系の位相因子のみが進む。

[2.1] 単一パルスの遷移確率

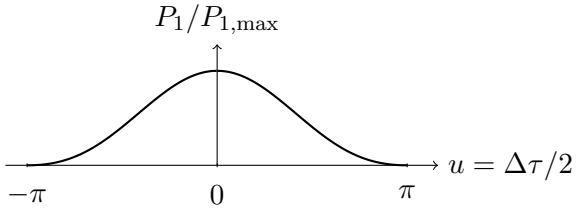
初期状態 $|-\rangle$ は $a(0) = 0, b(0) = 1$ である。弱遷移近似 $b \simeq 1$ のもとで

$$\dot{a} = -\frac{i\omega_1}{2}e^{-i\Delta t}, \qquad a(\tau) = \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta\tau} - 1).$$

したがって

$$\boxed{P_1(\omega) = \frac{\omega_1^2}{\Delta^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) = \frac{\omega_1^2\tau^2}{4}\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)}. \quad \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}.$$

$\Delta \to 0$ では連続的に $P_1(\omega_0) = \omega_1^2\tau^2/4$ となる。共鳴で最大、最近傍の零点は $\boxed{\omega = \omega_0 \pm 2\pi/\tau}$。図はピークを 1 に規格化した中央ローブで、横軸は $u = \Delta\tau/2$ とする。



[2.2] 単一パルスの励起スペクトル

周波数の離調に対して中央ローブは sinc^2 形であり、両側の最近接零点は共鳴から等距離にある。パルス時間 τ を長くすると、零点間隔 $4\pi/\tau$ が狭くなる。

[3.1] 二つのパルスと Ramsey 干渉

第一パルス後の回転枠振幅は

$$a(\tau) = \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta\tau} - 1).$$

自由発展中は a, b が一定である。第二パルス中も同じ実験室位相の回転場が続くので、$\dot{a} = -i\omega_1 e^{-i\Delta t}/2$ を T から $T+\tau$ まで積分すると

$$\begin{aligned} a(T+\tau) &= a(\tau) + \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta(T+\tau)} - e^{-i\Delta T}) \\ &= \frac{\omega_1}{2\Delta}(1 + e^{-i\Delta T})(e^{-i\Delta\tau} - 1). \end{aligned}$$

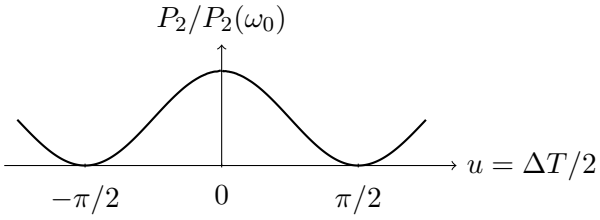
従って

$$\boxed{P_2(\omega) = \frac{4\omega_1^2}{\Delta^2}\cos^2\left(\frac{\Delta T}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)}.$$

共鳴極限は $P_2(\omega_0) = \omega_1^2\tau^2$ で、弱遷移条件はこの値が十分小さいことを含む。$T \gg \tau$ では sinc^2 包絡内に細い干渉縞が並び、最近接零点は Ramsey 因子から

$$\boxed{\Omega_1 = \omega_0 - \frac{\pi}{T}, \qquad \Omega_2 = \omega_0 + \frac{\pi}{T}}, \qquad \boxed{\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T}}.$$

この線幅で定義する測定精度は、間隔 T を長くすると改善する。規格化スペクトルの模式図は $\tau/T = 0.1$ の例で、包絡の最近傍零点より内側にある最初の Ramsey 零点を示す。



[4.1] 二重スリットとの対応

二重スリットの干渉因子の隣接暗線間隔 $\lambda L/l$ に、Ramsey 零点間隔 $2\pi/T$ が対応する。また単スリット包絡の最初の暗線間隔 $2\lambda L/D$ に、パルス包絡の最初の零点間隔 $4\pi/\tau$ が対応する。両者を比較して

$$\frac{2\pi}{T} \leftrightarrow \frac{\lambda L}{l}, \qquad \frac{4\pi}{\tau} \leftrightarrow \frac{2\lambda L}{D}; \qquad \boxed{T \leftrightarrow l, \quad \tau \leftrightarrow D}.$$

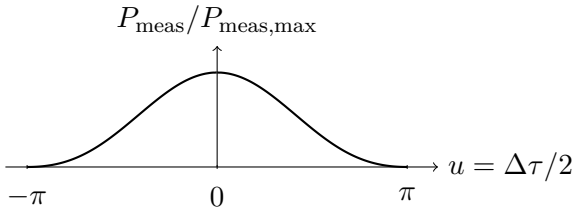
T は二つのパルス間隔に由来する細かい干渉縞、τ は有限パルス長に由来する広い回折包絡を決める。

[4.2] 中間測定による干渉の消失

中間時刻 $\tau < t < T$ の z 測定で $|+\rangle$ を得る確率は P_1、$|-\rangle$ は $1-P_1$ である。測定により二つのパルス間の相対位相は失われる。$|+\rangle$ から始める第二パルスでは $a \simeq 1$ として振幅方程式を使うと、$b(T+\tau) - b(T) = -(i\omega_1/2)\int_T^{T+\tau} e^{i\Delta t}\,dt$ である。その絶対値二乗は P_1 なので、第二パルスはどちらの基底状態からも反対状態への遷移確率が P_1 となる。最後に $|+\rangle$ を得る全確率は

$$P_{\mathrm{meas}} = (1-P_1)P_1 + P_1(1-P_1) = 2P_1(1-P_1) \simeq 2P_1 \qquad (P_1 \ll 1).$$

従って二重パルスの細かい Ramsey 干渉縞は消え、$P_1(\omega)$ と同じ単一パルスの広い sinc^2 形が残る（高さは弱遷移近似で約 2 倍）。図は弱遷移近似の $2P_1$ をピークで規格化して描く。



物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 一様な無限鎖

n 番目の質点は左右のばねから $k(x_{n+1}-x_n)$, $k(x_{n-1}-x_n)$ の力を受けるため

$$\boxed{m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})}.$$

[1.2] 平面波の分散関係

$x_n = e^{iqn}c_q(t)$ と置くと

$$\boxed{\ddot{c}_q + \frac{2k}{m}(1-\cos q)c_q = 0} \quad \left(= \ddot{c}_q + \frac{4k}{m}\sin^2\frac{q}{2}\,c_q = 0\right).$$

物理変位はこの複素解の実部である。

[1.3] 固有振動数

$0 < q < 2\pi$ では

$$\boxed{\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\frac{q}{2}\right|}, \qquad c_q(t) = C_+e^{i\omega_q t} + C_-e^{-i\omega_q t}.$$

k/m の次元は s^{-2} であり、ω_q は角振動数の次元を持つ。

[1.4] 一様変位モード

$q = 0$ では復元力が消え、$\ddot{c}_0 = 0$ より

$$\boxed{c_0(t) = At + B}.$$

定数項は鎖全体の並進、時間一次項は一様速度の並進に対応する。

[2.1] 質量欠陥を含む運動方程式

質量が変わる原点と通常のサイトでは

$$M\ddot{x}_0 = k(x_1 - 2x_0 + x_{-1}), \qquad m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (n \neq 0).$$

隣り合うばねは両質点に等大反対向きの力を及ぼすので、原点の質量だけを M に置き換える。

[2.2] バルクの振動数

欠陥から離れた $n \le -2$ と $n \ge 1$ では質量は m である。$e^{\pm iqn - i\omega_q t}$ を代入すれば

$$\boxed{m\omega_q^2 = 2k(1-\cos q) = 4k\sin^2\frac{q}{2}},$$

すなわち [1.3] の分散関係が両側で成り立つ。

[2.3] 界面での連立方程式

入射・反射・透過波を

$$x_n(t) = \begin{cases} (e^{iqn} + R_q e^{-iqn})e^{-i\omega_q t}, & n \le -1, \\ T_q e^{iqn} e^{-i\omega_q t}, & n \ge 0 \end{cases}$$

とする。原点では $x_0 = T_q e^{-i\omega_q t}$, $x_1 = T_q e^{iq} e^{-i\omega_q t}$, $x_{-1} = (e^{-iq} + R_q e^{iq})e^{-i\omega_q t}$. これを質量 M の運動方程式に代入すると

$$\left(2 - \frac{M\omega_q^2}{k} - e^{iq}\right) T_q - e^{iq} R_q = e^{-iq}.$$

$n = -1$ の式には $x_{-2} = (e^{-2iq} + R_q e^{2iq})e^{-i\omega_q t}$ を代入し、バルク分散を使うと

$$2\cos q(e^{-iq} + R_q e^{iq}) = e^{-2iq} + R_q e^{2iq} + T_q \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T_q - R_q = 1}.$$

従って

$$\boxed{\left(2 - e^{iq} - \frac{4M}{m}\sin^2\frac{q}{2}\right) T_q - e^{iq} R_q = e^{-iq}, \qquad R_q = T_q - 1}.$$

[2.4] 透過・反射振幅

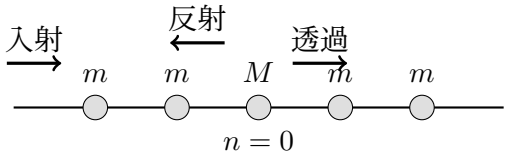
$R_q = T_q - 1$ を界面式へ代入し、$m\omega_q^2/k = 2 - 2\cos q$ を用いると

$$\boxed{T_q = \frac{e^{-iq} - e^{iq}}{2(1-M/m) + (M/m)e^{-iq} - (2-M/m)e^{iq}}}, \qquad \boxed{R_q = T_q - 1}.$$

この複素振幅には界面の位相も含まれる。

[2.5] 質量極限の解釈

$M = m$ では分子・分母が等しく $T_q = 1, R_q = 0$ となり、鎖は一様で散乱しない。$M \to \infty$ では有限な $0 < q < \pi$ に対して $T_q \to 0$, $R_q \to -1$ であり、原点が動かない固定端から位相反転して反射する。



[3.1] 周期境界条件

周期条件 $A_q = C_q e^{iqL}$, $B_q = D_q e^{-iqL}$ は $C_q = A_q e^{-iqL}$, $B_q = D_q e^{-iqL}$ と同値である。$\binom{C_q}{B_q} = S_q \binom{A_q}{D_q}$ と合わせると、入射係数ベクトルは S_q の固有ベクトルで固有値 e^{-iqL} を持つ。従って

$$\det(S_q - e^{-iqL} I) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{e^{-iqL} = T_q + R_q \quad \text{or} \quad e^{-iqL} = T_q - R_q}.$$

S_q は $(1,1)^{\mathsf{T}}$ と $(1,-1)^{\mathsf{T}}$ にそれぞれ固有値 $T_q + R_q$ と $T_q - R_q$ で作用する。二固有値が異なれば、各根は独立な一つの振動モードを与える。

[3.2] 一様質量 $M = m$

このとき $T_q = 1, R_q = 0$ なので

$$e^{-iqL} = 1, \qquad \boxed{q = \frac{2\pi l}{L}}.$$

$0 < q < \pi$ では $l = 1, \ldots, L/2 - 1$。各許容 q で二方向の平面波が独立なので正の内部モードは $L - 2$ 個で、

$$\boxed{\omega_l = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{l\pi}{L}}.$$

開区間に含めない $q = 0$ は一様並進、$q = \pi$ は隣り合う質点が逆向きに動く帯域端モードであり、合わせて一様鎖の L 個の座標自由度を満たす。

[3.3] 質量 $M = 2m$

透過振幅は

$$T_q = \frac{e^{-iq} - e^{iq}}{2(e^{-iq} - 1)}, \qquad T_q - R_q = 1, \qquad T_q + R_q = 2T_q - 1 = e^{iq}.$$

従って二つの固有値条件から

$$q = \frac{2\pi l}{L} \quad (l = 1, \ldots, L/2 - 1), \qquad q = \frac{2\pi l}{L+1} \quad (l = 1, \ldots, L/2),$$

いずれも $0 < q < \pi$ を満たす。対応する振動数は両系列について

$$\boxed{\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{q}{2}}.$$

系列間に重複はなく、式 (2) 型の伝搬モード数は $(L/2 - 1) + L/2 = L - 1$ 個となる。残り 1 個は $q = 0$ の一様並進モードである。これら L 個で全座標自由度を満たすため、別の局在高周波モードは加わらない。

[3.4] 固定質点極限 $M \to \infty$

この極限では $T_q \to 0$, $R_q \to -1$ となり、周期条件の固有値は ± 1。従って

$$e^{-iqL} = \pm 1, \qquad \boxed{q_j = \frac{j\pi}{L} \quad (j = 1, \ldots, L-1)}.$$

固有振動数は $\boxed{\omega_j = 2\sqrt{k/m}\sin(j\pi/(2L))}$. 中央の質点は動かないため、有限質量の自由度は他の $L - 1$ 個だけであり、上の解が全ての正の振動モードを数え尽くす。

物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1] 異種最近接対と内部エネルギー

一つの A 原子には z 個の最近接サイトがあり、その B 原子占有確率は $(1-x)$ と近似する。A 原子を持つサイトから数えれば異種対を重複なく数えるため

$$N_{AB} = N_A z \frac{N_B}{N} = zNx(1-x), \qquad \boxed{E = zNVx(1-x)}.$$

[2] 配置エントロピー

$N_A = xN$, $N_B = (1-x)N$ の配置数は $N!/(N_A!N_B!)$ である。Stirling 近似より

$$\begin{aligned} S &= k_B \log \frac{N!}{N_A!N_B!} \\ &\simeq k_B[N\log N - N_A \log N_A - N_B \log N_B] \\ &= \boxed{-k_B N[x\log x + (1-x)\log(1-x)]}. \end{aligned}$$

[3] 自由エネルギー

$$\boxed{F = E - TS = N\left\{zVx(1-x) + k_B T[x\log x + (1-x)\log(1-x)]\right\}}, \qquad f(x) = F/N.$$

したがって

$$f(x) = zVx(1-x) + k_B T[x\log x + (1-x)\log(1-x)].$$

微分すると

$$f'(x) = zV(1-2x) + k_B T \log\frac{x}{1-x}.$$

[4] 停留条件関数

$f'(x) = 0$ を問題の形に整理すると

$$\frac{zV}{k_B T}(2x-1) = g(x), \qquad \boxed{g(x) = \log\frac{x}{1-x}}.$$

$g(1-x) = -g(x)$ で、$g'(x) = 1/[x(1-x)]$、特に $g'(1/2) = 4$。

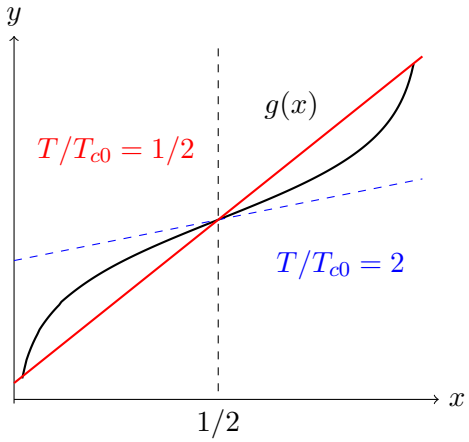
[5] 臨界温度

中心近傍で交点の個数が変わるのは、直線と $g(x)$ の傾きの差 $g'(x) - 2zV/(k_BT)$ が中心でゼロになるときである。$g'(x) = 1/[x(1-x)]$ は中心で最小値 4 を取るため、臨界点では直線の傾き $2zV/(k_BT)$ と $g'(1/2) = 4$ が一致する。従って

$$\boxed{T_{c0} = \frac{zV}{2k_B}}.$$

[6] 交点による臨界温度の判定

以下の図では同じ $g(x)$ と、傾き $zV/(k_BT)$ に比例する直線を比較する。$T > T_{c0}$ では中心 $x = 1/2$ でのみ交わる。$T < T_{c0}$ では中心に加えて二つの対称な交点 $x = 1/2 \pm \delta_0$ が生じる。



図の直線の傾きは高温側で $2zV/(k_BT) < 4$、低温側で $2zV/(k_BT) > 4$ である。ここで青・赤の直線はそれぞれ代表温度を表す。

[7] 変曲点の位置

$$f''(x) = -2zV + k_BT\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}\right) = -2zV + \frac{k_BT}{x(1-x)}.$$

$f''(x) = 0$ から

$$x(1-x) = \frac{k_BT}{2zV}, \qquad \boxed{\delta_1(T) = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{k_BT}{2zV}} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{T}{T_{c0}}}}.$$

$T < T_{c0}$ なら二つの実変曲点がある。原問は $T = T_{c0}$ も変曲点の範囲に含めるが、この極限では $\delta_1 = 0$ かつ $f''(1/2) = 0$ で、f'' はその両側で正となる。したがって臨界組成は曲率がゼロになる退化点であり、厳密には変曲点ではない。

[8] 低温の自由エネルギー曲線

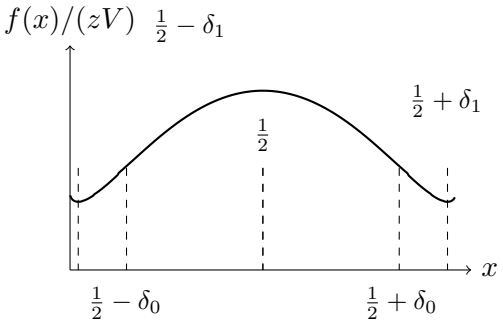
$0 < T < T_{c0}$ では中心で $f'(1/2) = 0$、$f''(1/2) < 0$ なので、$x = 1/2$ は局所最大である。右側では

$$f''(x) < 0 \quad \left(\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \delta_1\right), \qquad f'\left(\frac{1}{2} + \delta_1\right) < 0.$$

その外側では $f''(x) > 0$ であり、$f'(x)$ は増加して $x \to 1$ で $+\infty$ に発散する。従って再び $f'(x) = 0$ となる点は変曲点より外側に一つだけあり、これが $x = 1/2 + \delta_0$ の極小である。対称性 $f(1-x) = f(x)$ より左側にも同じ高さの極小があり、

$$\boxed{0 < \delta_1 < \delta_0 < \frac{1}{2}}.$$

この符号変化から、二つの外側極小が全区間での最小値を与える。変曲点は各極小と中心極大の間にある。端点で $f'(x)$ は対数発散するが $f(x)$ 自体は有限である。



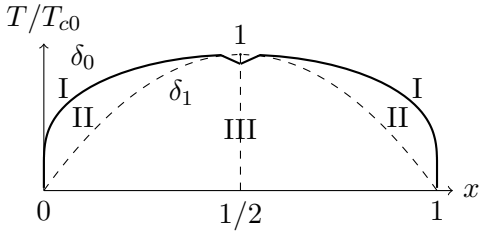
この図は $T/T_{c0} = 1/2$ の例で、$\delta_1 = \sqrt{2}/4$、$\delta_0 \simeq 0.478752$ である。

[9] 停留点の温度依存

外側停留点は

$$\frac{4\delta_0}{T/T_{c0}} = \log\frac{1+2\delta_0}{1-2\delta_0} \quad (0 < \delta_0 < 1/2)$$

を満たす。これは $\delta_0 = 0$ という中心解を除いた正の解である。温度曲線は左右対称で、δ_0, δ_1 はともに $T \to T_{c0}$ で 0、$T \to 0$ で $1/2$ に近づき、$0 < T < T_{c0}$ では $\delta_0 > \delta_1$ となる。



実線は $u > 0$ に対し $2\delta_0 = \tanh u$、$T/T_{c0} = \tanh u/u$ で表せ、臨界点は $u \to 0$ の極限にあたる。実線は外側極小の組成 $x = 1/2 \pm \delta_0$、点線は $f'' = 0$ となる組成 $x = 1/2 \pm \delta_1$ を表す。これらの曲線と図中の領域 (I)–(III) の安定性を、以下で相分離後の自由エネルギーと比較して判定する。

[10] 相分離のレバー則

A 原子数保存より $x_0 N = s x_1 N + (1-s) x_2 N$ なので

$$\boxed{s = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1}}, \qquad 1 - s = \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1}.$$

[11] 相分離後の自由エネルギー

二相のサイト比で平均した自由エネルギーは

$$\boxed{f^* = sf(x_1) + (1-s)f(x_2) = \frac{x_2 - x_0}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)}.$$

この式は、$f(x_1)$ と $f(x_2)$ を結ぶ直線の $x = x_0$ での高さである。組成 x_0 を保つ二相分離で一様相の自由エネルギーを下げられるかどうかは、この高さと $f(x_0)$ の比較で決まる。

$0 < T < T_{c0}$ では [8] の対称な二極小について

$$f\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right) = f\left(\frac{1}{2} + \delta_0\right), \qquad f'\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right) = f'\left(\frac{1}{2} + \delta_0\right) = 0.$$

従って両極小を結ぶ水平線は、両点で曲線に接し、全組成で曲線より下にある共通接線である。$|x_0 - 1/2| < \delta_0$ のとき、$x_1 = 1/2 - \delta_0$、$x_2 = 1/2 + \delta_0$ と選べばレバー則で $0 < s < 1$ となり、

$$f^* = f\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right) < f(x_0).$$

どの相の f もこの極小値以上なので、この二相の組成で固定組成の最小自由エネルギーに達する。

一方、$x_0 \le 1/2 - \delta_0$ の外側枝では $f'' > 0$、$f'(x_0) \le 0$ である。凸な左側枝は x_0 での接線より上にあり、その接線は $x \ge 1/2 - \delta_0$ でも極小値以下にとどまる。従って全区間で

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

これを x_1, x_2 に適用し、レバー則の重みで足すと

$$\begin{aligned} f^* &\ge f(x_0) + f'(x_0)\{sx_1 + (1-s)x_2 - x_0\} \\ &= f(x_0). \end{aligned}$$

右側の $x_0 \ge 1/2 + \delta_0$ も対称性から同じであり、外側では一様相が最小自由エネルギーを与える。相分離を許した最小自由エネルギーの曲線は、外側の $f(x)$ を残し、二極小の間を共通接線で置き換えた形となる。この曲線は f の下側凸包であり、二極小の組成 $x = 1/2 \pm \delta_0$ が共存境界を与える。

[12] 微小ゆらぎに対する局所安定性

$x_1 = x_0 - \delta$, $x_2 = x_0 + \delta$ $(0 < \delta < \min(x_0, 1 - x_0))$ のとき、二相の組成比は $s = 1/2$ となる。Taylor 展開を両側で足すと奇数次項が相殺し、

$$f^* - f(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0)\delta^2 + \frac{1}{24} f''''(x_0)\delta^4 + O(\delta^6). \tag{1}$$

従って二次の自由エネルギー変化が正となる条件は

$$\boxed{f''(x_0) > 0}.$$

これが二次で判定する局所安定条件であり、$f''(x_0) < 0$ なら十分小さいゆらぎで自由エネルギーが下がる。$f''(x_0) = 0$ では二次の判定だけでは結論できず、高次項が必要となる。ここで

$$f'''(x) = k_B T \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right], \tag{2}$$

$$f''''(x) = 2k_B T \left[\frac{1}{x^3} + \frac{1}{(1-x)^3}\right] > 0 \qquad (T > 0). \tag{3}$$

特に臨界点 $x_0 = 1/2, T = T_{c0}$ では $f'' = f''' = 0$、$f'''' = 16zV$ なので、

$$f^* - f(1/2) = \frac{2}{3} zV\delta^4 + O(\delta^6) > 0. \tag{4}$$

二次項がゼロでも、この対称ゆらぎに対して一様相は安定である。

[13] 安定・準安定・不安定領域

$T < T_{c0}$ において $|x - 1/2| < \delta_1$ では $f''(x) < 0$ であり、微小ゆらぎでも相分離するので領域 (III)。$\delta_1 < |x - 1/2| < \delta_0$ では局所安定だが全体として一様相が最安定ではなく、準安定領域 (II)。$|x - 1/2| > \delta_0$ では一様相が最安定で領域 (I) である。これらの開領域は [9] の δ_0 と δ_1 の曲線の間隔に対応する。

低温のスピノーダル境界 $|x_0 - 1/2| = \delta_1$ では $f''(x_0) = 0$ だが、$f'''(x_0) \neq 0$ である。左右の組成変化を $x_1 = x_0 - \delta_-$、$x_2 = x_0 + \delta_+$ $(\delta_-, \delta_+ > 0)$ とすると、レバー則から $s = \delta_+/(\delta_- + \delta_+)$ となり、Taylor 展開の三次までの平均は

$$f^* - f(x_0) = \frac{\delta_- \delta_+(\delta_+ - \delta_-)}{6} f'''(x_0) + O\big((\delta_- + \delta_+)^4\big)\,. \tag{5}$$

$\delta_+ - \delta_-$ を $f'''(x_0)$ と逆符号に選び、固定した比で両方を小さくすれば自由エネルギーを下げられる。従ってこの境界は、一般の非対称な微小相分離に対して局所安定ではない。対称ゆらぎだけの四次項が正であることとは区別する。

一方、臨界温度では

$$f''(x) = zV\left[\frac{1}{2x(1-x)} - 2\right] \geq 0, \tag{6}$$

等号は $x = 1/2$ の一点だけである。$T > T_{c0}$ なら $f''(x) \geq 4k_BT - 2zV > 0$ となる。いずれも傾き f' は厳密に増加するため、異なる二組成を結ぶ直線は中間の自由エネルギー曲線より上にある。従って任意の非自明な二相分離に対して $f(x_0) < f^*$ となり、臨界点を含めて $T \geq T_{c0}$ では全組成が (I) である。低温の共存境界 $|x - 1/2| = \delta_0$ 上の組成も一様相が最安定である。

物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の運動方程式

電荷が $-q$ なので、電場から受ける力は $-q\boldsymbol{E}(t)$ である。復元力と減衰力を加えた Newton の式は

$$\boxed{m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -q\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} - m\omega_0^2\boldsymbol{x} - m\gamma\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}}.$$

[1.2] 定常応答

$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 e^{-i\omega t}$ とすると、$\dot{\boldsymbol{x}} = -i\omega\boldsymbol{x}$、$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega^2\boldsymbol{x}$ である。運動方程式に代入し、$\boldsymbol{x}_0$ をまとめると

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)\boldsymbol{x}_0 = -\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_0, \qquad \boxed{\boldsymbol{x}_0 = -\frac{q\boldsymbol{E}_0}{m\left[(\omega_0^2-\omega^2) - i\gamma\omega\right]}}.$$

ここで減衰項の $-i\gamma\omega$ は、与えられた $e^{-i\omega t}$ 規約から決まる。

[1.3] 複素感受率

単位体積当たりの分極振幅は

$$\boldsymbol{P}_0 = -Nq\boldsymbol{x}_0 = \frac{Nq^2}{m[(\omega_0^2-\omega^2) - i\gamma\omega]}\boldsymbol{E}_0 = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}_0.$$

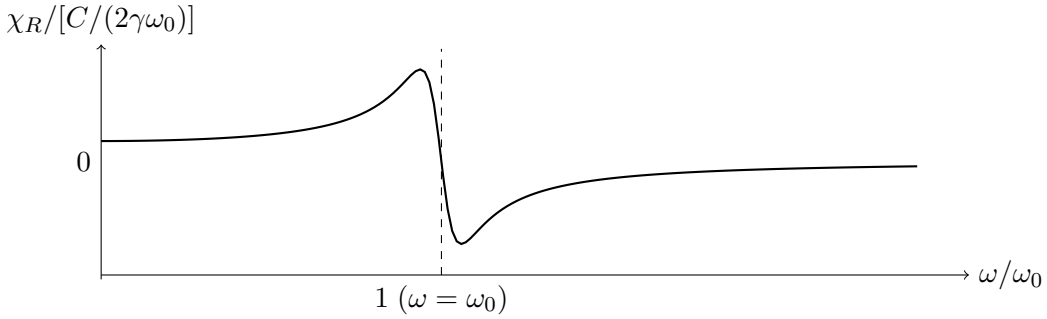
$C = Nq^2/(\varepsilon_0 m)$, $A = \omega_0^2 - \omega^2$, $B = \gamma\omega$ とおき、分母に共役複素数を掛けると

$$\chi = C\frac{A+iB}{A^2+B^2}, \qquad \boxed{\chi_R = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}, \qquad \boxed{\chi_I = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}.$$

実場の周期平均を取ると $\langle\boldsymbol{E}\cdot\partial_t\boldsymbol{P}\rangle = \varepsilon_0\omega\chi_I|\boldsymbol{E}_0|^2/2 > 0$ となる。従って正の χ_I はこの時間規約で受動媒質の吸収に対応する。

[1.4] χ_R の周波数依存性

$\omega < \omega_0$ では $\chi_R > 0$、$\omega = \omega_0$ で零を通り、$\omega > \omega_0$ では負となる。共鳴近傍では正負の分散形となり、高周波では $\chi_R \to 0^-$ である。図は $\gamma/\omega_0 = 0.12$ の例で、縦軸は正の尺度 $C/(2\gamma\omega_0)$ で規格化した概形である。



[2.1] 境界での接線電場

Faraday の法則 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$ を、長辺が y 方向で境界をまたぐ微小長方形に積分する。短辺の線積分は $\Delta z \to 0$ で消え、磁束の時間変化も面積 $O(\Delta y \Delta z)$ に比例して消える。したがって上下の長辺の寄与が等しくなり、$E_y(z = 0^+) = E_y(z = 0^-)$ を得る。面上では共通の時間因子を省いて

$$\boxed{E_0 e^{ik \sin\theta_0 x} + E_m e^{iK_{mx} x} = E_t e^{iK_{tx} x}}.$$

この関係は境界面上のすべての x で成り立つ。

[2.2] 接線波数の一致

境界に沿った位相が任意の x で一致する必要があるため、入射・反射・透過波の接線成分は等しい。よって

$$\boxed{K_{mx} = K_{tx} = k \sin\theta_0}.$$

[2.3] Maxwell 方程式と分散関係

自由電荷がなく一様な各媒質内では $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ なので $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ である。Faraday の法則の両辺に回転を作用させ、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$、$\nabla \times \boldsymbol{H} = \partial_t \boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E}$ を順に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{H}) \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

二重回転の公式と $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ より左辺は $-\nabla^2 \boldsymbol{E}$ なので、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

を得る。真空では $\chi = 0$。平面波を代入すれば

$$\boxed{k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}, \qquad \boxed{K_{mx}^2 + K_{mz}^2 = k^2}, \qquad \boxed{K_{tx}^2 + K_{tz}^2 = (1 + \chi) k^2}.$$

[2.4] 反射波の法線成分

反射波は真空内で $+z$ 方向へ進み、その波数の大きさは k である。接線成分を [2.2] に代入すると

$$K_{mz} = +\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2\theta_0} = \boxed{k \cos\theta_0}.$$

[2.5] 臨界角と透過波の枝

$K_{tx} = k\sin\theta_0$ を誘電体の分散関係に代入すると

$$K_{tz}^2 = k^2(1 + \chi - \sin^2\theta_0) = k^2(\chi + \cos^2\theta_0).$$

境目 $K_{tz} = 0$ は $\sin^2\theta_c = 1 + \chi$、すなわち

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\sqrt{1+\chi} = \arccos\sqrt{-\chi}}.$$

$\theta_0 < \theta_c$ では透過波は誘電体の深部 $z < 0$ へ伝わる。したがって負の法線成分を選び

$$\boxed{K_{tz} = -k\sqrt{1 + \chi - \sin^2\theta_0} \quad (\theta_0 < \theta_c)}.$$

$\theta_0 > \theta_c$ では K_{tz} は純虚数となる。$\kappa = k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} > 0$ と置く。場の依存性は $e^{iK_{tz}z}$ で、媒質は $z \le 0$ にあるので、$z \to -\infty$ で減衰する枝は $K_{tz} = -i\kappa$ である：

$$\boxed{K_{tz} = -ik\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} \quad (\theta_0 > \theta_c)}.$$

実際 $e^{iK_{tz}z} = e^{\kappa z} = e^{-\kappa|z|}$ となる。逆の虚数符号では負の z へ進むにつれて場が増大する。

[2.6] $1/e$ 減衰深さ

振幅が境界値の $1/e$ となる深さの大きさ $z_0 = |z|$ は $e^{-\kappa z_0} = e^{-1}$ より

$$\boxed{z_0 = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)}} = \frac{1}{k\sqrt{-\chi - \cos^2\theta_0}}}, \qquad 0 \le \cos^2\theta_0 < -\chi.$$

固定した χ では z_0 は $\cos^2\theta_0$ とともに増え、臨界値 $\cos^2\theta_c = -\chi$ に下側から近づくと発散する。図は無次元変数 $u = \cos^2\theta_0/(-\chi)$ を用いて形を示す。

