物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の運動方程式

電荷が $-q$ なので、電場から受ける力は $-q\boldsymbol{E}(t)$ である。復元力と減衰力を加えた Newton の式は

$$\boxed{m\frac{d^2\boldsymbol{x}}{dt^2} = -q\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} - m\omega_0^2\boldsymbol{x} - m\gamma\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}}.$$

[1.2] 定常応答

$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 e^{-i\omega t}$ とすると、$\dot{\boldsymbol{x}} = -i\omega\boldsymbol{x}$、$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\omega^2\boldsymbol{x}$ である。運動方程式に代入し、$\boldsymbol{x}_0$ をまとめると

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)\boldsymbol{x}_0 = -\frac{q}{m}\boldsymbol{E}_0, \qquad \boxed{\boldsymbol{x}_0 = -\frac{q\boldsymbol{E}_0}{m\left[(\omega_0^2-\omega^2) - i\gamma\omega\right]}}.$$

ここで減衰項の $-i\gamma\omega$ は、与えられた $e^{-i\omega t}$ 規約から決まる。

[1.3] 複素感受率

単位体積当たりの分極振幅は

$$\boldsymbol{P}_0 = -Nq\boldsymbol{x}_0 = \frac{Nq^2}{m[(\omega_0^2-\omega^2) - i\gamma\omega]}\boldsymbol{E}_0 = \varepsilon_0\chi\boldsymbol{E}_0.$$

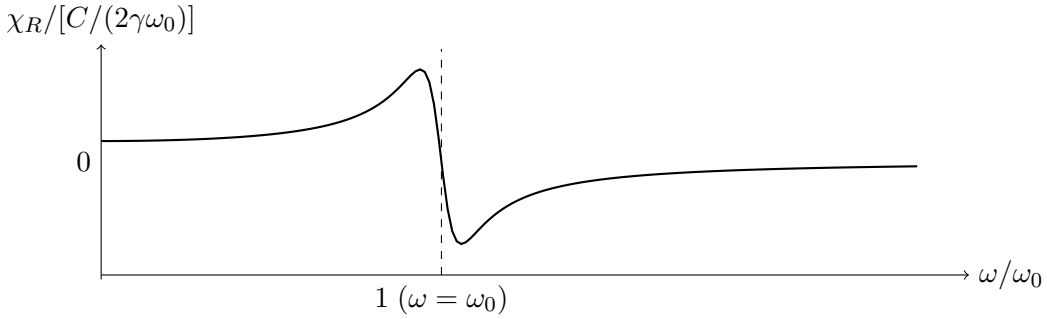
$C = Nq^2/(\varepsilon_0 m)$, $A = \omega_0^2 - \omega^2$, $B = \gamma\omega$ とおき、分母に共役複素数を掛けると

$$\chi = C\frac{A+iB}{A^2+B^2}, \qquad \boxed{\chi_R = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}, \qquad \boxed{\chi_I = \frac{Nq^2}{\varepsilon_0 m}\frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2}}.$$

実場の周期平均を取ると $\langle\boldsymbol{E}\cdot\partial_t\boldsymbol{P}\rangle = \varepsilon_0\omega\chi_I|\boldsymbol{E}_0|^2/2 > 0$ となる。従って正の χ_I はこの時間規約で受動媒質の吸収に対応する。

[1.4] χ_R の周波数依存性

$\omega < \omega_0$ では $\chi_R > 0$、$\omega = \omega_0$ で零を通り、$\omega > \omega_0$ では負となる。共鳴近傍では正負の分散形となり、高周波では $\chi_R \to 0^-$ である。図は $\gamma/\omega_0 = 0.12$ の例で、縦軸は正の尺度 $C/(2\gamma\omega_0)$ で規格化した概形である。



[2.1] 境界での接線電場

Faraday の法則 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B}$ を、長辺が y 方向で境界をまたぐ微小長方形に積分する。短辺の線積分は $\Delta z \to 0$ で消え、磁束の時間変化も面積 $O(\Delta y \Delta z)$ に比例して消える。したがって上下の長辺の寄与が等しくなり、$E_y(z = 0^+) = E_y(z = 0^-)$ を得る。面上では共通の時間因子を省いて

$$\boxed{E_0 e^{ik \sin\theta_0 x} + E_m e^{iK_{mx} x} = E_t e^{iK_{tx} x}}.$$

この関係は境界面上のすべての x で成り立つ。

[2.2] 接線波数の一致

境界に沿った位相が任意の x で一致する必要があるため、入射・反射・透過波の接線成分は等しい。よって

$$\boxed{K_{mx} = K_{tx} = k \sin\theta_0}.$$

[2.3] Maxwell 方程式と分散関係

自由電荷がなく一様な各媒質内では $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$ なので $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ である。Faraday の法則の両辺に回転を作用させ、$\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$、$\nabla \times \boldsymbol{H} = \partial_t \boldsymbol{D}$、$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \boldsymbol{E}$ を順に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \boldsymbol{H}) \\ &= -\mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

二重回転の公式と $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ より左辺は $-\nabla^2 \boldsymbol{E}$ なので、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu_0 \varepsilon_0 (1 + \chi) \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

を得る。真空では $\chi = 0$。平面波を代入すれば

$$\boxed{k^2 = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2}, \qquad \boxed{K_{mx}^2 + K_{mz}^2 = k^2}, \qquad \boxed{K_{tx}^2 + K_{tz}^2 = (1 + \chi) k^2}.$$

[2.4] 反射波の法線成分

反射波は真空内で $+z$ 方向へ進み、その波数の大きさは k である。接線成分を [2.2] に代入すると

$$K_{mz} = +\sqrt{k^2 - k^2 \sin^2\theta_0} = \boxed{k \cos\theta_0}.$$

[2.5] 臨界角と透過波の枝

$K_{tx} = k\sin\theta_0$ を誘電体の分散関係に代入すると

$$K_{tz}^2 = k^2(1 + \chi - \sin^2\theta_0) = k^2(\chi + \cos^2\theta_0).$$

境目 $K_{tz} = 0$ は $\sin^2\theta_c = 1 + \chi$、すなわち

$$\boxed{\theta_c = \arcsin\sqrt{1+\chi} = \arccos\sqrt{-\chi}}.$$

$\theta_0 < \theta_c$ では透過波は誘電体の深部 $z < 0$ へ伝わる。したがって負の法線成分を選び

$$\boxed{K_{tz} = -k\sqrt{1 + \chi - \sin^2\theta_0} \quad (\theta_0 < \theta_c)}.$$

$\theta_0 > \theta_c$ では K_{tz} は純虚数となる。$\kappa = k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} > 0$ と置く。場の依存性は $e^{iK_{tz}z}$ で、媒質は $z \le 0$ にあるので、$z \to -\infty$ で減衰する枝は $K_{tz} = -i\kappa$ である：

$$\boxed{K_{tz} = -ik\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)} \quad (\theta_0 > \theta_c)}.$$

実際 $e^{iK_{tz}z} = e^{\kappa z} = e^{-\kappa|z|}$ となる。逆の虚数符号では負の z へ進むにつれて場が増大する。

[2.6] $1/e$ 減衰深さ

振幅が境界値の $1/e$ となる深さの大きさ $z_0 = |z|$ は $e^{-\kappa z_0} = e^{-1}$ より

$$\boxed{z_0 = \frac{1}{k\sqrt{\sin^2\theta_0 - (1+\chi)}} = \frac{1}{k\sqrt{-\chi - \cos^2\theta_0}}}, \qquad 0 \le \cos^2\theta_0 < -\chi.$$

固定した χ では z_0 は $\cos^2\theta_0$ とともに増え、臨界値 $\cos^2\theta_c = -\chi$ に下側から近づくと発散する。図は無次元変数 $u = \cos^2\theta_0/(-\chi)$ を用いて形を示す。

