物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 一様な無限鎖

n 番目の質点は左右のばねから $k(x_{n+1}-x_n)$, $k(x_{n-1}-x_n)$ の力を受けるため

$$\boxed{m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1})}.$$

[1.2] 平面波の分散関係

$x_n = e^{iqn}c_q(t)$ と置くと

$$\boxed{\ddot{c}_q + \frac{2k}{m}(1-\cos q)c_q = 0} \quad \left(= \ddot{c}_q + \frac{4k}{m}\sin^2\frac{q}{2}\,c_q = 0\right).$$

物理変位はこの複素解の実部である。

[1.3] 固有振動数

$0 < q < 2\pi$ では

$$\boxed{\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\left|\sin\frac{q}{2}\right|}, \qquad c_q(t) = C_+e^{i\omega_q t} + C_-e^{-i\omega_q t}.$$

k/m の次元は s^{-2} であり、ω_q は角振動数の次元を持つ。

[1.4] 一様変位モード

$q = 0$ では復元力が消え、$\ddot{c}_0 = 0$ より

$$\boxed{c_0(t) = At + B}.$$

定数項は鎖全体の並進、時間一次項は一様速度の並進に対応する。

[2.1] 質量欠陥を含む運動方程式

質量が変わる原点と通常のサイトでは

$$M\ddot{x}_0 = k(x_1 - 2x_0 + x_{-1}), \qquad m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) \quad (n \neq 0).$$

隣り合うばねは両質点に等大反対向きの力を及ぼすので、原点の質量だけを M に置き換える。

[2.2] バルクの振動数

欠陥から離れた $n \le -2$ と $n \ge 1$ では質量は m である。$e^{\pm iqn - i\omega_q t}$ を代入すれば

$$\boxed{m\omega_q^2 = 2k(1-\cos q) = 4k\sin^2\frac{q}{2}},$$

すなわち [1.3] の分散関係が両側で成り立つ。

[2.3] 界面での連立方程式

入射・反射・透過波を

$$x_n(t) = \begin{cases} (e^{iqn} + R_q e^{-iqn})e^{-i\omega_q t}, & n \le -1, \\ T_q e^{iqn} e^{-i\omega_q t}, & n \ge 0 \end{cases}$$

とする。原点では $x_0 = T_q e^{-i\omega_q t}$, $x_1 = T_q e^{iq} e^{-i\omega_q t}$, $x_{-1} = (e^{-iq} + R_q e^{iq})e^{-i\omega_q t}$. これを質量 M の運動方程式に代入すると

$$\left(2 - \frac{M\omega_q^2}{k} - e^{iq}\right) T_q - e^{iq} R_q = e^{-iq}.$$

$n = -1$ の式には $x_{-2} = (e^{-2iq} + R_q e^{2iq})e^{-i\omega_q t}$ を代入し、バルク分散を使うと

$$2\cos q(e^{-iq} + R_q e^{iq}) = e^{-2iq} + R_q e^{2iq} + T_q \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T_q - R_q = 1}.$$

従って

$$\boxed{\left(2 - e^{iq} - \frac{4M}{m}\sin^2\frac{q}{2}\right) T_q - e^{iq} R_q = e^{-iq}, \qquad R_q = T_q - 1}.$$

[2.4] 透過・反射振幅

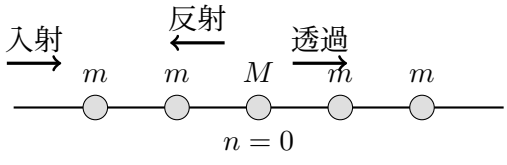
$R_q = T_q - 1$ を界面式へ代入し、$m\omega_q^2/k = 2 - 2\cos q$ を用いると

$$\boxed{T_q = \frac{e^{-iq} - e^{iq}}{2(1-M/m) + (M/m)e^{-iq} - (2-M/m)e^{iq}}}, \qquad \boxed{R_q = T_q - 1}.$$

この複素振幅には界面の位相も含まれる。

[2.5] 質量極限の解釈

$M = m$ では分子・分母が等しく $T_q = 1, R_q = 0$ となり、鎖は一様で散乱しない。$M \to \infty$ では有限な $0 < q < \pi$ に対して $T_q \to 0$, $R_q \to -1$ であり、原点が動かない固定端から位相反転して反射する。



[3.1] 周期境界条件

周期条件 $A_q = C_q e^{iqL}$, $B_q = D_q e^{-iqL}$ は $C_q = A_q e^{-iqL}$, $B_q = D_q e^{-iqL}$ と同値である。$\binom{C_q}{B_q} = S_q \binom{A_q}{D_q}$ と合わせると、入射係数ベクトルは S_q の固有ベクトルで固有値 e^{-iqL} を持つ。従って

$$\det(S_q - e^{-iqL} I) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{e^{-iqL} = T_q + R_q \quad \text{or} \quad e^{-iqL} = T_q - R_q}.$$

S_q は $(1,1)^{\mathsf{T}}$ と $(1,-1)^{\mathsf{T}}$ にそれぞれ固有値 $T_q + R_q$ と $T_q - R_q$ で作用する。二固有値が異なれば、各根は独立な一つの振動モードを与える。

[3.2] 一様質量 $M = m$

このとき $T_q = 1, R_q = 0$ なので

$$e^{-iqL} = 1, \qquad \boxed{q = \frac{2\pi l}{L}}.$$

$0 < q < \pi$ では $l = 1, \ldots, L/2 - 1$。各許容 q で二方向の平面波が独立なので正の内部モードは $L - 2$ 個で、

$$\boxed{\omega_l = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{l\pi}{L}}.$$

開区間に含めない $q = 0$ は一様並進、$q = \pi$ は隣り合う質点が逆向きに動く帯域端モードであり、合わせて一様鎖の L 個の座標自由度を満たす。

[3.3] 質量 $M = 2m$

透過振幅は

$$T_q = \frac{e^{-iq} - e^{iq}}{2(e^{-iq} - 1)}, \qquad T_q - R_q = 1, \qquad T_q + R_q = 2T_q - 1 = e^{iq}.$$

従って二つの固有値条件から

$$q = \frac{2\pi l}{L} \quad (l = 1, \ldots, L/2 - 1), \qquad q = \frac{2\pi l}{L+1} \quad (l = 1, \ldots, L/2),$$

いずれも $0 < q < \pi$ を満たす。対応する振動数は両系列について

$$\boxed{\omega_q = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{q}{2}}.$$

系列間に重複はなく、式 (2) 型の伝搬モード数は $(L/2 - 1) + L/2 = L - 1$ 個となる。残り 1 個は $q = 0$ の一様並進モードである。これら L 個で全座標自由度を満たすため、別の局在高周波モードは加わらない。

[3.4] 固定質点極限 $M \to \infty$

この極限では $T_q \to 0$, $R_q \to -1$ となり、周期条件の固有値は ± 1。従って

$$e^{-iqL} = \pm 1, \qquad \boxed{q_j = \frac{j\pi}{L} \quad (j = 1, \ldots, L-1)}.$$

固有振動数は $\boxed{\omega_j = 2\sqrt{k/m}\sin(j\pi/(2L))}$. 中央の質点は動かないため、有限質量の自由度は他の $L - 1$ 個だけであり、上の解が全ての正の振動モードを数え尽くす。