物理工学専攻院試解答集
2022 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] ハミルトニアンと振幅方程式

$B_x = B_1\cos\omega t,\ B_y = B_1\sin\omega t,\ B_z = B_0$ を問題の行列表式に代入する。$\omega_0 = -2\mu B_0/\hbar$, $\omega_1 = -2\mu B_1/\hbar$ より

$$\hat{H}(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} \omega_0 & \omega_1 e^{-i\omega t} \\ \omega_1 e^{i\omega t} & -\omega_0 \end{pmatrix}.$$

$i\hbar\, d|\psi\rangle/dt = \hat{H}|\psi\rangle$ に $|\psi\rangle = (\alpha,\beta)^T$ を代入して

$$i\dot{\alpha} = \frac{\omega_0}{2}\alpha + \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}\beta, \qquad i\dot{\beta} = \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}\alpha - \frac{\omega_0}{2}\beta.$$

[1.2] 回転枠

$\alpha = ae^{-i\omega_0 t/2}$, $\beta = be^{i\omega_0 t/2}$ と書き換えると、対角項は相殺される。

$$i\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\omega_1}{2}\begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\omega-\omega_0)t} \\ e^{i(\omega-\omega_0)t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \boxed{A(t) = e^{-i(\omega-\omega_0)t}}.$$

以下 $\Delta = \omega - \omega_0$ とする。静磁場だけの区間では a, b は一定であり、実験室系の位相因子のみが進む。

[2.1] 単一パルスの遷移確率

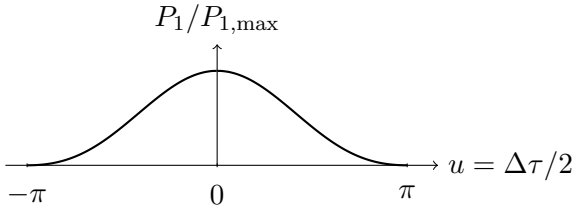
初期状態 $|-\rangle$ は $a(0) = 0, b(0) = 1$ である。弱遷移近似 $b \simeq 1$ のもとで

$$\dot{a} = -\frac{i\omega_1}{2}e^{-i\Delta t}, \qquad a(\tau) = \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta\tau} - 1).$$

したがって

$$\boxed{P_1(\omega) = \frac{\omega_1^2}{\Delta^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right) = \frac{\omega_1^2\tau^2}{4}\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)}. \quad \mathrm{sinc}\, x = \frac{\sin x}{x}.$$

$\Delta \to 0$ では連続的に $P_1(\omega_0) = \omega_1^2\tau^2/4$ となる。共鳴で最大、最近傍の零点は $\boxed{\omega = \omega_0 \pm 2\pi/\tau}$。図はピークを 1 に規格化した中央ローブで、横軸は $u = \Delta\tau/2$ とする。



[2.2] 単一パルスの励起スペクトル

周波数の離調に対して中央ローブは sinc^2 形であり、両側の最近接零点は共鳴から等距離にある。パルス時間 τ を長くすると、零点間隔 $4\pi/\tau$ が狭くなる。

[3.1] 二つのパルスと Ramsey 干渉

第一パルス後の回転枠振幅は

$$a(\tau) = \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta\tau} - 1).$$

自由発展中は a, b が一定である。第二パルス中も同じ実験室位相の回転場が続くので、$\dot{a} = -i\omega_1 e^{-i\Delta t}/2$ を T から $T+\tau$ まで積分すると

$$\begin{aligned} a(T+\tau) &= a(\tau) + \frac{\omega_1}{2\Delta}(e^{-i\Delta(T+\tau)} - e^{-i\Delta T}) \\ &= \frac{\omega_1}{2\Delta}(1 + e^{-i\Delta T})(e^{-i\Delta\tau} - 1). \end{aligned}$$

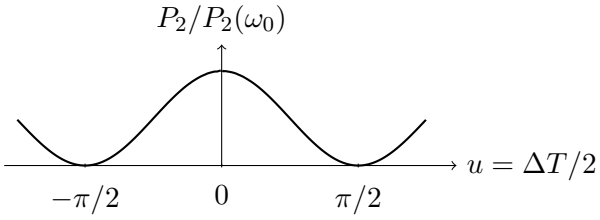
従って

$$\boxed{P_2(\omega) = \frac{4\omega_1^2}{\Delta^2}\cos^2\left(\frac{\Delta T}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\Delta\tau}{2}\right)}.$$

共鳴極限は $P_2(\omega_0) = \omega_1^2\tau^2$ で、弱遷移条件はこの値が十分小さいことを含む。$T \gg \tau$ では sinc^2 包絡内に細い干渉縞が並び、最近接零点は Ramsey 因子から

$$\boxed{\Omega_1 = \omega_0 - \frac{\pi}{T}, \qquad \Omega_2 = \omega_0 + \frac{\pi}{T}}, \qquad \boxed{\Delta\Omega = \frac{2\pi}{T}}.$$

この線幅で定義する測定精度は、間隔 T を長くすると改善する。規格化スペクトルの模式図は $\tau/T = 0.1$ の例で、包絡の最近傍零点より内側にある最初の Ramsey 零点を示す。



[4.1] 二重スリットとの対応

二重スリットの干渉因子の隣接暗線間隔 $\lambda L/l$ に、Ramsey 零点間隔 $2\pi/T$ が対応する。また単スリット包絡の最初の暗線間隔 $2\lambda L/D$ に、パルス包絡の最初の零点間隔 $4\pi/\tau$ が対応する。両者を比較して

$$\frac{2\pi}{T} \leftrightarrow \frac{\lambda L}{l}, \qquad \frac{4\pi}{\tau} \leftrightarrow \frac{2\lambda L}{D}; \qquad \boxed{T \leftrightarrow l, \quad \tau \leftrightarrow D}.$$

T は二つのパルス間隔に由来する細かい干渉縞、τ は有限パルス長に由来する広い回折包絡を決める。

[4.2] 中間測定による干渉の消失

中間時刻 $\tau < t < T$ の z 測定で $|+\rangle$ を得る確率は P_1、$|-\rangle$ は $1-P_1$ である。測定により二つのパルス間の相対位相は失われる。$|+\rangle$ から始める第二パルスでは $a \simeq 1$ として振幅方程式を使うと、$b(T+\tau) - b(T) = -(i\omega_1/2)\int_T^{T+\tau} e^{i\Delta t}\,dt$ である。その絶対値二乗は P_1 なので、第二パルスはどちらの基底状態からも反対状態への遷移確率が P_1 となる。最後に $|+\rangle$ を得る全確率は

$$P_{\mathrm{meas}} = (1-P_1)P_1 + P_1(1-P_1) = 2P_1(1-P_1) \simeq 2P_1 \qquad (P_1 \ll 1).$$

従って二重パルスの細かい Ramsey 干渉縞は消え、$P_1(\omega)$ と同じ単一パルスの広い sinc^2 形が残る（高さは弱遷移近似で約 2 倍）。図は弱遷移近似の $2P_1$ をピークで規格化して描く。

