物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 時間発展演算子

時間に依らない $\hat{H}$ に対し、シュレーディンガー方程式の形式解は

$$\boxed{\hat{U}(t-t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]}. \tag{1}$$

指数中は無次元であり、$\hat{U}(0) = \hat{I}$ を満たす。$\hat{H}$ は時間に依存しないので、時間順序積は必要ない。

[2] ユニタリー性

$\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ より

$$\hat{U}(t-t_0)^\dagger = \exp\left[+\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right].$$

指数の中身は同じ演算子のスカラー倍なので互いに可換であり、

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \exp\left[+\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right] = \hat{I}. \tag{2}$$

従って $\hat{U}$ はユニタリーである。

[3] 状態ベクトルの内積

時間発展した状態について

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\hat{U}(t-t_0)^\dagger\hat{U}(t-t_0)|\psi_0\rangle \tag{3}$$

$$= \langle\psi_0|\hat{I}|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\psi_0\rangle, \tag{4}$$

となり、ノルムは保存される。

[4] z 軸周りの発展

$\hat{H} = a\hat{\sigma}_z$ なので、$\hat{\sigma}_z$ の固有値 $+1, -1$ に対応して時間発展演算子は

$$\boxed{\hat{U}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-ia\tau/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{ia\tau/\hbar} \end{pmatrix}}. \tag{5}$$

[5] 位相シフト

一つの選択として

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hbar\phi/\tau \end{pmatrix} \tag{6}$$

とすれば、$\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \mathrm{diag}(1, e^{i\phi}) = \hat{U}_\phi$ となる。$c\hat{I}_2$ を加えると時間発展全体に $e^{-ic\tau/\hbar}$ が掛かるため、絶対位相を無視する場合にはそのようなハミルトニアンも同じ相対位相を実現する。

[6] NOT ゲート

パウリ行列は $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{I}_2$ を満たす。この関係で指数級数を偶数次と奇数次に分けると、任意の実数 x について

$$e^{ix\hat{\sigma}_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\hat{I}_2 + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\hat{\sigma}_x = \cos x\, \hat{I}_2 + i \sin x\, \hat{\sigma}_x \tag{7}$$

となる。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_2 - \hat{\sigma}_x) = \frac{\pi\hbar}{2\tau}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

とすると

$$\hat{U}(\tau) = e^{-i\pi(\hat{I}_2 - \hat{\sigma}_x)/2} = e^{-i\pi/2} e^{i\pi\hat{\sigma}_x/2} = (-i)(i\hat{\sigma}_x) = \hat{\sigma}_x. \tag{9}$$

[7] 任意方向のパウリ演算子

$$\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \qquad \hat{N} = \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

とおく。$|\boldsymbol{n}| = 1$ であり、パウリの積 $\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \delta_{jk}\hat{I}_2 + i\sum_l \epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l$ の反対称項は $n_j n_k$ と縮約すると消える。よって $\hat{N}^2 = \hat{I}_2$ である。$c = \cos(a\tau/\hbar)$、$s = \sin(a\tau/\hbar)$ とこの節で略記する。$\hat{N}$ と $\hat{I}_2$ は可換で、[6] と同じ偶奇分離を $\hat{N}$ に適用すると

$$\hat{U}(\tau) = e^{-ib\tau/\hbar} e^{-ia\tau\hat{N}/\hbar} \tag{10}$$

$$= e^{-ib\tau/\hbar}\left[\cos\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\hat{I}_2 - i\sin\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\hat{N}\right] \tag{11}$$

$$= e^{-ib\tau/\hbar}\begin{pmatrix} c - is\cos\theta & -is\sin\theta e^{-i\phi} \\ -is\sin\theta e^{i\phi} & c + is\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{12}$$

[8] アダマールゲート

与えられた $\hat{U}_H$ はエルミートかつ $\hat{U}_H^2 = \hat{I}_2$ である。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_2 - \hat{U}_H) = \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{2}\tau}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

と選べば、$\exp[-i\hat{H}\tau/\hbar] = \hat{U}_H$ である。

[9] 制御位相シフト

計算基底の順を $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$ とする。対角ハミルトニアン

$$\hat{H} = \mathrm{diag}\left(0, 0, 0, -\frac{\hbar\phi}{\tau}\right) \tag{14}$$

を用いると $\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, e^{i\phi})$ となり、指定された $\hat{U}_{C-\phi}$ を得る。

[10] 制御 NOT

指定された $\hat{U}_{\mathrm{CNOT}}$ はエルミートで、$\hat{U}_{\mathrm{CNOT}}^2 = \hat{I}_4$ である。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_4 - \hat{U}_{\mathrm{CNOT}}) = \frac{\pi\hbar}{2\tau}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

とすれば $\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \hat{U}_{\mathrm{CNOT}}$ となる。

物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1] 次元の確認

密度 ρ の次元は ML^{-3}、体積の次元は L^3、加速度の次元は LT^{-2} である。従って運動方程式の左辺は力の次元

$$[\rho \Delta V\, \partial_t^2 \boldsymbol{u}] = (ML^{-3})L^3(LT^{-2}) = MLT^{-2}.$$

$\boldsymbol{F}$ は単位体積当たりの力なので $[\boldsymbol{F}] = ML^{-2}T^{-2}$ であり、$[\boldsymbol{F}\Delta V] = MLT^{-2}$ となる。両辺の次元は一致する。

[2] 下面に働く力

上面と下面が接する媒質の微小面に働く力は、作用・反作用により等しい大きさで逆向きである。上面の外向き法線は $+x_3$ 方向で、その応力ベクトルが $\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}', t)$ である。従って隣接する体積素が共有面を通じて下面に及ぼす応力ベクトルは

$$-\boldsymbol{p}^{(3)}(\boldsymbol{x}'', t). \tag{1}$$

この符号は、面の法線を反転したことに対応する。

[3] 面応力の合力

x_k に垂直な正側の面と負側の面が x_1 方向に及ぼす力の差は

$$\left[p_1^{(k)}\left(\boldsymbol{x} + \frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_k, t\right) - p_1^{(k)}\left(\boldsymbol{x} - \frac{\Delta x_k}{2}\boldsymbol{e}_k, t\right)\right]\Delta A_k, \qquad \Delta A_k = \prod_{r\neq k}\Delta x_r.$$

微小量の一次まで Taylor 展開すると、これは $\partial p_1^{(k)}/\partial x_k\, \Delta x_k \Delta A_k$ である。$\Delta x_k \Delta A_k = \Delta V$ だから、$k = 1, 2, 3$ の三対の面を足し、体積で割ると

$$F_1(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial p_1^{(k)}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial x_k}. \tag{2}$$

[4] 等方弾性体の運動方程式

$F_j = \sum_k \partial_k p_j^{(k)}$ と構成式を用いると

$$F_j = \frac{1}{2}\sum_{k,m,n} c_{jkmn}\partial_k(\partial_n u_m + \partial_m u_n) \tag{3}$$

$$= \frac{\lambda}{2}\sum_{k,m,n} \delta_{jk}\delta_{mn}\partial_k(\partial_n u_m + \partial_m u_n) \tag{4}$$

$$+ \frac{\mu}{2}\sum_{k,m,n} (\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{jn}\delta_{km})\partial_k(\partial_n u_m + \partial_m u_n). \tag{5}$$

各 Kronecker の縮約を行う。λ 項では $\delta_{jk}\delta_{mn}$ が $k=j, m=n$ を選び、$\lambda\partial_j \sum_m \partial_m u_m$ となる。二つの μ 項はそれぞれ

$$\frac{\mu}{2}\sum_k (\partial_k^2 u_j + \partial_k\partial_j u_k) \tag{6}$$

となるため、合わせて $\mu\nabla^2 u_j + \mu\partial_j(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$ を与える。従って

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial t^2} = \mu\nabla^2\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}), \qquad \boxed{A = \lambda + \mu}. \tag{7}$$

[5] 縦波・横波の位相速度

縦波の平面波 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}$ では $\boldsymbol{u}_0 \parallel \boldsymbol{k}$ なので $\nabla^2\boldsymbol{u} = -k^2\boldsymbol{u}$ と $\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) = -k^2\boldsymbol{u}$ である。運動方程式から

$$\rho\omega^2 = (\lambda+2\mu)k^2, \qquad \boxed{v_l = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}}.$$

横波では $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_0 = 0$ で発散項が消えるため

$$\rho\omega^2 = \mu k^2, \qquad \boxed{v_t = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}}.$$

[6] 横波のみの反射

構成式を表面法線 x_2 について縮約すると

$$p_1^{(2)} = \mu(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2), \qquad p_2^{(2)} = \lambda\nabla\cdot\boldsymbol{u} + 2\mu\partial_2 u_2 \tag{8}$$

である。入射波と反射波の境界上の位相をそれぞれ $f = e^{i(k_t \sin\alpha_t x_1 - \omega_t t)}$、$f' = e^{i(k'_t \sin\alpha'_t x_1 - \omega'_t t)}$ と書く。横波の偏極ベクトルと波数ベクトルを代入すると

$$p_1^{(2)} = -i\mu\big[k_t\cos(2\alpha_t)u_t f + k'_t\cos(2\alpha'_t)u'_t f'\big], \qquad p_2^{(2)} = 2i\mu\big[k_t\sin\alpha_t\cos\alpha_t\, u_t f - k'_t\sin\alpha'_t\cos\alpha'_t\, u'_t f'\big]. \tag{9}$$

任意の x_1, t で非零の応力成分同士が相殺するには、両者の周波数と接線波数が等しくなければならない。$\alpha_t = \pi/4$ で $p_1^{(2)}$ の係数が消える場合も、$p_2^{(2)}$ の係数は非零である。境界 $x_2 = 0$ 上の位相は、位置 x_1 と時刻 t に依存する因子 $e^{i(qx_1-\omega t)}$ で決まる。時間に依らない平面境界では、入射波と反射波の周波数が等しく、境界上の接線方向波数も等しい。従って

$$\omega'_t = \omega_t, \qquad k'_t \sin\alpha'_t = k_t \sin\alpha_t. \tag{10}$$

同じ媒質中の横波であるから $k'_t = \omega'_t/v_t = k_t$ であり、角度範囲から

$$\boxed{\alpha'_t = \alpha_t, \quad \omega'_t = \omega_t, \quad \boldsymbol{k}'_t = k_t(\sin\alpha_t, -\cos\alpha_t)^{\mathsf{T}}}. \tag{11}$$

これは自由表面の全境界条件に対する位相整合である。$p_1^{(2)}$ だけを見るとその横波成分は $\cos 2\alpha_t$ に比例するため、$\alpha_t = \pi/4$ ではこの応力成分が位相整合の情報を持たない。この場合は、同じく自由端条件に含まれる $p_2^{(2)} = 0$ が非零の成分を与え、式(10)を課す。

[7] 横波だけで反射する角度

以下、式(10)により境界上で共通の位相因子をくくる。横波の発散はゼロであり、二つの表面応力成分は

$$p_1^{(2)} = -i\mu k_t \cos(2\alpha_t)(u_t + u'_t), \tag{12}$$

$$p_2^{(2)} = 2i\mu k_t \sin\alpha_t \cos\alpha_t (u_t - u'_t). \tag{13}$$

角度が $\alpha_t = 0$ のとき、式(13)は自動的にゼロであり、式(12)を満たす反射振幅は

$$\boxed{u'_t = -u_t \qquad (\alpha_t = 0)}. \tag{14}$$

この法線入射枝を、式(13)を因子で割るときに落としてはならない。

一方、$0 < \alpha_t < \pi/2$ では式(13)から $u'_t = u_t$。これを $p_1^{(2)} = 0$ に代入すると $\cos 2\alpha_t = 0$ なので

$$\boxed{\alpha_t = \frac{\pi}{4} \qquad (0 < \alpha_t < \pi/2)}. \tag{15}$$

従って問題の範囲における全ての入射角は 0 と $\pi/4$ である。

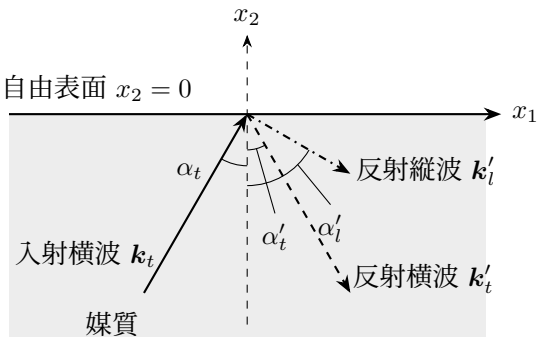


図 1: 自由表面での入射横波と、媒質内へ進む反射横波・縦波。$\lambda = \mu$、$\alpha_t = 30°$、$\alpha'_l = 60°$ の伝搬波の例。波数ベクトルの長さと接線成分は各波の速度と位相整合条件に合わせた。角度は表面の法線から測る。

[8] 接線方向波数の一致

境界 $x_2 = 0$ で応力を評価すると、各波の位相因子は $e^{i(k_x x_1 - \omega t)}$ となる。自由表面の二つの応力条件が任意の x_1, t で成り立つには、非零の反射応力が入射波と同じ時間周波数・接線方向波数を持つ必要がある。縦波では変位振幅は波数ベクトルに比例するので、比例係数を $A_l \neq 0$ として $\boldsymbol{u}'_{l0} = A_l \boldsymbol{k}'_l$ と書く。構成式から境界上の縦波応力は

$$\begin{pmatrix} p_{1,l}^{(2)} \\ p_{2,l}^{(2)} \end{pmatrix} = iA_l \begin{pmatrix} 2\mu k'_{l,1} k'_{l,2} \\ \lambda\{(k'_{l,1})^2 + (k'_{l,2})^2\} + 2\mu (k'_{l,2})^2 \end{pmatrix} e^{i(k'_{l,1} x_1 - \omega'_l t)}.$$

縦波の分散関係は $(k'_{l,1})^2+(k'_{l,2})^2=(\omega'_l/v_l)^2$ である。$\lambda,\mu>0$ のもとで二つの応力係数が同時に零にはならない。実際、第 1 係数が零なら波数成分の一方が零となり、非零周波数の分散関係から第 2 係数は非零である。この議論は法線成分が複素数の場合も成り立ち、二乗には複素共役を取らない。従って、位相整合条件は

$$\omega'_l=\omega_t\equiv\omega,\qquad k'_{l,1}=k_t\sin\alpha_t\equiv q.$$

実際に媒質内へ伝搬する縦波では $k'_l=\omega/v_l$ であり、$\boldsymbol{k}'_l=k'_l(\sin\alpha'_l,-\cos\alpha'_l)^{\mathsf{T}}$ と書けるので、

$$\boxed{k_t\sin\alpha_t=k'_l\sin\alpha'_l}. \tag{16}$$

これは境界に平行な並進対称性から生じる位相整合条件である。実数の反射角が存在する範囲は

$$\sin\alpha'_l=\frac{v_l}{v_t}\sin\alpha_t\le 1,\qquad \boxed{\sin\alpha_t\le\frac{v_t}{v_l}=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}}.$$

等号では縦波は表面に平行に伝搬する限界となる。これを超える入射角では、法線波数は分散関係から虚数となる。媒質が $x_2<0$ にあることから、内部へ減衰する枝は

$$k'_{l,2}=-i\sqrt{q^2-(\omega/v_l)^2},\qquad e^{ik'_{l,2}x_2}=e^{\sqrt{q^2-(\omega/v_l)^2}\,x_2}.$$

この場合は実反射角の射線表示を使えないが、接線成分 $k'_{l,1}=q$ の整合は保たれる。図 1は伝搬縦波が存在する範囲の例である。この内部減衰は入射横波に伴う散乱場の縦波成分である。原問は表面に局在する波の励起を除くが、その除外を散乱に伴う内部減衰成分にも適用すると、一般の超臨界角で自由表面条件を満たせない。ここでは必要な減衰縦波成分を残し、独立した表面固有波の励起は扱わない。

物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 箱中の運動量状態数

周期境界条件では各運動量成分が $p_j = 2\pi\hbar n_j/L$ と量子化される。運動量空間の 1 状態当たりの体積は $(2\pi\hbar/L)^3$ だから、単位体積当たり

$$\boxed{g_p = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3} \tag{1}$$

個の状態がある。粒子のスピン自由度は数えない。

[1.2] 三次元箱の状態密度

運動量の大きさが p から $p+dp$ の殻の体積は $4\pi p^2 dp$ であり、$\epsilon = p^2/(2m)$ より $dp/d\epsilon = m/p$ である。従って

$$D_3(\epsilon)d\epsilon = 4\pi p^2 \frac{dp}{d\epsilon} d\epsilon \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3, \tag{2}$$

$$D_3(\epsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}. \tag{3}$$

[1.3] 三次元箱の臨界温度

各 $\epsilon > 0$ の Bose 占有数は μ を 0 へ近づけるほど増える。凝縮直前は $\mu \to 0^-$ であり、連続近似で励起状態の最大粒子数は

$$N_{\mathrm{ex}}^{\max}(T) = \int_0^\infty \frac{D_3(\epsilon)}{e^{\epsilon/T}-1} d\epsilon \tag{4}$$

$$= \frac{L^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} T^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx \tag{5}$$

$$= L^3 \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \tag{6}$$

これが N に達する温度が臨界温度である。したがって

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left[\frac{N}{L^3\zeta(3/2)}\right]^{2/3}}. \tag{7}$$

積分は $\epsilon \to 0$ で $\epsilon^{-1/2}$ に比例して可積分である。

[1.4] 三次元箱の凝縮粒子数

離散的な基底状態の占有数は $N_0 = (e^{-\mu/T} - 1)^{-1}$ である。N_0 が巨視的になると $\mu \to 0^-$ となり、連続近似で数える励起状態は $\mu = 0$ での最大数を占める。従って $N = N_0 + N_{\rm ex}^{\max}(T)$ であり、$T < T_c$ では励起粒子数は $N_{\rm ex}(T) = N(T/T_c)^{3/2}$ であり、残りが基底状態に入るので

$$\boxed{N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]}. \tag{8}$$

[1.5] 二次元一様系

二次元箱では運動量空間の円環 $2\pi p\,dp$ と $dp/d\epsilon = m/p$ の積により、状態密度はエネルギーに依らない定数 $D_2 = mL^2/(2\pi\hbar^2)$ となる。$\mu < 0$ に対して

$$N_{\rm ex} = D_2 \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/T} - 1} \tag{9}$$

$$= -D_2 T \log(1 - e^{\mu/T}). \tag{10}$$

$\mu \to 0^-$ でこの数は対数発散する。従って有限温度で全粒子を収容する最大励起粒子数が有限にならず、この理想一様二次元系では有限温度の凝縮は起こらない。

[2.1] 二次元調和トラップの状態密度

エネルギー $\epsilon = n\hbar\omega$ の縮退度は $n+1$ である。エネルギーが ϵ 以下の状態数は、大きな $n = \epsilon/(\hbar\omega)$ について

$$N_{\rm st}(\epsilon) = \sum_{j=0}^{n}(j+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^2} + O\Big(\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\Big). \tag{11}$$

そのエネルギー微分の最高次項は

$$\boxed{D_{\rm tr}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(\hbar\omega)^2}}. \tag{12}$$

[2.2] トラップ中の臨界温度

臨界点では化学ポテンシャルは基底エネルギー 0 に達する。$\hbar\omega \ll T_c$ の連続近似で基底状態を別に扱い、励起状態数の主要項を積分すると、全粒子数は

$$N = \int_0^\infty \frac{D_{\rm tr}(\epsilon)}{e^{\epsilon/T_c} - 1} d\epsilon \tag{13}$$

$$= \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2. \tag{14}$$

よって

$$\boxed{T_c = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\hbar\omega\sqrt{N}}. \tag{15}$$

[2.3] 有限な臨界温度を保つ極限

与えられたポテンシャルは $V = V_0(x^2 + y^2)/L_0^2$ であり、調和振動子形 $m\omega^2(x^2 + y^2)/2$ と係数を比べると

$$\omega = \frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{2V_0}{m}}. \tag{16}$$

V_0 を固定すると $T_c \propto \sqrt{N}/L_0$ である。$N \to \infty$ でも T_c が有限かつ非零に保たれる条件は

$$\boxed{L_0 \propto N^{1/2}}. \tag{17}$$

[2.4] トラップ中の凝縮粒子数

臨界以下では励起粒子数は $N_{\rm ex}(T) = N(T/T_c)^2$ なので

$$\boxed{N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]}. \tag{18}$$

物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1] 静的な双極子ポテンシャル

点 1,2 の位置は $z = \pm l/2$ なので、$r_\pm = (r^2 \mp rl\cos\theta + l^2/4)^{1/2}$ である。l/r の一次まで

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{l\cos\theta}{r^2} + O(l^3/r^4).$$

従って $ql = \alpha_0 E_0$ を用いれば

$$\varphi = \frac{\alpha_0 E_0 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \boxed{C = 0, \quad D = 1}.$$

[2] 遅延ポテンシャル

$\tau = t - r/c$ とおくと、$r_\pm \simeq r \mp (l/2)\cos\theta$ より

$$q(t - r_\pm/c)l = \alpha_0 E_0 \cos\left(\omega_0\tau \pm \frac{\omega_0 l\cos\theta}{2c}\right) \simeq \alpha_0 E_0 \left[\cos(\omega_0\tau) \mp \frac{\omega_0 l\cos\theta}{2c}\sin(\omega_0\tau)\right].$$

また $1/r_\pm \simeq r^{-1} \pm l\cos\theta/(2r^2)$. 代入すると

$$\varphi = \frac{\alpha_0 E_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\omega_0}{cr}\sin(\omega_0\tau) + \frac{1}{r^2}\cos(\omega_0\tau)\right],$$

ゆえに

$$\boxed{F = -\frac{\omega_0}{c}\sin(\omega_0\tau), \qquad G = \cos(\omega_0\tau)}.$$

[3] ベクトルポテンシャル

$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$ かつ $\dot{p}(\tau) = -\alpha_0 E_0\omega_0\sin(\omega_0\tau)$ より

$$\boxed{\boldsymbol{A} = -\frac{\alpha_0 E_0\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin(\omega_0\tau)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)}.$$

[4] スカラーポテンシャルの勾配

放射場の次数だけを保つ。遅延時刻 $\tau = t - r/c$ を用いると、例えば

$$\partial_r\frac{\sin(\omega_0\tau)}{r} = -\frac{\omega_0\cos(\omega_0\tau)}{cr} - \frac{\sin(\omega_0\tau)}{r^2} \tag{1}$$

であり、遅延引数の微分から $1/r$ 項が生じる。角度微分は $1/r^2$ にとどまる。

$$\boxed{\nabla\varphi = \frac{\alpha_0 E_0\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_r + O(r^{-2})}.$$

[5] 放射電場と磁束密度

時間微分は $\partial_t \boldsymbol{A} = -\alpha_0 E_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0\tau)(\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta)/(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)$. その動径成分は $-\nabla\varphi$ の動径成分と相殺し、

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_\theta}, \qquad \boxed{\boldsymbol{B} = -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_\phi}.$$

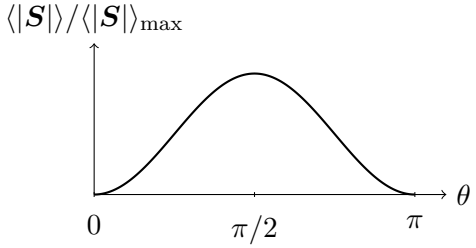
磁場の方位角成分は $B_\phi = r^{-1}\{\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r\}$ である。$\partial_r\tau = -1/c$ により第 1 項から上の $1/r$ 項が生じ、第 2 項は $O(r^{-2})$ である。従って $B_\phi = E_\theta/c$。両場は動径方向に直交し、$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$。

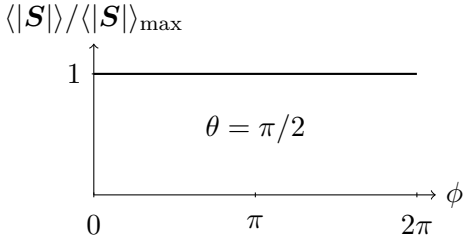
[6] ポインティングベクトルと角度分布

$\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_r$ なので、瞬時値は

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{(\alpha_0 E_0 \omega_0^2)^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_r}.$$

従って距離依存は r^{-2}、方位角 ϕ に依らない。時間平均した角度分布は $\langle|\boldsymbol{S}|\rangle \propto \sin^2\theta$ で、$\theta = 0, \pi$ で零、$\theta = \pi/2$ で最大となる。下図は距離 r を固定した時間平均の角度分布である。左は θ 依存性、右は $\theta = \pi/2$ に固定した ϕ 依存性を示す。瞬時値にも同じ角度因子があり、時刻による変化は $\cos^2(\omega_0\tau)$ による。





[7] 変調された分極率と側帯波

[2] の同じ一次展開を任意の時間依存 $p(t)$ に適用し、[3] の電流からのポテンシャルと合わせると

$$\varphi = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p(\tau)}{r^2} + \frac{\dot{p}(\tau)}{cr}\right], \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\dot{p}(\tau)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_z. \tag{2}$$

$\partial_r\tau = -1/c$ より、放射場の $1/r$ 項は

$$-\nabla\varphi\big|_{1/r} = \frac{\ddot{p}(\tau)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_r, \tag{3}$$

$$-\partial_t\boldsymbol{A} = -\frac{\ddot{p}(\tau)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta). \tag{4}$$

動径成分が相殺するので、$\boldsymbol{E} = \sin\theta\,\ddot{p}(\tau)\boldsymbol{e}_\theta/(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)$ となる。積和公式を使うと

$$p(\tau) = E_0\left[\alpha_0\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\right],$$

$$\ddot{p}(\tau) = -E_0\left[\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0+\omega_v)^2\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0-\omega_v)^2\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\right].$$

従って

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{E_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\Big[\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0+\omega_v)^2\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0-\omega_v)^2\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\Big]\boldsymbol{e}_\theta.$$

散乱波に含まれる正の角振動数は $\boxed{\omega_0,\ \omega_0+\omega_v,\ \omega_0-\omega_v}$ である（$\omega_v \ll \omega_0$）。