物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1] 静的な双極子ポテンシャル

点 1,2 の位置は $z = \pm l/2$ なので、$r_\pm = (r^2 \mp rl\cos\theta + l^2/4)^{1/2}$ である。l/r の一次まで

$$\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} = \frac{l\cos\theta}{r^2} + O(l^3/r^4).$$

従って $ql = \alpha_0 E_0$ を用いれば

$$\varphi = \frac{\alpha_0 E_0 \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \boxed{C = 0, \quad D = 1}.$$

[2] 遅延ポテンシャル

$\tau = t - r/c$ とおくと、$r_\pm \simeq r \mp (l/2)\cos\theta$ より

$$q(t - r_\pm/c)l = \alpha_0 E_0 \cos\left(\omega_0\tau \pm \frac{\omega_0 l\cos\theta}{2c}\right) \simeq \alpha_0 E_0 \left[\cos(\omega_0\tau) \mp \frac{\omega_0 l\cos\theta}{2c}\sin(\omega_0\tau)\right].$$

また $1/r_\pm \simeq r^{-1} \pm l\cos\theta/(2r^2)$. 代入すると

$$\varphi = \frac{\alpha_0 E_0\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{\omega_0}{cr}\sin(\omega_0\tau) + \frac{1}{r^2}\cos(\omega_0\tau)\right],$$

ゆえに

$$\boxed{F = -\frac{\omega_0}{c}\sin(\omega_0\tau), \qquad G = \cos(\omega_0\tau)}.$$

[3] ベクトルポテンシャル

$\boldsymbol{e}_z = \cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta$ かつ $\dot{p}(\tau) = -\alpha_0 E_0\omega_0\sin(\omega_0\tau)$ より

$$\boxed{\boldsymbol{A} = -\frac{\alpha_0 E_0\omega_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin(\omega_0\tau)(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)}.$$

[4] スカラーポテンシャルの勾配

放射場の次数だけを保つ。遅延時刻 $\tau = t - r/c$ を用いると、例えば

$$\partial_r\frac{\sin(\omega_0\tau)}{r} = -\frac{\omega_0\cos(\omega_0\tau)}{cr} - \frac{\sin(\omega_0\tau)}{r^2} \tag{1}$$

であり、遅延引数の微分から $1/r$ 項が生じる。角度微分は $1/r^2$ にとどまる。

$$\boxed{\nabla\varphi = \frac{\alpha_0 E_0\omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\cos\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_r + O(r^{-2})}.$$

[5] 放射電場と磁束密度

時間微分は $\partial_t \boldsymbol{A} = -\alpha_0 E_0 \omega_0^2 \cos(\omega_0\tau)(\cos\theta \boldsymbol{e}_r - \sin\theta \boldsymbol{e}_\theta)/(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)$. その動径成分は $-\nabla\varphi$ の動径成分と相殺し、

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\sin\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_\theta}, \qquad \boxed{\boldsymbol{B} = -\frac{\alpha_0 E_0 \omega_0^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\sin\theta\cos(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_\phi}.$$

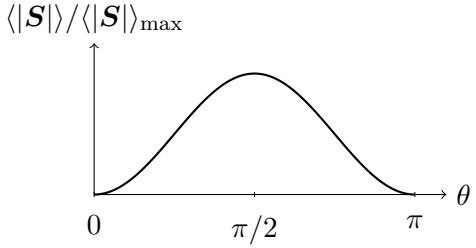
磁場の方位角成分は $B_\phi = r^{-1}\{\partial_r(rA_\theta) - \partial_\theta A_r\}$ である。$\partial_r\tau = -1/c$ により第 1 項から上の $1/r$ 項が生じ、第 2 項は $O(r^{-2})$ である。従って $B_\phi = E_\theta/c$。両場は動径方向に直交し、$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$。

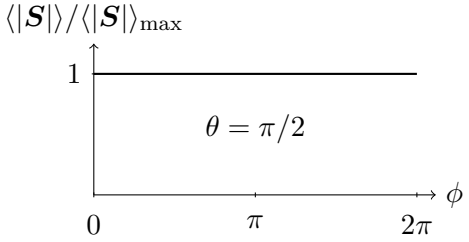
[6] ポインティングベクトルと角度分布

$\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_\phi = \boldsymbol{e}_r$ なので、瞬時値は

$$\boxed{\boldsymbol{S} = \frac{(\alpha_0 E_0 \omega_0^2)^2}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3 r^2}\sin^2\theta\cos^2(\omega_0\tau)\boldsymbol{e}_r}.$$

従って距離依存は r^{-2}、方位角 ϕ に依らない。時間平均した角度分布は $\langle|\boldsymbol{S}|\rangle \propto \sin^2\theta$ で、$\theta = 0, \pi$ で零、$\theta = \pi/2$ で最大となる。下図は距離 r を固定した時間平均の角度分布である。左は θ 依存性、右は $\theta = \pi/2$ に固定した ϕ 依存性を示す。瞬時値にも同じ角度因子があり、時刻による変化は $\cos^2(\omega_0\tau)$ による。





[7] 変調された分極率と側帯波

[2] の同じ一次展開を任意の時間依存 $p(t)$ に適用し、[3] の電流からのポテンシャルと合わせると

$$\varphi = \frac{\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{p(\tau)}{r^2} + \frac{\dot{p}(\tau)}{cr}\right], \qquad \boldsymbol{A} = \frac{\dot{p}(\tau)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_z. \tag{2}$$

$\partial_r\tau = -1/c$ より、放射場の $1/r$ 項は

$$-\nabla\varphi\big|_{1/r} = \frac{\ddot{p}(\tau)\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\boldsymbol{e}_r, \tag{3}$$

$$-\partial_t\boldsymbol{A} = -\frac{\ddot{p}(\tau)}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta). \tag{4}$$

動径成分が相殺するので、$\boldsymbol{E} = \sin\theta\,\ddot{p}(\tau)\boldsymbol{e}_\theta/(4\pi\varepsilon_0 c^2 r)$ となる。積和公式を使うと

$$p(\tau) = E_0\left[\alpha_0\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\right],$$

$$\ddot{p}(\tau) = -E_0\left[\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0+\omega_v)^2\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0-\omega_v)^2\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\right].$$

従って

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{E_0 \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\Big[\alpha_0\omega_0^2\cos(\omega_0\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0+\omega_v)^2\cos((\omega_0+\omega_v)\tau) + \frac{\alpha_1}{2}(\omega_0-\omega_v)^2\cos((\omega_0-\omega_v)\tau)\Big]\boldsymbol{e}_\theta.$$

散乱波に含まれる正の角振動数は $\boxed{\omega_0,\ \omega_0+\omega_v,\ \omega_0-\omega_v}$ である（$\omega_v \ll \omega_0$）。