物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 箱中の運動量状態数

周期境界条件では各運動量成分が $p_j = 2\pi\hbar n_j/L$ と量子化される。運動量空間の 1 状態当たりの体積は $(2\pi\hbar/L)^3$ だから、単位体積当たり

$$\boxed{g_p = \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3} \tag{1}$$

個の状態がある。粒子のスピン自由度は数えない。

[1.2] 三次元箱の状態密度

運動量の大きさが p から $p+dp$ の殻の体積は $4\pi p^2 dp$ であり、$\epsilon = p^2/(2m)$ より $dp/d\epsilon = m/p$ である。従って

$$D_3(\epsilon)d\epsilon = 4\pi p^2 \frac{dp}{d\epsilon} d\epsilon \left(\frac{L}{2\pi\hbar}\right)^3, \tag{2}$$

$$D_3(\epsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}. \tag{3}$$

[1.3] 三次元箱の臨界温度

各 $\epsilon > 0$ の Bose 占有数は μ を 0 へ近づけるほど増える。凝縮直前は $\mu \to 0^-$ であり、連続近似で励起状態の最大粒子数は

$$N_{\mathrm{ex}}^{\max}(T) = \int_0^\infty \frac{D_3(\epsilon)}{e^{\epsilon/T}-1} d\epsilon \tag{4}$$

$$= \frac{L^3}{4\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} T^{3/2} \int_0^\infty \frac{x^{1/2}}{e^x - 1} dx \tag{5}$$

$$= L^3 \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right). \tag{6}$$

これが N に達する温度が臨界温度である。したがって

$$\boxed{T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m}\left[\frac{N}{L^3\zeta(3/2)}\right]^{2/3}}. \tag{7}$$

積分は $\epsilon \to 0$ で $\epsilon^{-1/2}$ に比例して可積分である。

[1.4] 三次元箱の凝縮粒子数

離散的な基底状態の占有数は $N_0 = (e^{-\mu/T} - 1)^{-1}$ である。N_0 が巨視的になると $\mu \to 0^-$ となり、連続近似で数える励起状態は $\mu = 0$ での最大数を占める。従って $N = N_0 + N_{\rm ex}^{\max}(T)$ であり、$T < T_c$ では励起粒子数は $N_{\rm ex}(T) = N(T/T_c)^{3/2}$ であり、残りが基底状態に入るので

$$\boxed{N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}\right]}. \tag{8}$$

[1.5] 二次元一様系

二次元箱では運動量空間の円環 $2\pi p\,dp$ と $dp/d\epsilon = m/p$ の積により、状態密度はエネルギーに依らない定数 $D_2 = mL^2/(2\pi\hbar^2)$ となる。$\mu < 0$ に対して

$$N_{\rm ex} = D_2 \int_0^\infty \frac{d\epsilon}{e^{(\epsilon-\mu)/T} - 1} \tag{9}$$

$$= -D_2 T \log(1 - e^{\mu/T}). \tag{10}$$

$\mu \to 0^-$ でこの数は対数発散する。従って有限温度で全粒子を収容する最大励起粒子数が有限にならず、この理想一様二次元系では有限温度の凝縮は起こらない。

[2.1] 二次元調和トラップの状態密度

エネルギー $\epsilon = n\hbar\omega$ の縮退度は $n+1$ である。エネルギーが ϵ 以下の状態数は、大きな $n = \epsilon/(\hbar\omega)$ について

$$N_{\rm st}(\epsilon) = \sum_{j=0}^{n}(j+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^2} + O\Big(\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\Big). \tag{11}$$

そのエネルギー微分の最高次項は

$$\boxed{D_{\rm tr}(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(\hbar\omega)^2}}. \tag{12}$$

[2.2] トラップ中の臨界温度

臨界点では化学ポテンシャルは基底エネルギー 0 に達する。$\hbar\omega \ll T_c$ の連続近似で基底状態を別に扱い、励起状態数の主要項を積分すると、全粒子数は

$$N = \int_0^\infty \frac{D_{\rm tr}(\epsilon)}{e^{\epsilon/T_c} - 1} d\epsilon \tag{13}$$

$$= \left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2 \int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{T_c}{\hbar\omega}\right)^2. \tag{14}$$

よって

$$\boxed{T_c = \frac{\sqrt{6}}{\pi}\hbar\omega\sqrt{N}}. \tag{15}$$

[2.3] 有限な臨界温度を保つ極限

与えられたポテンシャルは $V = V_0(x^2 + y^2)/L_0^2$ であり、調和振動子形 $m\omega^2(x^2 + y^2)/2$ と係数を比べると

$$\omega = \frac{1}{L_0}\sqrt{\frac{2V_0}{m}}. \tag{16}$$

V_0 を固定すると $T_c \propto \sqrt{N}/L_0$ である。$N \to \infty$ でも T_c が有限かつ非零に保たれる条件は

$$\boxed{L_0 \propto N^{1/2}}. \tag{17}$$

[2.4] トラップ中の凝縮粒子数

臨界以下では励起粒子数は $N_{\rm ex}(T) = N(T/T_c)^2$ なので

$$\boxed{N_0 = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]}. \tag{18}$$