物理工学専攻院試解答集
2021 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 時間発展演算子

時間に依らない $\hat{H}$ に対し、シュレーディンガー方程式の形式解は

$$\boxed{\hat{U}(t-t_0) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]}. \tag{1}$$

指数中は無次元であり、$\hat{U}(0) = \hat{I}$ を満たす。$\hat{H}$ は時間に依存しないので、時間順序積は必要ない。

[2] ユニタリー性

$\hat{H}^\dagger = \hat{H}$ より

$$\hat{U}(t-t_0)^\dagger = \exp\left[+\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right].$$

指数の中身は同じ演算子のスカラー倍なので互いに可換であり、

$$\hat{U}^\dagger\hat{U} = \exp\left[+\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right]\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)\right] = \hat{I}. \tag{2}$$

従って $\hat{U}$ はユニタリーである。

[3] 状態ベクトルの内積

時間発展した状態について

$$\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi_0|\hat{U}(t-t_0)^\dagger\hat{U}(t-t_0)|\psi_0\rangle \tag{3}$$

$$= \langle\psi_0|\hat{I}|\psi_0\rangle = \langle\psi_0|\psi_0\rangle, \tag{4}$$

となり、ノルムは保存される。

[4] z 軸周りの発展

$\hat{H} = a\hat{\sigma}_z$ なので、$\hat{\sigma}_z$ の固有値 $+1, -1$ に対応して時間発展演算子は

$$\boxed{\hat{U}(\tau) = \begin{pmatrix} e^{-ia\tau/\hbar} & 0 \\ 0 & e^{ia\tau/\hbar} \end{pmatrix}}. \tag{5}$$

[5] 位相シフト

一つの選択として

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\hbar\phi/\tau \end{pmatrix} \tag{6}$$

とすれば、$\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \mathrm{diag}(1, e^{i\phi}) = \hat{U}_\phi$ となる。$c\hat{I}_2$ を加えると時間発展全体に $e^{-ic\tau/\hbar}$ が掛かるため、絶対位相を無視する場合にはそのようなハミルトニアンも同じ相対位相を実現する。

[6] NOT ゲート

パウリ行列は $\hat{\sigma}_x^2 = \hat{I}_2$ を満たす。この関係で指数級数を偶数次と奇数次に分けると、任意の実数 x について

$$e^{ix\hat{\sigma}_x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\hat{I}_2 + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\hat{\sigma}_x = \cos x\, \hat{I}_2 + i \sin x\, \hat{\sigma}_x \tag{7}$$

となる。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_2 - \hat{\sigma}_x) = \frac{\pi\hbar}{2\tau}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

とすると

$$\hat{U}(\tau) = e^{-i\pi(\hat{I}_2 - \hat{\sigma}_x)/2} = e^{-i\pi/2} e^{i\pi\hat{\sigma}_x/2} = (-i)(i\hat{\sigma}_x) = \hat{\sigma}_x. \tag{9}$$

[7] 任意方向のパウリ演算子

$$\boldsymbol{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta), \qquad \hat{N} = \boldsymbol{n}\cdot\hat{\boldsymbol{\sigma}}$$

とおく。$|\boldsymbol{n}| = 1$ であり、パウリの積 $\hat{\sigma}_j\hat{\sigma}_k = \delta_{jk}\hat{I}_2 + i\sum_l \epsilon_{jkl}\hat{\sigma}_l$ の反対称項は $n_j n_k$ と縮約すると消える。よって $\hat{N}^2 = \hat{I}_2$ である。$c = \cos(a\tau/\hbar)$、$s = \sin(a\tau/\hbar)$ とこの節で略記する。$\hat{N}$ と $\hat{I}_2$ は可換で、[6] と同じ偶奇分離を $\hat{N}$ に適用すると

$$\hat{U}(\tau) = e^{-ib\tau/\hbar} e^{-ia\tau\hat{N}/\hbar} \tag{10}$$

$$= e^{-ib\tau/\hbar}\left[\cos\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\hat{I}_2 - i\sin\left(\frac{a\tau}{\hbar}\right)\hat{N}\right] \tag{11}$$

$$= e^{-ib\tau/\hbar}\begin{pmatrix} c - is\cos\theta & -is\sin\theta e^{-i\phi} \\ -is\sin\theta e^{i\phi} & c + is\cos\theta \end{pmatrix}, \tag{12}$$

[8] アダマールゲート

与えられた $\hat{U}_H$ はエルミートかつ $\hat{U}_H^2 = \hat{I}_2$ である。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_2 - \hat{U}_H) = \frac{\pi\hbar}{2\sqrt{2}\tau}\begin{pmatrix} \sqrt{2}-1 & -1 \\ -1 & \sqrt{2}+1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

と選べば、$\exp[-i\hat{H}\tau/\hbar] = \hat{U}_H$ である。

[9] 制御位相シフト

計算基底の順を $(|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle)$ とする。対角ハミルトニアン

$$\hat{H} = \mathrm{diag}\left(0, 0, 0, -\frac{\hbar\phi}{\tau}\right) \tag{14}$$

を用いると $\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, e^{i\phi})$ となり、指定された $\hat{U}_{C-\phi}$ を得る。

[10] 制御 NOT

指定された $\hat{U}_{\mathrm{CNOT}}$ はエルミートで、$\hat{U}_{\mathrm{CNOT}}^2 = \hat{I}_4$ である。従って

$$\hat{H} = \frac{\pi\hbar}{2\tau}(\hat{I}_4 - \hat{U}_{\mathrm{CNOT}}) = \frac{\pi\hbar}{2\tau}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

とすれば $\exp(-i\hat{H}\tau/\hbar) = \hat{U}_{\mathrm{CNOT}}$ となる。