物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 固定端をもつ質点ばね系の固有振動

質点 n の変位を $x_n(t)$ とし、固定端の条件を便宜上 $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$ と書く。質点 n に左右のばねが及ぼす力は $-k(x_n - x_{n-1})$ と $-k(x_n - x_{n+1})$ なので、

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2} = -k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \qquad n = 1, \dots, N. \tag{1}$$

従って、$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^{\mathsf{T}}$ に対する行列は

$$K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -K\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

提案された固有モードの内点成分について、恒等式 $\sin(q(n-1)) + \sin(q(n+1)) = 2\sin(qn)\cos q$ より

$$(K\boldsymbol{u}_\ell)_n = k\big(2(u_\ell)_n - (u_\ell)_{n-1} - (u_\ell)_{n+1}\big) \tag{3}$$

$$= 2k(1 - \cos q_\ell)(u_\ell)_n. \tag{4}$$

$n = 1, N$ でも、境界値 $(u_\ell)_0 = (u_\ell)_{N+1} = 0$ が $\sin 0 = 0$ および $\sin(q_\ell(N+1)) = \sin(\pi\ell) = 0$ に対応するため同じ式が成り立つ。したがって

$$K\boldsymbol{u}_\ell = \lambda_\ell \boldsymbol{u}_\ell, \qquad \lambda_\ell = 2k(1 - \cos q_\ell), \qquad q_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}. \tag{5}$$

モード ℓ を規格化するには、ℓ を固定して N 個の質点成分の二乗和を求める。$\sin^2 z = (1 - \cos 2z)/2$ を用い、問題文の和では $n = N+1$ の項が 1 であることに注意すると

$$\sum_{n=1}^{N} \sin^2(q_\ell n) = \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \cos(2q_\ell n) \tag{6}$$

$$= \frac{N}{2} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{N+1}{2}. \tag{7}$$

規格化定数を正に選ぶと

$$(u_\ell)_n = N_\ell \sin(q_\ell n), \qquad N_\ell = \sqrt{\frac{2}{N+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{N} (u_\ell)_n^2 = 1. \tag{8}$$

式 (5) の固有値は $0 < q_\ell < \pi$ で互いに異なる。K は実対称行列なので、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。N 次元空間にこのような規格化固有ベクトルが N 個あるため、完全正規直交基底をなす。

$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell(t)\boldsymbol{u}_\ell$ と展開し、固有基底上でベクトル運動方程式を成分ごとに比較すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha_\ell}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda_\ell}{m}\alpha_\ell = -\omega_\ell^2\alpha_\ell, \qquad \omega_\ell = \sqrt{\frac{2k}{m}(1-\cos q_\ell)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{q_\ell}{2}. \tag{9}$$

最後の形では $0 < q_\ell/2 < \pi/2$ なので正の正弦を用いた。分散曲線は $0 < q < \pi$ で単調増加し、二階微分が負なので上に凸である。小さい q では $\omega \simeq \sqrt{k/m}\,q$ となり、$q = \pi$ での極限値は $2\sqrt{k/m}$ である。許されるモードは、この曲線上の $q_\ell = \pi\ell/(N+1)$ に対応する N 個の点である。

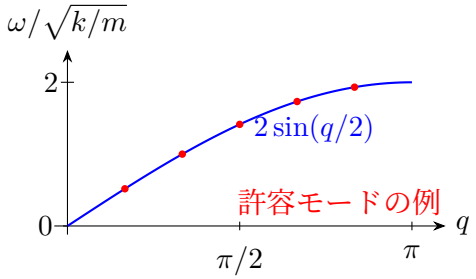


図 1: 固定端鎖の分散関係。赤点は $N = 5$ の許容波数を示す例である。

[2] 外力に対する静的応答

釣り合いでは慣性項が消え、$K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ となる。固有ベクトルで両辺を展開すると

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_\ell\alpha_\ell\boldsymbol{u}_\ell = \sum_{\ell=1}^{N} \beta_\ell\boldsymbol{u}_\ell, \qquad \lambda_\ell\alpha_\ell = \beta_\ell. \tag{10}$$

従って $\alpha_\ell = \beta_\ell/\lambda_\ell$ であり、各モードの変位は外力係数に比例する。その比例係数 $1/\lambda_\ell$ は外力の大きさによらない。各モードの外力係数が $\beta_\ell \neq 0$ のとき、設問の応答比はこの比例係数に等しく

$$\frac{\alpha_\ell}{\beta_\ell} = \frac{1}{\lambda_\ell} = \frac{1}{m\omega_\ell^2}. \tag{11}$$

外力係数がゼロのモードでは変位係数もゼロとなるが、比例係数 $1/\lambda_\ell$ は同じである。以下では、この外力に依存しない比例係数をモード間で比較する。q_ℓ は ℓ とともに増加し、$1-\cos q_\ell$ も狭義単調増加する。よって λ_ℓ が最小となるのは $\ell = 1$ だけであり、応答比の最大値は

$$\max_{1\le\ell\le N}\frac{1}{\lambda_\ell} = \frac{1}{4k\sin^2\!\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)} \tag{12}$$

$$\simeq \frac{(N+1)^2}{\pi^2 k} \qquad (N \gg 1), \tag{13}$$

である。近似では $\sin z \simeq z$ を用いた。

[3] 各質点に加えた調和ポテンシャル

追加ポテンシャル $\frac{1}{2}k_0x_n^2$ は質点 n に復元力 $-k_0x_n$ を加える。したがって運動方程式の剛性行列は

$$K_0 = K + k_0 I. \tag{14}$$

単位行列は全てのベクトルを同じ向きのまま保つため、固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_\ell$ のままで、固有値だけが k_0 増える。

$$\lambda_{\ell,0} = 2k(1-\cos q_\ell) + k_0 = 4k\sin^2\frac{q_\ell}{2} + k_0, \qquad \omega_\ell = \sqrt{\frac{4k\sin^2(q_\ell/2)+k_0}{m}}. \tag{15}$$

この式は k_0 と k が同じ単位（力/長さ）であることとも整合する。有限の N では最小値は $\ell = 1$ であり、$q_1 = \pi/(N+1) \to 0$ より

$$\lim_{N\to\infty} \min_{1\le\ell\le N} \omega_\ell = \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \tag{16}$$

図 2は例として $k_0 = k$ とした曲線を描く。一般には縦軸を $\sqrt{k/m}$ で規格化した式 $\omega/\sqrt{k/m} = \sqrt{4\sin^2(q/2)+k_0/k}$ に従い、$q = 0$ での縦軸切片は $\sqrt{k_0/k}$ となる。従って正の k_0 があると、長波長極限にも有限のギャップが残る。

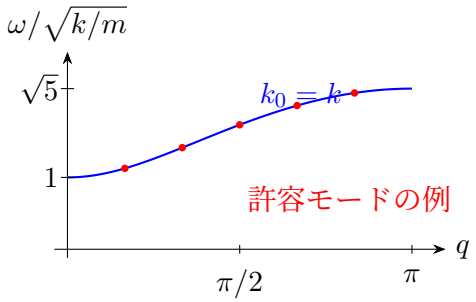


図 2: $k_0 = k$ の場合の分散関係。赤点は $N = 5$ の許容波数を示す例である。

物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

[1] 平面波とマクスウェル方程式

共通因子 $\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$ を省略すると、空間微分は $i\boldsymbol{k}$、時間微分は $-i\omega$ を掛けることに対応する。したがって

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0=\omega\boldsymbol{B}_0,\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0=-\omega\boldsymbol{D}_0. \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{D}_0=\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0$ である。第 1 式の両辺に左から $\boldsymbol{k}\times$ を作用させ、第 2 式を用いると

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0 \tag{2}$$

$$=\omega\mu_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0=-\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0. \tag{3}$$

よって

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)+\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{4}$$

[2] 行列表示

恒等式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ により、式(4)の左辺は $[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathsf{T}}-|\boldsymbol{k}|^2I+\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}]\boldsymbol{E}_0$ である。したがって

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_y^2-k_z^2 & k_xk_y & k_xk_z\\ k_xk_y & \omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_x^2-k_z^2 & k_yk_z\\ k_xk_z & k_yk_z & \omega^2\mu_0\varepsilon_2-k_x^2-k_y^2\end{pmatrix},\qquad \tilde{X}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{5}$$

[3] 2 つの波数

$\boldsymbol{k}=(0,k\sin\theta,k\cos\theta)^{\mathsf{T}}$ を代入すると、

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2 & 0 & 0\\ 0 & \omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2\cos^2\theta & k^2\sin\theta\cos\theta\\ 0 & k^2\sin\theta\cos\theta & \omega^2\mu_0\varepsilon_2-k^2\sin^2\theta\end{pmatrix}. \tag{6}$$

非零の $\boldsymbol{E}_0$ があるためには行列式がゼロである。式(6)の行列式は、1 つの成分と yz ブロックの行列式に分かれる。前者から

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2=0\quad\Longrightarrow\quad k_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}. \tag{7}$$

後者は

$$(\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2\cos^2\theta)(\omega^2\mu_0\varepsilon_2-k^2\sin^2\theta)-k^4\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{8}$$

$$=\omega^4\mu_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2-k^2\omega^2\mu_0(\varepsilon_1\sin^2\theta+\varepsilon_2\cos^2\theta)=0. \tag{9}$$

$k > 0$ より

$$k_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta}}. \tag{10}$$

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ と $0 < \theta < \pi/2$ のもとでは 2 つの波数は正で、互いに異なる。

[4] 各波数に対する電場

$k = k_1$ では第 1 成分の係数がゼロとなり、$\tilde{X}$ の核は x 方向に向く。$|\boldsymbol{E}_0| = E_0$ とする規格化解は

$$\boldsymbol{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

一方 $k = k_2$ では yz ブロックが特異となる。その第 1 行 $\tilde{X}_{yy}E_y + \tilde{X}_{yz}E_z = 0$ に式(10)を代入し、$k_2^2\sin\theta$ で割って ε_2 を掛けると $\varepsilon_1\sin\theta\,E_y + \varepsilon_2\cos\theta\,E_z = 0$ となる。したがって $E_z/E_y = -(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\tan\theta$ である。$k_1 \neq k_2$ なので $E_x = 0$ となり、核のベクトルは $(0, \varepsilon_2\cos\theta, -\varepsilon_1\sin\theta)^{\mathsf{T}}$ に比例する。従って

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta + \varepsilon_2^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2\cos\theta \\ -\varepsilon_1\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{12}$$

分母はこのベクトルのユークリッド長なので、いずれも指定された大きさをもつ。

[5] x 偏光のエネルギー流

式(1)から磁場振幅は

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0}{\omega\mu_0}. \tag{13}$$

と定まる。複素振幅に対する時間平均ポインティングベクトルは $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*)$ である。各固有偏光は線形偏光なので、実数の偏光ベクトルを代表として方向を調べればよい。一般に

$$\boldsymbol{E}_0 \times (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0) = |\boldsymbol{E}_0|^2\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}_0. \tag{14}$$

式(11)では $\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k} = 0$ であるから、$\langle\boldsymbol{S}\rangle$ は $\boldsymbol{k}$ と平行である。この偏光は $k = k_1$ に対応し、波数ベクトルも光線の進行方向も側面 A の法線方向のままなので、入射後に向きを変えない。

[6] yz 偏光のエネルギー流

式(12)を $\boldsymbol{k}$ と外積すると

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 = -\frac{kE_0(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta)}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta + \varepsilon_2^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

よって磁場は x 成分だけをもち、式(13)から $\langle\boldsymbol{S}\rangle$ の向きは

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle \;\parallel\; \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1\sin\theta \\ \varepsilon_2\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{16}$$

このベクトルが z 軸となす角を $\theta+\alpha$ とする。両成分は正なので角は第 1 象限にあり、

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\varepsilon_1\sin\theta}{\varepsilon_2\cos\theta}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\theta. \tag{17}$$

$\tan\alpha=\tan[(\theta+\alpha)-\theta]$ の公式を用いると

$$\tan\alpha=\frac{\tan(\theta+\alpha)-\tan\theta}{1+\tan(\theta+\alpha)\tan\theta} \tag{18}$$

$$=\frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2-1)\tan\theta}{1+(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\tan^2\theta} \tag{19}$$

$$=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin\theta\cos\theta}{\varepsilon_2\cos^2\theta+\varepsilon_1\sin^2\theta}>0. \tag{20}$$

したがってこの枝ではエネルギー流が波数方向から $+y$ 側へ α だけ傾く。

[7] 紙の文字に生じる二重像

側面 A の反対側から、その法線方向に紙の文字を見る場合を考える。側面 A から反対面までの法線方向の距離を d とする。紙上の同じ点を出た光のうち、x 偏光の光線は法線に沿って進む。yz 偏光のエネルギー流は結晶内で法線から $\alpha>0$ だけ傾くため、出射点は側面 A に平行な yz 面内方向へ $d\tan\alpha$ だけずれる。この向きは $+y$ 成分をもち、図 1では下向きである。

二つの出射面は平行であり、界面で波数の接線成分が保存される。結晶内の波数は法線方向だから、出射後の波数も法線方向となる。空気中では光線もこの方向に進む。出射光線を紙面までまっすぐ逆延長すると、x 偏光の光線は元の点に戻り、yz 偏光の光線はそこから図の下向きに $d\tan\alpha$ だけずれた位置に達する。従って、紙面に投影した見かけの位置が偏光によって異なり、文字の「Q」は上下にずれた二つの像として見える。

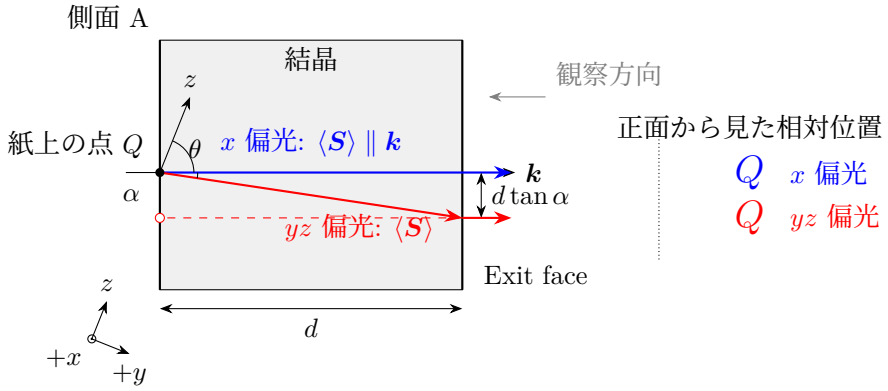


図 1: 紙上の同じ点から出た二つの光線。赤い破線は出射光線の逆延長を示し、紙面との交点は元の点より下にある。x 偏光の逆延長は元の点を通る。右の文字は正面から見た二つの像の相対位置を示し、実際の像面の位置は表していない。

物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 3 問

政岡凜太郎

[1] 単原子理想気体の分配関数

古典気体では、N 個の同種粒子の分配関数は位相空間積分を $N!(2\pi\hbar)^{3N}$ で割ったものである。運動量を $\boldsymbol{p}_j = (p_{jx}, p_{jy}, p_{jz})$ とすると、

$$Z^{(g)}(V,\beta,N) = \frac{1}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \int_{V^N} \mathrm{d}^{3N}r \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathrm{d}^{3N}p \, \exp\left[-\beta \sum_{j=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m}\right] \tag{1}$$

$$= \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\beta p^2}{2m}\right) \mathrm{d}p\right)^{3N} \tag{2}$$

$$= \frac{V^N}{N!(2\pi\hbar)^{3N}} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3N/2} \tag{3}$$

$$= \frac{V^N}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3N/2}. \tag{4}$$

ここで 1 成分ごとのガウス積分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ap^2}\mathrm{d}p = \sqrt{\pi/a}$ を用いた。

[2] 気体の大分配関数

$$z(\beta,\mu) = e^{\beta\mu} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} \tag{5}$$

とおけば、式(4)より

$$Z_G^{(g)}(V,\beta,\mu) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{[Vz(\beta,\mu)]^N}{N!} \tag{6}$$

$$= \exp\left[V e^{\beta\mu} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2}\right]. \tag{7}$$

これは指数関数の級数展開そのものである。

[3] 圧力

式(7)を問題で与えられた式に代入すると

$$P(\beta,\mu) = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V} \log Z_G^{(g)}(V,\beta,\mu) \tag{8}$$

$$= \frac{e^{\beta\mu}}{\beta} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta}\right)^{3/2} = e^{\beta\mu} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} \beta^{-5/2}. \tag{9}$$

[4] 1 サイトの大分配関数

大分配重みは $e^{-\beta(E-\mu N)}$ である。空サイトは $(E,N)=(0,0)$ なので重みは 1、吸着状態は $(E,N)=(-\epsilon,1)$ なので重みは $e^{\beta(\epsilon+\mu)}$ となる。従って

$$\xi_G^{(a)} = 1 + e^{\beta(\epsilon+\mu)}. \tag{10}$$

[5] 吸着原子密度

サイトは独立なので全体の大分配関数は $Z_G^{(a)} = (\xi_G^{(a)})^{N_a}$ である。大分配関数の化学ポテンシャル微分から平均粒子数を求めると

$$n_a = \frac{1}{N_a\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log Z_G^{(a)} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\mu}\log\Big(1+e^{\beta(\epsilon+\mu)}\Big) \tag{12}$$

$$= \frac{e^{\beta(\epsilon+\mu)}}{1+e^{\beta(\epsilon+\mu)}} = \frac{1}{1+e^{-\beta(\epsilon+\mu)}}. \tag{13}$$

この値は 1 サイトあたりの平均占有数なので、$0 < n_a < 1$ である。

[6] 圧力と温度による表示

式(9)から

$$e^{-\beta\mu} = \frac{1}{P}\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\beta^{-5/2}. \tag{14}$$

これを式(13)に代入し、$\beta = 1/(k_BT)$ とすれば

$$n_a(P,T) = \frac{1}{1+\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_BT)^{5/2}e^{-\epsilon/(k_BT)}} \tag{15}$$

$$= \frac{P}{P+P_*(T)}, \tag{16}$$

$$P_*(T) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(k_BT)^{5/2}e^{-\epsilon/(k_BT)}. \tag{17}$$

$P_*(T)$ は、密度を 1/2 にする圧力の尺度である。

[7] 圧力・温度依存性

温度一定では $P_*(T)$ は定数だから、$n_a = P/[P+P_*(T)]$ は圧力とともに単調増加する。$P\to 0$ で 0、$P\to\infty$ で 1 に近づく。

温度依存性は $P_*(T)$ の変化で決まる。その対数微分は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\log P_*(T) = \frac{5}{2T} + \frac{\epsilon}{k_BT^2} > 0, \qquad T>0. \tag{18}$$

従って一定圧力では $P_*(T)$ が厳密に増加し、n_a は厳密に減少する。$T\to 0^+$ では $P_*(T)\to 0$ なので $n_a\to 1$、$T\to\infty$ では $P_*(T)\to\infty$ なので $n_a\to 0$ である。図では $T_* = \epsilon/k_B$ および $P_{\mathrm{ref}} = P_*(T_*)$ を基準に取る。式(17)より $P_{\mathrm{ref}} = (m/(2\pi\hbar^2))^{3/2}\epsilon^{5/2}e^{-1}$ である。左図は $T=T_*$、右図は $P=P_{\mathrm{ref}}$ の例である。

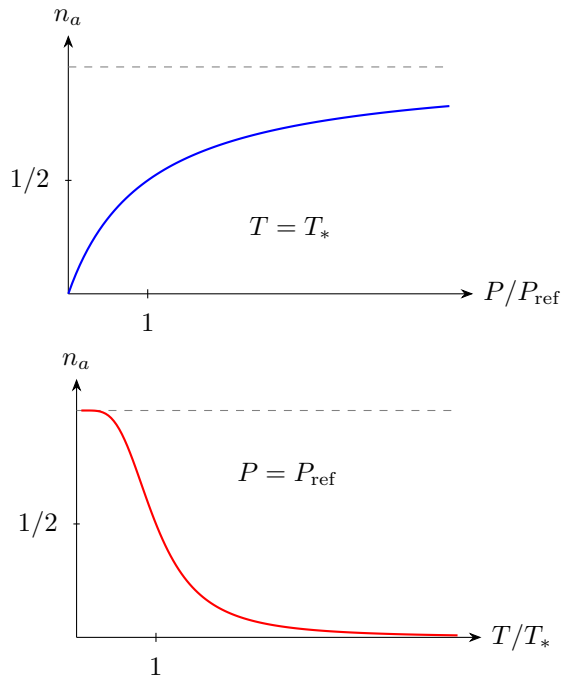


図 1: 吸着密度の圧力・温度依存性。左では $T = T_*$、右では $P = P_{\mathrm{ref}}$ を固定した。

物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1] ハミルトニアン

各方向の運動は一次元調和振動子である。定義された昇降演算子について

$$\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=\hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\frac{1}{2}\right),\qquad \frac{\hat{p}_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2=\hbar\omega\left(\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y+\frac{1}{2}\right).$$

従って全ハミルトニアンは

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y+1\right). \tag{1}$$

[2] エネルギーと縮退度

直積状態 $|n_x,n_y\rangle$ では各数演算子の固有値が n_x,n_y なので、

$$E_{n_x,n_y}=\hbar\omega(n_x+n_y+1),\qquad n_x,n_y=0,1,2,\ldots. \tag{2}$$

低い方から N 番目の準位は $n_x+n_y=N-1$ に対応する。非負整数解は $(n_x,n_y)=(0,N-1),(1,N-2),\ldots,(N-1,0)$ の N 通りであり、

$$E_N=N\hbar\omega,\qquad g_N=N\quad(N=1,2,3,\ldots). \tag{3}$$

[3] 角運動量と保存

昇降演算子の定義を足し引きすると

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_x+\hat{a}_x^\dagger),\qquad \hat{p}_x=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}_x^\dagger-\hat{a}_x),$$

であり、y 成分も同様である。直交する方向の演算子は互いに可換なので、

$$\hat{l}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x \tag{4}$$

$$=i\hbar(\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y). \tag{5}$$

$[\hat{a}_j,\hat{a}_j^\dagger]=1$ と異なる方向間の可換性から

$$[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x,\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x]=-\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x,\qquad [\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x]=\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x, \tag{6}$$

$$[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y]=\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y,\qquad [\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y,\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y]=-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y. \tag{7}$$

それぞれの和はゼロとなるため、式(1)より

$$[\hat{H},\hat{l}_z]=0. \tag{8}$$

従って $\hat{l}_z$ は時間に依らない保存量である。

[4] 交換関係による固有値の移動

仮定された交換関係を $|l_z\rangle$ に作用させると

$$\hat{l}_z\hat{A}|l_z\rangle = ([\hat{l}_z,\hat{A}]+\hat{A}\hat{l}_z)|l_z\rangle \tag{9}$$
$$= (\alpha+l_z)\hat{A}|l_z\rangle. \tag{10}$$

したがって $\hat{A}|l_z\rangle \neq 0$ ならば、これは固有値 $l_z+\alpha$ をもつ $\hat{l}_z$ の固有状態である。

[5] 角運動量を一単位ずつ上げ下げする演算子

式(5)から

$$[\hat{l}_z,\hat{a}_x^\dagger] = i\hbar\hat{a}_y^\dagger, \qquad [\hat{l}_z,\hat{a}_y^\dagger] = -i\hbar\hat{a}_x^\dagger. \tag{11}$$

よって $\hat{b}^\dagger = C\hat{a}_x^\dagger + D\hat{a}_y^\dagger$ が $[\hat{l}_z,\hat{b}^\dagger] = \alpha\hat{b}^\dagger$ を満たす条件は

$$-i\hbar D = \alpha C, \qquad i\hbar C = \alpha D. \tag{12}$$

非自明解では $\alpha^2=\hbar^2$ である。$\alpha=+\hbar$ なら $D=iC$、$\alpha=-\hbar$ なら $D=-iC$ となる。$C\geq 0$ と $|C|^2+|D|^2=1$ を用いると、二組は

$$\hat{b}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger), \qquad \hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y), \qquad \alpha_1=+\hbar, \tag{13}$$
$$\hat{b}_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger), \qquad \hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y), \qquad \alpha_2=-\hbar. \tag{14}$$

[6] 円偏光型演算子の交換関係

異なる Cartesian 方向間の交換子はゼロであるから、上の定義を展開して

$$[\hat{b}_1,\hat{b}_1^\dagger] = \tfrac{1}{2}\big([\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger] + (-i)i[\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger]\big) = 1, \tag{15}$$
$$[\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger] = \tfrac{1}{2}\big([\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger] + (-i)(-i)[\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger]\big) = 0. \tag{16}$$

同様にもう一つの対角交換子は 1 で、混合交換子の共役も 0 である。従って

$$[\hat{b}_1,\hat{b}_1^\dagger]=1, \quad [\hat{b}_2,\hat{b}_2^\dagger]=1, \quad [\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger]=0, \quad [\hat{b}_2,\hat{b}_1^\dagger]=0. \tag{17}$$

従って $\hat{b}_1,\hat{b}_2$ は互いに独立な二つのボース昇降演算子である。

[7] 円偏光型演算子での表示

逆変換は

$$\hat{a}_x = \frac{\hat{b}_1+\hat{b}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{a}_y = \frac{i(\hat{b}_1-\hat{b}_2)}{\sqrt{2}}$$

である。これを式(1), (5)に代入すると、整理前の積は

$$\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y = \frac{1}{2}\Big[(\hat{b}_1^\dagger+\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1+\hat{b}_2) + (\hat{b}_1^\dagger-\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\Big], \tag{18}$$
$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{2}\Big[(\hat{b}_1^\dagger-\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1+\hat{b}_2) + (\hat{b}_1^\dagger+\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\Big]. \tag{19}$$

いずれも括弧を展開すると、$\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2$ と $\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1$ の交差項がそれぞれ相殺する。従って

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + 1), \tag{20}$$

$$\hat{l}_z = \hbar(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2). \tag{21}$$

元の直積真空 $|0,0\rangle$ は $\hat{a}_x, \hat{a}_y$ に消されるので、上の定義から $\hat{b}_1|0,0\rangle = \hat{b}_2|0,0\rangle = 0$ である。交換関係を用いて $(\hat{b}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{b}_2^\dagger)^{n_2}|0,0\rangle$ を作ると、$\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$ の固有値はそれぞれ $n_j = 0, 1, 2, \ldots$ となる。同じ状態に式(21)の二つの演算子を作用させれば、エネルギーと角運動量が同時に対角化される。

[8] 第 N 準位の角運動量

式(21)から第 N 準位では $n_1 + n_2 = N - 1$ であり、$l_z = \hbar(n_1 - n_2)$ となる。$n_1 = 0, 1, \ldots, N-1$ を順に選ぶと

$$l_z = \hbar\big(-(N-1), -(N-3), \ldots, N-3, N-1\big), \tag{22}$$

すなわち同じ集合を大きい順に書けば

$$\boxed{l_z = \hbar(N-1),\ \hbar(N-3),\ \ldots,\ -\hbar(N-1)}. \tag{23}$$

値は N 個で、隣り合う値の差は $2\hbar$ である。例えば基底準位 $N = 1$ では $l_z = 0$ だけとなり、エネルギーと縮退度の結果にも一致する。

[9] スピン軌道相互作用

$\sigma_z = s = \pm 1$ は $\hat{l}_z$ と可換であるため、状態 $|n_1, n_2; s\rangle$ は全ハミルトニアンの固有状態である。固有エネルギーは

$$\boxed{E_{n_1,n_2,s} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) + \lambda\hbar s(n_1 - n_2)}, \qquad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = \pm 1. \tag{24}$$

この表示は各量子数に対する準位を与える。λ の値や符号によって準位の順序や縮退の一部が変わりうるため、ここでは特定の順序は仮定しない。