物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 4 問

政岡凜太郎

[1] ハミルトニアン

各方向の運動は一次元調和振動子である。定義された昇降演算子について

$$\frac{\hat{p}_x^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2=\hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\frac{1}{2}\right),\qquad \frac{\hat{p}_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2\hat{y}^2=\hbar\omega\left(\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y+\frac{1}{2}\right).$$

従って全ハミルトニアンは

$$\hat{H}=\hbar\omega\left(\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x+\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y+1\right). \tag{1}$$

[2] エネルギーと縮退度

直積状態 $|n_x,n_y\rangle$ では各数演算子の固有値が n_x,n_y なので、

$$E_{n_x,n_y}=\hbar\omega(n_x+n_y+1),\qquad n_x,n_y=0,1,2,\ldots. \tag{2}$$

低い方から N 番目の準位は $n_x+n_y=N-1$ に対応する。非負整数解は $(n_x,n_y)=(0,N-1),(1,N-2),\ldots,(N-1,0)$ の N 通りであり、

$$E_N=N\hbar\omega,\qquad g_N=N\quad(N=1,2,3,\ldots). \tag{3}$$

[3] 角運動量と保存

昇降演算子の定義を足し引きすると

$$\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a}_x+\hat{a}_x^\dagger),\qquad \hat{p}_x=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a}_x^\dagger-\hat{a}_x),$$

であり、y 成分も同様である。直交する方向の演算子は互いに可換なので、

$$\hat{l}_z=\hat{x}\hat{p}_y-\hat{y}\hat{p}_x \tag{4}$$

$$=i\hbar(\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y). \tag{5}$$

$[\hat{a}_j,\hat{a}_j^\dagger]=1$ と異なる方向間の可換性から

$$[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x,\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x]=-\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x,\qquad [\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x]=\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_x, \tag{6}$$

$$[\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y]=\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y,\qquad [\hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y,\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y]=-\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_y. \tag{7}$$

それぞれの和はゼロとなるため、式(1)より

$$[\hat{H},\hat{l}_z]=0. \tag{8}$$

従って $\hat{l}_z$ は時間に依らない保存量である。

[4] 交換関係による固有値の移動

仮定された交換関係を $|l_z\rangle$ に作用させると

$$\hat{l}_z\hat{A}|l_z\rangle = ([\hat{l}_z,\hat{A}]+\hat{A}\hat{l}_z)|l_z\rangle \tag{9}$$
$$= (\alpha+l_z)\hat{A}|l_z\rangle. \tag{10}$$

したがって $\hat{A}|l_z\rangle \neq 0$ ならば、これは固有値 $l_z+\alpha$ をもつ $\hat{l}_z$ の固有状態である。

[5] 角運動量を一単位ずつ上げ下げする演算子

式(5)から

$$[\hat{l}_z,\hat{a}_x^\dagger] = i\hbar\hat{a}_y^\dagger, \qquad [\hat{l}_z,\hat{a}_y^\dagger] = -i\hbar\hat{a}_x^\dagger. \tag{11}$$

よって $\hat{b}^\dagger = C\hat{a}_x^\dagger + D\hat{a}_y^\dagger$ が $[\hat{l}_z,\hat{b}^\dagger] = \alpha\hat{b}^\dagger$ を満たす条件は

$$-i\hbar D = \alpha C, \qquad i\hbar C = \alpha D. \tag{12}$$

非自明解では $\alpha^2=\hbar^2$ である。$\alpha=+\hbar$ なら $D=iC$、$\alpha=-\hbar$ なら $D=-iC$ となる。$C\geq 0$ と $|C|^2+|D|^2=1$ を用いると、二組は

$$\hat{b}_1^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger), \qquad \hat{b}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y), \qquad \alpha_1=+\hbar, \tag{13}$$
$$\hat{b}_2^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger), \qquad \hat{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y), \qquad \alpha_2=-\hbar. \tag{14}$$

[6] 円偏光型演算子の交換関係

異なる Cartesian 方向間の交換子はゼロであるから、上の定義を展開して

$$[\hat{b}_1,\hat{b}_1^\dagger] = \tfrac{1}{2}\big([\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger] + (-i)i[\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger]\big) = 1, \tag{15}$$
$$[\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger] = \tfrac{1}{2}\big([\hat{a}_x,\hat{a}_x^\dagger] + (-i)(-i)[\hat{a}_y,\hat{a}_y^\dagger]\big) = 0. \tag{16}$$

同様にもう一つの対角交換子は 1 で、混合交換子の共役も 0 である。従って

$$[\hat{b}_1,\hat{b}_1^\dagger]=1, \quad [\hat{b}_2,\hat{b}_2^\dagger]=1, \quad [\hat{b}_1,\hat{b}_2^\dagger]=0, \quad [\hat{b}_2,\hat{b}_1^\dagger]=0. \tag{17}$$

従って $\hat{b}_1,\hat{b}_2$ は互いに独立な二つのボース昇降演算子である。

[7] 円偏光型演算子での表示

逆変換は

$$\hat{a}_x = \frac{\hat{b}_1+\hat{b}_2}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{a}_y = \frac{i(\hat{b}_1-\hat{b}_2)}{\sqrt{2}}$$

である。これを式(1), (5)に代入すると、整理前の積は

$$\hat{a}_x^\dagger\hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger\hat{a}_y = \frac{1}{2}\Big[(\hat{b}_1^\dagger+\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1+\hat{b}_2) + (\hat{b}_1^\dagger-\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\Big], \tag{18}$$
$$\hat{l}_z = \frac{\hbar}{2}\Big[(\hat{b}_1^\dagger-\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1+\hat{b}_2) + (\hat{b}_1^\dagger+\hat{b}_2^\dagger)(\hat{b}_1-\hat{b}_2)\Big]. \tag{19}$$

いずれも括弧を展開すると、$\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2$ と $\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_1$ の交差項がそれぞれ相殺する。従って

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + 1), \tag{20}$$

$$\hat{l}_z = \hbar(\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2). \tag{21}$$

元の直積真空 $|0,0\rangle$ は $\hat{a}_x, \hat{a}_y$ に消されるので、上の定義から $\hat{b}_1|0,0\rangle = \hat{b}_2|0,0\rangle = 0$ である。交換関係を用いて $(\hat{b}_1^\dagger)^{n_1}(\hat{b}_2^\dagger)^{n_2}|0,0\rangle$ を作ると、$\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j$ の固有値はそれぞれ $n_j = 0, 1, 2, \ldots$ となる。同じ状態に式(21)の二つの演算子を作用させれば、エネルギーと角運動量が同時に対角化される。

[8] 第 N 準位の角運動量

式(21)から第 N 準位では $n_1 + n_2 = N - 1$ であり、$l_z = \hbar(n_1 - n_2)$ となる。$n_1 = 0, 1, \ldots, N-1$ を順に選ぶと

$$l_z = \hbar\big(-(N-1), -(N-3), \ldots, N-3, N-1\big), \tag{22}$$

すなわち同じ集合を大きい順に書けば

$$\boxed{l_z = \hbar(N-1),\ \hbar(N-3),\ \ldots,\ -\hbar(N-1)}. \tag{23}$$

値は N 個で、隣り合う値の差は $2\hbar$ である。例えば基底準位 $N = 1$ では $l_z = 0$ だけとなり、エネルギーと縮退度の結果にも一致する。

[9] スピン軌道相互作用

$\sigma_z = s = \pm 1$ は $\hat{l}_z$ と可換であるため、状態 $|n_1, n_2; s\rangle$ は全ハミルトニアンの固有状態である。固有エネルギーは

$$\boxed{E_{n_1,n_2,s} = \hbar\omega(n_1 + n_2 + 1) + \lambda\hbar s(n_1 - n_2)}, \qquad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots, \quad s = \pm 1. \tag{24}$$

この表示は各量子数に対する準位を与える。λ の値や符号によって準位の順序や縮退の一部が変わりうるため、ここでは特定の順序は仮定しない。