# 物理工学専攻院試解答集
# 2020 年度物理学第 2 問

政岡凜太郎

## [1] 平面波とマクスウェル方程式

共通因子 $\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$ を省略すると、空間微分は $i\boldsymbol{k}$、時間微分は $-i\omega$ を掛けることに対応する。したがって

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0=\omega\boldsymbol{B}_0,\qquad \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0=-\omega\boldsymbol{D}_0. \tag{1}$$

ここで $\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{D}_0=\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0$ である。第 1 式の両辺に左から $\boldsymbol{k}\times$ を作用させ、第 2 式を用いると

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)=\omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0 \tag{2}$$

$$=\omega\mu_0\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{H}_0=-\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0. \tag{3}$$

よって

$$\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0)+\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{4}$$

## [2] 行列表示

恒等式 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ により、式(4)の左辺は $[\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^{\mathsf{T}}-|\boldsymbol{k}|^2I+\omega^2\mu_0\tilde{\varepsilon}]\boldsymbol{E}_0$ である。したがって

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_y^2-k_z^2 & k_xk_y & k_xk_z\\ k_xk_y & \omega^2\mu_0\varepsilon_1-k_x^2-k_z^2 & k_yk_z\\ k_xk_z & k_yk_z & \omega^2\mu_0\varepsilon_2-k_x^2-k_y^2\end{pmatrix},\qquad \tilde{X}\boldsymbol{E}_0=0. \tag{5}$$

## [3] 2 つの波数

$\boldsymbol{k}=(0,k\sin\theta,k\cos\theta)^{\mathsf{T}}$ を代入すると、

$$\tilde{X}=\begin{pmatrix}\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2 & 0 & 0\\ 0 & \omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2\cos^2\theta & k^2\sin\theta\cos\theta\\ 0 & k^2\sin\theta\cos\theta & \omega^2\mu_0\varepsilon_2-k^2\sin^2\theta\end{pmatrix}. \tag{6}$$

非零の $\boldsymbol{E}_0$ があるためには行列式がゼロである。式(6)の行列式は、1 つの成分と $yz$ ブロックの行列式に分かれる。前者から

$$\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2=0\quad\Longrightarrow\quad k_1=\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_1}. \tag{7}$$

後者は

$$(\omega^2\mu_0\varepsilon_1-k^2\cos^2\theta)(\omega^2\mu_0\varepsilon_2-k^2\sin^2\theta)-k^4\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{8}$$

$$=\omega^4\mu_0^2\varepsilon_1\varepsilon_2-k^2\omega^2\mu_0(\varepsilon_1\sin^2\theta+\varepsilon_2\cos^2\theta)=0. \tag{9}$$

$k > 0$ より

$$k_2 = \omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta}}. \tag{10}$$

$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ と $0 < \theta < \pi/2$ のもとでは 2 つの波数は正で、互いに異なる。

## [4] 各波数に対する電場

$k = k_1$ では第 1 成分の係数がゼロとなり、$\tilde{X}$ の核は $x$ 方向に向く。$|\boldsymbol{E}_0| = E_0$ とする規格化解は

$$\boldsymbol{E}_0 = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

一方 $k = k_2$ では $yz$ ブロックが特異となる。その第 1 行 $\tilde{X}_{yy}E_y + \tilde{X}_{yz}E_z = 0$ に式(10)を代入し、$k_2^2\sin\theta$ で割って $\varepsilon_2$ を掛けると $\varepsilon_1\sin\theta\,E_y + \varepsilon_2\cos\theta\,E_z = 0$ となる。したがって $E_z/E_y = -(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\tan\theta$ である。$k_1 \neq k_2$ なので $E_x = 0$ となり、核のベクトルは $(0, \varepsilon_2\cos\theta, -\varepsilon_1\sin\theta)^{\mathsf{T}}$ に比例する。従って

$$\boldsymbol{E}_0 = \frac{E_0}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta + \varepsilon_2^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_2\cos\theta \\ -\varepsilon_1\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{12}$$

分母はこのベクトルのユークリッド長なので、いずれも指定された大きさをもつ。

## [5] $x$ 偏光のエネルギー流

式(1)から磁場振幅は

$$\boldsymbol{H}_0 = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0}{\omega\mu_0}. \tag{13}$$

と定まる。複素振幅に対する時間平均ポインティングベクトルは $\langle\boldsymbol{S}\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}_0^*)$ である。各固有偏光は線形偏光なので、実数の偏光ベクトルを代表として方向を調べればよい。一般に

$$\boldsymbol{E}_0 \times (\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0) = |\boldsymbol{E}_0|^2\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}_0. \tag{14}$$

式(11)では $\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k} = 0$ であるから、$\langle\boldsymbol{S}\rangle$ は $\boldsymbol{k}$ と平行である。この偏光は $k = k_1$ に対応し、波数ベクトルも光線の進行方向も側面 A の法線方向のままなので、入射後に向きを変えない。

## [6] $yz$ 偏光のエネルギー流

式(12)を $\boldsymbol{k}$ と外積すると

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 = -\frac{kE_0(\varepsilon_1\sin^2\theta + \varepsilon_2\cos^2\theta)}{\sqrt{\varepsilon_1^2\sin^2\theta + \varepsilon_2^2\cos^2\theta}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

よって磁場は $x$ 成分だけをもち、式(13)から $\langle\boldsymbol{S}\rangle$ の向きは

$$\langle\boldsymbol{S}\rangle \;\parallel\; \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon_1\sin\theta \\ \varepsilon_2\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{16}$$

このベクトルが $z$ 軸となす角を $\theta+\alpha$ とする。両成分は正なので角は第 1 象限にあり、

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\varepsilon_1\sin\theta}{\varepsilon_2\cos\theta}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\tan\theta. \tag{17}$$

$\tan\alpha=\tan[(\theta+\alpha)-\theta]$ の公式を用いると

$$\tan\alpha=\frac{\tan(\theta+\alpha)-\tan\theta}{1+\tan(\theta+\alpha)\tan\theta} \tag{18}$$

$$=\frac{(\varepsilon_1/\varepsilon_2-1)\tan\theta}{1+(\varepsilon_1/\varepsilon_2)\tan^2\theta} \tag{19}$$

$$=\frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sin\theta\cos\theta}{\varepsilon_2\cos^2\theta+\varepsilon_1\sin^2\theta}>0. \tag{20}$$

したがってこの枝ではエネルギー流が波数方向から $+y$ 側へ $\alpha$ だけ傾く。

## [7] 紙の文字に生じる二重像

側面 A の反対側から、その法線方向に紙の文字を見る場合を考える。側面 A から反対面までの法線方向の距離を $d$ とする。紙上の同じ点を出た光のうち、$x$ 偏光の光線は法線に沿って進む。$yz$ 偏光のエネルギー流は結晶内で法線から $\alpha>0$ だけ傾くため、出射点は側面 A に平行な $yz$ 面内方向へ $d\tan\alpha$ だけずれる。この向きは $+y$ 成分をもち、図 1では下向きである。

二つの出射面は平行であり、界面で波数の接線成分が保存される。結晶内の波数は法線方向だから、出射後の波数も法線方向となる。空気中では光線もこの方向に進む。出射光線を紙面までまっすぐ逆延長すると、$x$ 偏光の光線は元の点に戻り、$yz$ 偏光の光線はそこから図の下向きに $d\tan\alpha$ だけずれた位置に達する。従って、紙面に投影した見かけの位置が偏光によって異なり、文字の「Q」は上下にずれた二つの像として見える。

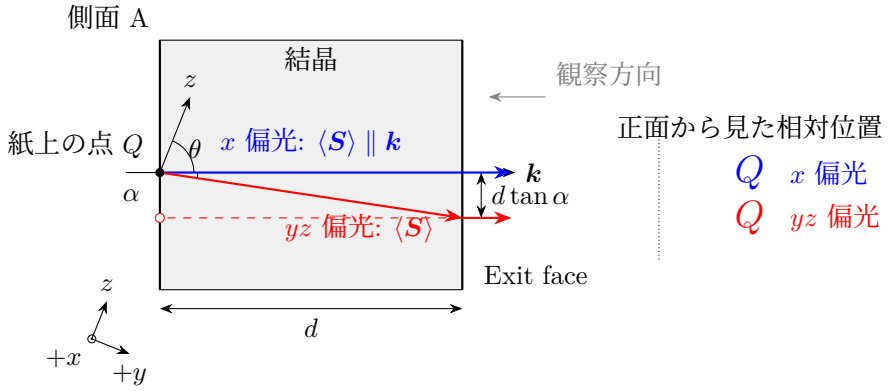



図 1: 紙上の同じ点から出た二つの光線。赤い破線は出射光線の逆延長を示し、紙面との交点は元の点より下にある。$x$ 偏光の逆延長は元の点を通る。右の文字は正面から見た二つの像の相対位置を示し、実際の像面の位置は表していない。