物理工学専攻院試解答集
2020 年度物理学第 1 問

政岡凜太郎

[1] 固定端をもつ質点ばね系の固有振動

質点 n の変位を $x_n(t)$ とし、固定端の条件を便宜上 $x_0(t) = x_{N+1}(t) = 0$ と書く。質点 n に左右のばねが及ぼす力は $-k(x_n - x_{n-1})$ と $-k(x_n - x_{n+1})$ なので、

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x_n}{\mathrm{d}t^2} = -k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}), \qquad n = 1, \dots, N. \tag{1}$$

従って、$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_N)^{\mathsf{T}}$ に対する行列は

$$K = k\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2} = -K\boldsymbol{x}. \tag{2}$$

提案された固有モードの内点成分について、恒等式 $\sin(q(n-1)) + \sin(q(n+1)) = 2\sin(qn)\cos q$ より

$$(K\boldsymbol{u}_\ell)_n = k\big(2(u_\ell)_n - (u_\ell)_{n-1} - (u_\ell)_{n+1}\big) \tag{3}$$

$$= 2k(1 - \cos q_\ell)(u_\ell)_n. \tag{4}$$

$n = 1, N$ でも、境界値 $(u_\ell)_0 = (u_\ell)_{N+1} = 0$ が $\sin 0 = 0$ および $\sin(q_\ell(N+1)) = \sin(\pi\ell) = 0$ に対応するため同じ式が成り立つ。したがって

$$K\boldsymbol{u}_\ell = \lambda_\ell \boldsymbol{u}_\ell, \qquad \lambda_\ell = 2k(1 - \cos q_\ell), \qquad q_\ell = \frac{\pi\ell}{N+1}. \tag{5}$$

モード ℓ を規格化するには、ℓ を固定して N 個の質点成分の二乗和を求める。$\sin^2 z = (1 - \cos 2z)/2$ を用い、問題文の和では $n = N+1$ の項が 1 であることに注意すると

$$\sum_{n=1}^{N} \sin^2(q_\ell n) = \frac{N}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \cos(2q_\ell n) \tag{6}$$

$$= \frac{N}{2} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{N+1}{2}. \tag{7}$$

規格化定数を正に選ぶと

$$(u_\ell)_n = N_\ell \sin(q_\ell n), \qquad N_\ell = \sqrt{\frac{2}{N+1}}, \qquad \sum_{n=1}^{N} (u_\ell)_n^2 = 1. \tag{8}$$

式 (5) の固有値は $0 < q_\ell < \pi$ で互いに異なる。K は実対称行列なので、異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する。N 次元空間にこのような規格化固有ベクトルが N 個あるため、完全正規直交基底をなす。

$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{\ell=1}^{N} \alpha_\ell(t)\boldsymbol{u}_\ell$ と展開し、固有基底上でベクトル運動方程式を成分ごとに比較すると

$$\frac{\mathrm{d}^2\alpha_\ell}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\lambda_\ell}{m}\alpha_\ell = -\omega_\ell^2\alpha_\ell, \qquad \omega_\ell = \sqrt{\frac{2k}{m}(1-\cos q_\ell)} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\frac{q_\ell}{2}. \tag{9}$$

最後の形では $0 < q_\ell/2 < \pi/2$ なので正の正弦を用いた。分散曲線は $0 < q < \pi$ で単調増加し、二階微分が負なので上に凸である。小さい q では $\omega \simeq \sqrt{k/m}\,q$ となり、$q = \pi$ での極限値は $2\sqrt{k/m}$ である。許されるモードは、この曲線上の $q_\ell = \pi\ell/(N+1)$ に対応する N 個の点である。

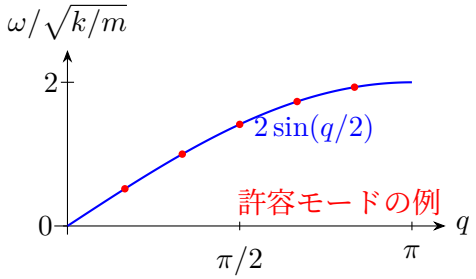


図 1: 固定端鎖の分散関係。赤点は $N = 5$ の許容波数を示す例である。

[2] 外力に対する静的応答

釣り合いでは慣性項が消え、$K\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}$ となる。固有ベクトルで両辺を展開すると

$$\sum_{\ell=1}^{N} \lambda_\ell\alpha_\ell\boldsymbol{u}_\ell = \sum_{\ell=1}^{N} \beta_\ell\boldsymbol{u}_\ell, \qquad \lambda_\ell\alpha_\ell = \beta_\ell. \tag{10}$$

従って $\alpha_\ell = \beta_\ell/\lambda_\ell$ であり、各モードの変位は外力係数に比例する。その比例係数 $1/\lambda_\ell$ は外力の大きさによらない。各モードの外力係数が $\beta_\ell \neq 0$ のとき、設問の応答比はこの比例係数に等しく

$$\frac{\alpha_\ell}{\beta_\ell} = \frac{1}{\lambda_\ell} = \frac{1}{m\omega_\ell^2}. \tag{11}$$

外力係数がゼロのモードでは変位係数もゼロとなるが、比例係数 $1/\lambda_\ell$ は同じである。以下では、この外力に依存しない比例係数をモード間で比較する。q_ℓ は ℓ とともに増加し、$1-\cos q_\ell$ も狭義単調増加する。よって λ_ℓ が最小となるのは $\ell = 1$ だけであり、応答比の最大値は

$$\max_{1\le\ell\le N}\frac{1}{\lambda_\ell} = \frac{1}{4k\sin^2\!\left(\dfrac{\pi}{2(N+1)}\right)} \tag{12}$$

$$\simeq \frac{(N+1)^2}{\pi^2 k} \qquad (N \gg 1), \tag{13}$$

である。近似では $\sin z \simeq z$ を用いた。

[3] 各質点に加えた調和ポテンシャル

追加ポテンシャル $\frac{1}{2}k_0x_n^2$ は質点 n に復元力 $-k_0x_n$ を加える。したがって運動方程式の剛性行列は

$$K_0 = K + k_0 I. \tag{14}$$

単位行列は全てのベクトルを同じ向きのまま保つため、固有ベクトルは $\boldsymbol{u}_\ell$ のままで、固有値だけが k_0 増える。

$$\lambda_{\ell,0} = 2k(1-\cos q_\ell) + k_0 = 4k\sin^2\frac{q_\ell}{2} + k_0, \qquad \omega_\ell = \sqrt{\frac{4k\sin^2(q_\ell/2)+k_0}{m}}. \tag{15}$$

この式は k_0 と k が同じ単位（力/長さ）であることとも整合する。有限の N では最小値は $\ell = 1$ であり、$q_1 = \pi/(N+1) \to 0$ より

$$\lim_{N\to\infty} \min_{1\le\ell\le N} \omega_\ell = \sqrt{\frac{k_0}{m}}. \tag{16}$$

図 2は例として $k_0 = k$ とした曲線を描く。一般には縦軸を $\sqrt{k/m}$ で規格化した式 $\omega/\sqrt{k/m} = \sqrt{4\sin^2(q/2)+k_0/k}$ に従い、$q = 0$ での縦軸切片は $\sqrt{k_0/k}$ となる。従って正の k_0 があると、長波長極限にも有限のギャップが残る。

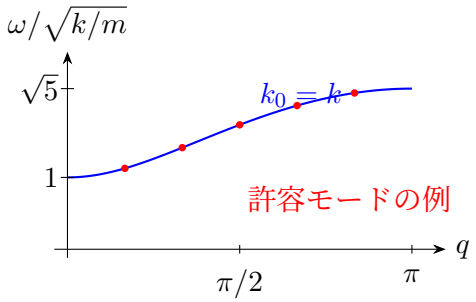


図 2: $k_0 = k$ の場合の分散関係。赤点は $N = 5$ の許容波数を示す例である。