物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 円軌道速度

半径 R の円運動に必要な向心力と万有引力を等置すると

$$\frac{mv_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2},\ \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}. \tag{1}$$

[1.2] 脱出速度

無限遠で速度がゼロとなる境界が脱出の最小速度である。重力位置エネルギーを無限遠でゼロとすると、この境界での全エネルギーはゼロなので

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} = 0,\ \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}. \tag{2}$$

[1.3] 楕円軌道の長軸

初期の全エネルギーは $E = m(v^2/2 - GM/R) < 0$ である。設問で与えられた軌道式から、最近点と最遠点の距離はそれぞれ $l/(1+\varepsilon)$、$l/(1-\varepsilon)$ である。その和が長軸の長さなので、設問 [1] の $l = h^2/(GM)$ と $1 - \varepsilon^2 = -2h^2E/(G^2M^2m)$ を代入すると

$$L = \frac{l}{1+\varepsilon} + \frac{l}{1-\varepsilon} = \frac{2l}{1-\varepsilon^2} = -\frac{GMm}{E}. \tag{3}$$

従って

$$\boxed{L = \frac{GMm}{-E} = \frac{GM}{GM/R - v^2/2}}. \tag{4}$$

$v = v_1$ では $L = 2R$、脱出境界 $v \to v_2^-$ では $L \to \infty$ となり、円軌道・放物線軌道の極限とも整合する。

[2.1] 系の公転角速度

ロッドの全質量は $2m$ である。l/R_0 の零次では二質点への重力の合力を重心に置いた質量 $2m$ への重力で近似でき、これが円運動の向心力を与える。

$$2mR_0\omega_0^2 = \frac{GM(2m)}{R_0^2},\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}}}. \tag{5}$$

[2.2] 慣性モーメント

重心から各質点までの距離は $l/2$ であるため、z 軸まわりでは

$$\boxed{I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}}. \tag{6}$$

[2.3] 重力トルク

x を半径方向、y を公転方向とし、ロッド方向を $\boldsymbol{e}_l = (\cos\phi, \sin\phi)$ とする。質点の位置は $\boldsymbol{R}_\pm = \boldsymbol{R}_0 \pm (l/2)\boldsymbol{e}_l$ で、重力は $\boldsymbol{F}_\pm = -GMm\boldsymbol{R}_\pm/|\boldsymbol{R}_\pm|^3$ である。重心まわりのトルクは

$$N_z = \left[\frac{l}{2}\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{F}_+ - \frac{l}{2}\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{F}_-\right]_z \tag{7}$$

$$= \frac{GMmR_0 l}{2}\sin\phi\left[(R_0^2 + R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2} - (R_0^2 - R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2}\right]. \tag{8}$$

$(1+z)^{-3/2} = 1 - 3z/2 + O(z^2)$ を使い、各項を l/R_0 の一次まで展開すると

$$(R_0^2 \pm R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 \mp \frac{3l\cos\phi}{2R_0} + O\left(\frac{l^2}{R_0^2}\right)\right]. \tag{9}$$

二項の差は l を $-l$ に変えると符号が反転するため、偶数次の項は相殺する。従って角括弧は $-3l\cos\phi/R_0^4 + O(l^3/R_0^6)$ となり、

$$\boxed{N_z = -\frac{3}{2}\frac{GMml^2}{R_0^3}\sin\phi\cos\phi = -\frac{3}{4}ml^2\omega_0^2\sin 2\phi + O\left(\frac{GMml^4}{R_0^5}\right)}. \tag{10}$$

正の ϕ を半径方向から公転方向へ測るため、$\phi > 0$ の小さな傾きには負の復元トルクが働く。

[2.4] 平衡角と安定性

$N_z = 0$ より

$$\boxed{\phi_0 = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}}. \tag{11}$$

慣性系でのロッドの絶対角を $\psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$ とすると、公転角速度 ω_0 は一定なので $\ddot{\psi} = \ddot{\phi}$ である。従って $I\ddot{\phi} = N_z$ を用い、$\phi = \phi_0 + \delta\phi$ とすると、一次の運動方程式は

$$I\,\delta\ddot{\phi} = N_z'(\phi_0)\delta\phi,\ \delta\ddot{\phi} = -3\omega_0^2\cos(2\phi_0)\delta\phi. \tag{12}$$

$\phi_0 = 0, \pi$ では復元力が働き、安定な小振動の角振動数は

$$\boxed{\Omega = \sqrt{3}\,\omega_0}. \tag{13}$$

$\phi_0 = \pi/2, 3\pi/2$ では係数が正となるため、摂動は指数的に増大し不安定である。重力勾配はロッドを半径方向へ揃える。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 誘導電場

半径 r の円筒経路を上から見て反時計回りを正に取る。Faraday の法則から

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B(t)), \qquad 2\pi r E_\theta = -\pi r^2 \dot{B}(t). \tag{1}$$

$B(t) = \mu_0 H_0 \sin(2\pi f t)$ より

$$\boxed{E_\theta(r,t) = -\frac{r}{2}\dot{B}(t) = -\pi f \mu_0 H_0 r \cos(2\pi f t)}. \tag{2}$$

[1.2] 誘導加熱電力

電流密度は $J = E_\theta/\rho$ なので、単位体積あたりの Joule 発熱率は E_θ^2/ρ である。体積要素 $2\pi r L\,dr$ にわたって積分すると

$$P(t) = \int_0^R \frac{E_\theta(r,t)^2}{\rho} 2\pi r L\,dr \tag{3}$$

$$= \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{2\rho}\cos^2(2\pi f t). \tag{4}$$

[1.3] 一秒間の温度上昇

1 秒は $f = 10\,\mathrm{Hz}$ の整数周期なので、$\cos^2$ の時間平均は $1/2$ である。従って

$$\Delta T = \frac{\langle P\rangle (1\,\mathrm{s})}{C} = \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{4\rho C}(1\,\mathrm{s}). \tag{5}$$

与えられた値を代入すると $\langle P\rangle \simeq 1.96\times 10^{-3}\,\mathrm{W}$、$\Delta T \simeq 3.92\times 10^{-3}\,\mathrm{K}$ である。一桁の有効数字では

$$\boxed{\Delta T \simeq 4\times 10^{-3}\,\mathrm{K}}. \tag{6}$$

[2.1] 一つの円環電流の軸上磁場

半径 a のループの各電流要素について Biot–Savart 則を用いると、対称性により横成分は相殺し、軸成分だけが残る。距離 $\sqrt{a^2+x^2}$、軸への射影因子 $a/\sqrt{a^2+x^2}$ を使えば

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}}. \tag{7}$$

ここでは電流方向を右ねじの法則で $+x$ 向きに磁場を作る向きとした。逆向き電流なら符号が反転する。

[2.2] 逆向き電流の二つのループ

左のループを $x=-b$ で $+x$ 向きの磁場を作るように取り、右のループ $x=b$ の電流は反対向きとする。軸上の符号付き成分は

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}}-\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right]. \tag{8}$$

原点で $B_x(0)=0$ であり、奇関数なので偶数次の項は消える。微分すると

$$B_x'(0)=-\frac{3\mu_0 I a^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}, \qquad \boxed{B_x(x)=-\frac{3\mu_0 I a^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}x+O(x^3)}. \tag{9}$$

[2.3] 同じ向きの電流と二次項の相殺

右の電流を反転すると二つの軸成分が加わる。

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right]. \tag{10}$$

$S=a^2+b^2$ とおいて

$$\frac{1}{[a^2+(b\pm x)^2]^{3/2}}=S^{-3/2}\left[1\mp\frac{3b}{S}x+\frac{3(4b^2-a^2)}{2S^2}x^2+O(x^3)\right] \tag{11}$$

と展開し、$+x$ と $-x$ の式を足すと

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{S^{3/2}}+\frac{3\mu_0 I a^2(4b^2-a^2)}{2S^{7/2}}x^2+O(x^4). \tag{12}$$

二次項が消える条件は $4b^2-a^2=0$ である。$a,b>0$ より

$$\boxed{a=2b}. \tag{13}$$

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] デルタ関数障壁での境界条件

波動関数が原点で跳ぶと、その一階微分には $\delta(x)$、二階微分にはその導関数 $\delta'(x)$ に比例する項が現れる。ポテンシャル項 $\alpha\delta(x)\psi(x)$ には $\delta'(x)$ の項がなく、運動エネルギー項のそれを相殺できない。従って波動関数は連続である。シュレーディンガー方程式を $[-\epsilon, \epsilon]$ で積分すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right] + \alpha\psi(0) = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

$\epsilon \to 0$ では右辺がゼロに近づくため、

$$\boxed{\psi(0^+) = \psi(0^-)}, \qquad \boxed{\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)}. \tag{2}$$

第 2 式はデルタ関数ポテンシャルの強さに比例する微分の跳びである。

[1.2] 透過・反射振幅

左から入射する定常波を

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx}, & x < 0, \\ te^{ikx}, & x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

とする。連続条件と微分の跳び条件より

$$1 + r = t, \qquad ikt - ik(1 - r) = 2kCt. \tag{4}$$

$C = m\alpha/(\hbar^2 k)$ を用いて解くと

$$\boxed{r = \frac{C}{i - C}}, \qquad \boxed{t = \frac{i}{i - C}}. \tag{5}$$

確率は $|r|^2 = C^2/(1 + C^2)$、$|t|^2 = 1/(1 + C^2)$ で、和は 1 となる。

[2.1] 反対称な二粒子波

入射状態を $\Psi_- = \psi_+(x_1)\psi_-(x_2) - \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)$ とする。各因子に一粒子の散乱則を適用すると

$$\Psi_- \longmapsto (t^2 - r^2)\left[\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) - \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)\right]. \tag{6}$$

同方向出射の $\psi_+(x_1)\psi_+(x_2)$ と $\psi_-(x_1)\psi_-(x_2)$ は、いずれも二つの積からの係数が $tr - rt = 0$ となって消える。従って反対向き出射だけが残る。これは α, E によらない。

[2.2] 対称な二粒子波と同方向散乱

対称入射 $\Psi_+ = \psi_+(x_1)\psi_-(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)$ の出射状態は

$$\Psi_+ \longmapsto (t^2 + r^2)\left[\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)\right] \tag{7}$$

$$+ 2tr\left[\psi_+(x_1)\psi_+(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_-(x_2)\right]. \tag{8}$$

第 1 行が反対向き、第 2 行が同方向への出射チャネルである。$C \to 0$ では $t \to 1, r \to 0$、$C \to \infty$ では $t \to 0, |r| \to 1$ なので、両極限では反対向きだけが残る。

同方向だけに散乱される条件は反対向きの係数がゼロとなること、すなわち

$$t^2 + r^2 = \frac{C^2 - 1}{(i - C)^2} = 0. \tag{9}$$

$C > 0$ より $C = 1$ であり、求める障壁の強さは

$$\boxed{\alpha_0(E) = \frac{\hbar^2 k}{m} = \hbar\sqrt{\frac{2E}{m}}}. \tag{10}$$

このとき同方向の二つの出射チャネルは係数 $2tr \neq 0$ で残る。

[3] 二重デルタ障壁の完全透過

$x < 0$、$0 < x < L$、$x > L$ における波をそれぞれ

$$e^{ikx} + r_L e^{-ikx}, \qquad Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad Te^{ik(x-L)} \tag{11}$$

と置く。完全透過では $r_L = 0$ であり、$x = 0$ の連続条件と跳び条件から

$$A = 1 - iC, \qquad B = iC. \tag{12}$$

$x = L$ で $X = Ae^{ikL}/T$、$Y = Be^{-ikL}/T$ と定義する。連続条件と微分の跳び条件は

$$X + Y = 1, \qquad i(1 - X + Y) = 2C, \tag{13}$$

なので $X = 1 + iC$、$Y = -iC$ となる。これらを割り合わせると

$$e^{2ikL} = \frac{B}{A}\frac{X}{Y} = -\frac{1 + iC}{1 - iC}. \tag{14}$$

$\theta = \tan^{-1} C$ と置けば右辺は $e^{i(\pi + 2\theta)}$ である。従って正の障壁間隔は

$$\boxed{L_n = \frac{\pi/2 + \tan^{-1} C + n\pi}{k}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

この条件では反射振幅がゼロで、実ポテンシャルの確率流保存により透過確率は 1 である。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 臨界点

状態方程式を粒子数密度 n で微分すると

$$\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T = \frac{k_B T}{(1-bn)^2} - 2an, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}\right)_T = \frac{2bk_B T}{(1-bn)^3} - 2a. \tag{2}$$

両方をゼロとし、式を割り合わせると

$$\frac{2b}{1-bn_c} = \frac{1}{n_c}, \qquad \boxed{n_c = \frac{1}{3b}}. \tag{3}$$

第 2 式から臨界温度が得られ、状態方程式へ代入すれば臨界圧力は

$$\boxed{T_c = \frac{8a}{27k_B b}}, \qquad \boxed{P_c = \frac{a}{27b^2}}. \tag{4}$$

[2] 臨界密度での等温圧縮率

固定した粒子数 N について $n = N/V$ なので、$(\partial V/\partial n)_N = -V/n$ である。圧縮率の定義に連鎖律を使うと

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_{T,N} = -\frac{1}{V}\left(-\frac{V}{n}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T^{-1} = \left[n\left(\frac{\partial P}{\partial n}\right)_T\right]^{-1}. \tag{5}$$

$n = n_c = 1/(3b)$ を代入すると

$$K_T = \frac{1}{n_c}\left(\frac{9}{4}k_B T - \frac{2a}{3b}\right)^{-1} \tag{6}$$

$$= \boxed{\frac{4}{9n_c k_B (T - T_c)}} \qquad (T > T_c), \tag{7}$$

ここで $2a/(3b) = (9/4)k_B T_c$ を用いた。$T \downarrow T_c$ で圧縮率が発散する。

[3] 理想気体の自由エネルギーと状態量

運動量積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/(2mk_B T)}\, dp = \sqrt{2\pi m k_B T} \tag{8}$$

なので

$$Z_0 = \frac{V^N}{N! h^{3N}} (2\pi m k_B T)^{3N/2}. \tag{9}$$

Stirling 近似を使って $F_0 = -k_B T \ln Z_0$ を整理すると

$$F_0 = -N k_B T \left[\ln\!\left(\frac{V}{N}\right) + 1 + \frac{3}{2} \ln\!\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) \right]. \tag{10}$$

これを各変数で微分すると

$$P_0 = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)_{T,N} = \boxed{\frac{N k_B T}{V}}, \tag{11}$$

$$S_0 = -\left(\frac{\partial F_0}{\partial T}\right)_{V,N} = \boxed{N k_B \left[\ln\!\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \ln\!\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) \right]}, \tag{12}$$

$$\mu_0 = \left(\frac{\partial F_0}{\partial N}\right)_{T,V} = \boxed{-k_B T \left[\ln\!\left(\frac{V}{N}\right) + \frac{3}{2} \ln\!\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right) \right]}, \tag{13}$$

$$U_0 = F_0 + T S_0 = \boxed{\frac{3}{2} N k_B T}. \tag{14}$$

対数は組合せをまとめると無次元であり、例えば $\mu_0 = k_B T \ln[n\lambda_T^3]$、$\lambda_T = h/\sqrt{2\pi m k_B T}$ と書ける。

[4] 高温・低密度での自由エネルギー

相互作用の積分は

$$\int_\ell^\infty r^2 \frac{u(r)}{k_B T}\, dr = -\frac{\epsilon \ell^3}{3 k_B T}. \tag{15}$$

また $4\pi\ell^3/3 = 2v$ だから、与えられた近似式の角括弧は $1 + 2\epsilon v/(k_B T V)$ となる。N が大きく、密度が低く、$\epsilon/(k_B T) \ll 1$ として引力に由来する対数を展開し、$N - 1 \simeq N$ とすれば

$$\ln A \simeq N \ln\left(1 - \frac{Nv}{V}\right) + \frac{N(N-1)}{2} \ln\left(1 + \frac{2\epsilon v}{k_B T V}\right) \tag{16}$$

$$\simeq N \ln\left(1 - \frac{Nv}{V}\right) + \frac{N^2 \epsilon v}{k_B T V}. \tag{17}$$

排除体積因子は問題文の形のまま保ち、引力補正のみを一次で近似する。従って

$$\boxed{F \simeq F_0 - N k_B T \ln\left(1 - \frac{Nv}{V}\right) - \frac{N^2 \epsilon v}{V}}. \tag{18}$$

低密度でさらに展開すれば排除体積補正の先頭は $N^2 v k_B T/V$ となる。排除体積は自由エネルギーを増やし、引力は減らす。

[5] 圧力と [6] 定数の対応

同じ近似で自由エネルギーを密度形に書くと

$$F \simeq -N k_B T \left[\ln\!\left(\frac{V - Nv}{N h^3}\right) + 1 + \frac{3}{2} \ln(2\pi m k_B T) + \frac{\epsilon v N}{k_B T V} \right]. \tag{19}$$

この形から体積微分を取ると

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{T,N} = \frac{Nk_BT}{V - Nv} - \frac{\epsilon v N^2}{V^2} = \boxed{\frac{nk_BT}{1 - vn} - \epsilon v n^2}. \tag{20}$$

よって van der Waals 方程式と比較して

$$\boxed{b = v, \qquad a = \epsilon v}. \tag{21}$$

各項の次元は圧力であり、引力項の符号は負である。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 入射波の磁場

非磁性媒質では $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{H}$ である。入射電場は y 方向、波数は $-z$ 方向で、$E_y^{(i)} = E_0^{(i)} e^{-i(k_0 z + \omega t)}$、$k_0 = \omega n_0 / c$ である。したがって

$$-\frac{\partial E_y^{(i)}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x^{(i)}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H_0^{(i)} = +\frac{n_0}{c\mu_0} E_0^{(i)}}. \tag{1}$$

ここで $-\partial_z E_y$ は $\nabla \times \boldsymbol{E}$ の x 成分である。同符号の E_y, H_x は $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ が $-z$ 方向を向くことと整合する。

[1.2–1.3] 界面条件と振幅反射係数

表面電流がないので、境界面 $z = 0$ で接線成分が連続する。時刻 $t = 0$ の各振幅を用いれば

$$E_0^{(i)} + E_0^{(r)} = E_0^{(t)}, \qquad H_0^{(i)} + H_0^{(r)} = H_0^{(t)}. \tag{2}$$

反射波は $+z$ 方向へ進むので $H_0^{(r)} = -n_0 E_0^{(r)} / (c\mu_0)$、透過波は $-z$ 方向へ進むので $H_0^{(t)} = +n_g E_0^{(t)} / (c\mu_0)$ である。従って

$$n_0 (E_0^{(i)} - E_0^{(r)}) = n_g E_0^{(t)}. \tag{3}$$

これと電場条件を解いて

$$\boxed{r_0 = \frac{E_0^{(r)}}{E_0^{(i)}} = \frac{n_0 - n_g}{n_0 + n_g}}. \tag{4}$$

[2.1] 各層の電場と磁場

位相因子 $e^{-i\omega t}$ のもとで、$E_l^{(-)}$ の波は $-z$ 方向、$E_l^{(+)}$ の波は $+z$ 方向へ進む。Maxwell 方程式から符号をそれぞれ定めると

$$\boxed{H_l^{(-)} = +\frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{(-)}, \qquad H_l^{(+)} = -\frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{(+)}}. \tag{5}$$

[2.2] 境界での漸化式

境界面 $l-1$ で電場と磁場を連続させる。層 l 側では距離 d_l だけ伝搬した位相が付くので

$$E_{l-1}^{(-)} + E_{l-1}^{(+)} = E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} + E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}, \tag{6}$$

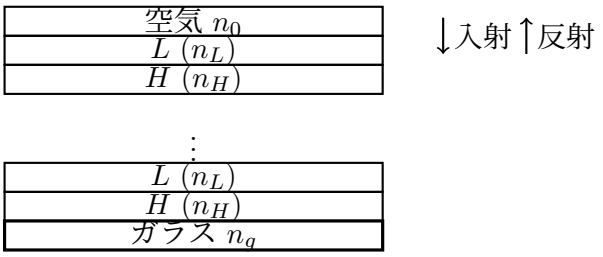
$$n_{l-1} (E_{l-1}^{(-)} - E_{l-1}^{(+)}) = n_l (E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} - E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}), \tag{7}$$

ただし $\Delta_l = n_l \omega d_l / c$ である。2 式を割り合わせれば問題文の漸化式となり

$$\boxed{\alpha_l = \frac{n_l}{n_{l-1}}}. \tag{8}$$

[2.3] 四分の一波長多層膜

空気からガラスへ向かう層の順序と終端を図示する。



図は媒質の順序を示す模式図であり、層の高さは物理的な厚さの比を表さない。

境界での場の比を $Y = c\mu_0 H_x / E_y$ とする。層 l の下端 z_l では、共通時間因子を省いて $E_y = E_l^{(-)} + E_l^{(+)}$、$c\mu_0 H_x = n_l (E_l^{(-)} - E_l^{(+)})$ なので

$$Y(z_l) = n_l \frac{E_l^{(-)} - E_l^{(+)}}{E_l^{(-)} + E_l^{(+)}}. \tag{9}$$

上端 $z_{l-1} = z_l + d_l$ では、位相厚さ $\Delta_l = \pi/2$ により二つの振幅の位相因子がそれぞれ $-i, +i$ となる。従って

$$E_y(z_{l-1}) = -i(E_l^{(-)} - E_l^{(+)}), \tag{10}$$

$$c\mu_0 H_x(z_{l-1}) = -i n_l (E_l^{(-)} + E_l^{(+)}), \tag{11}$$

$$Y(z_{l-1}) = n_l \frac{E_l^{(-)} + E_l^{(+)}}{E_l^{(-)} - E_l^{(+)}} = \frac{n_l^2}{Y(z_l)}. \tag{12}$$

ガラス内は透過波だけなので終端の比は n_g である。ガラスから空気へ遡ると一組の層は H、L の順になり、場の比は $Y \mapsto n_H^2 / Y \mapsto (n_L^2 / n_H^2) Y$ と変換される。これを N 組繰り返すと

$$Y_{\mathrm{in}} = n_g \left(\frac{n_L}{n_H} \right)^{2N}. \tag{13}$$

空気側の入射・反射振幅では $c\mu_0 H_x / E_y = n_0 (1 - r_1)/(1 + r_1)$ だから

$$\boxed{r_1 = \frac{n_0 - Y_{\mathrm{in}}}{n_0 + Y_{\mathrm{in}}} = \frac{n_0 n_H^{2N} - n_g n_L^{2N}}{n_0 n_H^{2N} + n_g n_L^{2N}}}. \tag{14}$$

設計波長で反射を消す条件は $r_1 = 0$、すなわち $Y_{\mathrm{in}} = n_0$ であり、

$$\boxed{\frac{n_L}{n_H} = \left(\frac{n_0}{n_g} \right)^{1/(2N)}}. \tag{15}$$

このとき積層の入口での場の比が空気の進行波の比に一致する。

物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 化学ポテンシャルと電荷移動

内部エネルギーを $U(S,V,N)$ とすると化学ポテンシャルは

$$dU = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN, \qquad \mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{S,V} \tag{1}$$

で定義される。孤立した M の電子化学ポテンシャルは $-W$、S では $-\phi_s$ である。接続すると電子は化学ポテンシャルの高い側から低い側へ移り、平衡では静電エネルギーを含む電気化学ポテンシャルが両側で一致する。$W > \phi_s$ なら S から M へ移って M 側が負、S 側が正になり、逆の大小関係なら電荷の向きは反転する。[1] では両方を含む電荷量の大きさを求める。

[1.2] 誘起表面電荷

面積 A の平行板容量は $C = \varepsilon_0 A/d$ である。S 側の符号付き電荷を q と置く（$q > 0$ なら電子は S から M へ移る）。静電エネルギーは

$$U_{\mathrm{es}} = \frac{q^2}{2C} = \frac{dq^2}{2\varepsilon_0 A}. \tag{2}$$

電子が移ることで化学自由エネルギーは $-(W-\phi_s)q/e$ だけ変化する。従って全エネルギー

$$U(q) = \frac{dq^2}{2\varepsilon_0 A} - \frac{W-\phi_s}{e}q \tag{3}$$

を最小にする条件 $\partial U/\partial q = 0$ から、S 側の符号付き面電荷密度は $q/A = \varepsilon_0(W-\phi_s)/(ed)$ である。求める大きさは

$$\boxed{\rho = \frac{\varepsilon_0}{ed}|W-\phi_s|}. \tag{4}$$

ここでは ρ を大きさとして用いた。原問の M 側 $-\rho$、S 側 $+\rho$ という記号を符号付き密度と読めば、$W < \phi_s$ のとき ρ の符号が反転する。

[1.3] 板間の引力

一方の板が作る電場は $\rho/(2\varepsilon_0)$ である。もう一方の板に働く圧力は ρ とこの電場の積だから

$$F = A\frac{\rho^2}{2\varepsilon_0} = \boxed{\frac{\varepsilon_0 A}{2e^2d^2}|W-\phi_s|^2}. \tag{5}$$

圧力の次元は $\mathrm{N/m^2}$ で、面積を掛けると力になる。

[1.4] 振動する間隔と電流

瞬時の平衡電荷密度は

$$\frac{q(t)}{A} = \frac{\varepsilon_0(W-\phi_s)}{e[d+\delta\sin(\Omega t)]} \simeq \frac{\varepsilon_0(W-\phi_s)}{ed}\left[1-\frac{\delta}{d}\sin(\Omega t)\right] \tag{6}$$

である。符号付き電荷の時間変化から $I(t) = dq/dt$ となり、振幅は

$$\boxed{I_0 = \frac{\varepsilon_0 A\delta\Omega}{ed^2}|W-\phi_s|}. \tag{7}$$

ここでは δ/d の一次まで残した。

[2.1] 半導体側のバンド曲がり

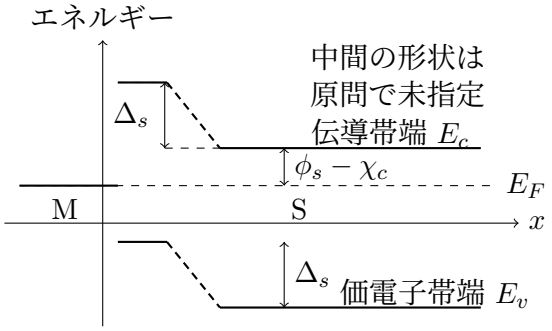
金属側の静電ポテンシャルを Φ_M、半導体の十分内部のものを Φ_S とし、同じ基準から測る。電子の静電エネルギーは $-e\Phi$ なので、平衡での電気化学ポテンシャルの一致は

$$-W - e\Phi_M = -\phi_s - e\Phi_S, \qquad e(\Phi_S - \Phi_M) = W - \phi_s. \tag{8}$$

界面固有の状態による追加のエネルギー変化を無視する原問の理想接合では、伝導帯端も静電エネルギーだけシフトする。従って界面と十分内部との伝導帯端の差は

$$\boxed{\Delta_s = -e(\Phi_M - \Phi_S) = W - \phi_s}. \tag{9}$$

これは半導体内部から界面までの伝導帯端の上昇である。E_F から界面伝導帯端までの障壁は $\Delta_s + (\phi_s - \chi_c) = W - \chi_c$。図ではこの二つの差を分けて示し、同じ静電シフトを価電子帯端にも適用した。図の縦横の長さは縮尺を表さず、異なるエネルギー差の大小比較には用いない。破線は端点を結ぶ案内で、空乏領域内の詳細な電位分布は原問で定まらない。



[2.2] 熱活性化と整流性

半導体内部のフェルミ準位は伝導帯端より $\phi_s - \chi_c > 0$ だけ低い。伝導帯内の状態のエネルギーを E、フェルミ準位を E_F とすると、非縮退近似でその状態の占有因子は $\exp[-(E-E_F)/(k_BT)]$ である。界面では伝導帯端が Δ_s だけ高くなるため、十分内部と同じ伝導帯端からのエネルギーを持つ状態同士の占有因子の比は

$$\frac{\exp[-(E+\Delta_s-E_F)/(k_BT)]}{\exp[-(E-E_F)/(k_BT)]} = \exp\left(-\frac{\Delta_s}{k_BT}\right). \tag{10}$$

従って平衡での界面近傍の伝導電子は少なく、半導体から金属への電子の供給は熱活性化によって抑えられる。

平衡をゼロとする外部からの印加電圧を $V = V_M - V_S$ とする。印加電圧が主に空乏層にかかる近似では、静電ポテンシャル差 $\Phi_M - \Phi_S$ は平衡値から V だけ変化する。電子の静電エネルギーは $-e\Phi$ なので、

$$\Delta_s(V) = \Delta_s(0) - eV. \tag{11}$$

以下では半導体内部の温度と電子密度を一定とし、障壁を越える熱放出が電流を支配する範囲を考える。障壁が残り、界面を通過する割合の電圧依存を無視できるとき、S から M への電子流は平衡時に比べて

$$\frac{\exp[-\Delta_s(V)/(k_BT)]}{\exp[-\Delta_s(0)/(k_BT)]} = \exp\left(\frac{eV}{k_BT}\right) \tag{12}$$

倍となる。一方、M のフェルミ準位と界面の伝導帯端はともに $-e\Phi_M$ だけ動くため、その間の障壁 $W - \chi_c$ は変わらず、M から S への電子流はほぼ一定である。

平衡では両向きの電子流が釣り合う。M を正にすると S から M への流れが増え、その差として正味の電子流が S から M へ生じる。M を負にすると S から M への流れが抑えられ、ほぼ一定の M から S への流れが残る。この非対称な電圧依存によって整流性が生じ、順方向の通常の電流は電子流と逆の M から S へ流れる。