物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 入射波の磁場

非磁性媒質では $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{H}$ である。入射電場は y 方向、波数は $-z$ 方向で、$E_y^{(i)} = E_0^{(i)} e^{-i(k_0 z + \omega t)}$、$k_0 = \omega n_0 / c$ である。したがって

$$-\frac{\partial E_y^{(i)}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_x^{(i)}}{\partial t} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{H_0^{(i)} = +\frac{n_0}{c\mu_0} E_0^{(i)}}. \tag{1}$$

ここで $-\partial_z E_y$ は $\nabla \times \boldsymbol{E}$ の x 成分である。同符号の E_y, H_x は $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ が $-z$ 方向を向くことと整合する。

[1.2–1.3] 界面条件と振幅反射係数

表面電流がないので、境界面 $z = 0$ で接線成分が連続する。時刻 $t = 0$ の各振幅を用いれば

$$E_0^{(i)} + E_0^{(r)} = E_0^{(t)}, \qquad H_0^{(i)} + H_0^{(r)} = H_0^{(t)}. \tag{2}$$

反射波は $+z$ 方向へ進むので $H_0^{(r)} = -n_0 E_0^{(r)} / (c\mu_0)$、透過波は $-z$ 方向へ進むので $H_0^{(t)} = +n_g E_0^{(t)} / (c\mu_0)$ である。従って

$$n_0 (E_0^{(i)} - E_0^{(r)}) = n_g E_0^{(t)}. \tag{3}$$

これと電場条件を解いて

$$\boxed{r_0 = \frac{E_0^{(r)}}{E_0^{(i)}} = \frac{n_0 - n_g}{n_0 + n_g}}. \tag{4}$$

[2.1] 各層の電場と磁場

位相因子 $e^{-i\omega t}$ のもとで、$E_l^{(-)}$ の波は $-z$ 方向、$E_l^{(+)}$ の波は $+z$ 方向へ進む。Maxwell 方程式から符号をそれぞれ定めると

$$\boxed{H_l^{(-)} = +\frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{(-)}, \qquad H_l^{(+)} = -\frac{n_l}{c\mu_0} E_l^{(+)}}. \tag{5}$$

[2.2] 境界での漸化式

境界面 $l-1$ で電場と磁場を連続させる。層 l 側では距離 d_l だけ伝搬した位相が付くので

$$E_{l-1}^{(-)} + E_{l-1}^{(+)} = E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} + E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}, \tag{6}$$

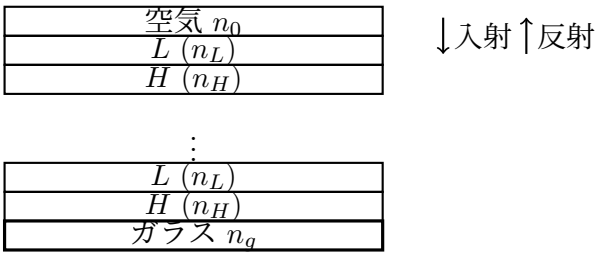
$$n_{l-1} (E_{l-1}^{(-)} - E_{l-1}^{(+)}) = n_l (E_l^{(-)} e^{-i\Delta_l} - E_l^{(+)} e^{i\Delta_l}), \tag{7}$$

ただし $\Delta_l = n_l \omega d_l / c$ である。2 式を割り合わせれば問題文の漸化式となり

$$\boxed{\alpha_l = \frac{n_l}{n_{l-1}}}. \tag{8}$$

[2.3] 四分の一波長多層膜

空気からガラスへ向かう層の順序と終端を図示する。



図は媒質の順序を示す模式図であり、層の高さは物理的な厚さの比を表さない。

境界での場の比を $Y = c\mu_0 H_x / E_y$ とする。層 l の下端 z_l では、共通時間因子を省いて $E_y = E_l^{(-)} + E_l^{(+)}$、$c\mu_0 H_x = n_l (E_l^{(-)} - E_l^{(+)})$ なので

$$Y(z_l) = n_l \frac{E_l^{(-)} - E_l^{(+)}}{E_l^{(-)} + E_l^{(+)}}. \tag{9}$$

上端 $z_{l-1} = z_l + d_l$ では、位相厚さ $\Delta_l = \pi/2$ により二つの振幅の位相因子がそれぞれ $-i, +i$ となる。従って

$$E_y(z_{l-1}) = -i(E_l^{(-)} - E_l^{(+)}), \tag{10}$$

$$c\mu_0 H_x(z_{l-1}) = -i n_l (E_l^{(-)} + E_l^{(+)}), \tag{11}$$

$$Y(z_{l-1}) = n_l \frac{E_l^{(-)} + E_l^{(+)}}{E_l^{(-)} - E_l^{(+)}} = \frac{n_l^2}{Y(z_l)}. \tag{12}$$

ガラス内は透過波だけなので終端の比は n_g である。ガラスから空気へ遡ると一組の層は H、L の順になり、場の比は $Y \mapsto n_H^2 / Y \mapsto (n_L^2 / n_H^2) Y$ と変換される。これを N 組繰り返すと

$$Y_{\mathrm{in}} = n_g \left(\frac{n_L}{n_H} \right)^{2N}. \tag{13}$$

空気側の入射・反射振幅では $c\mu_0 H_x / E_y = n_0 (1 - r_1)/(1 + r_1)$ だから

$$\boxed{r_1 = \frac{n_0 - Y_{\mathrm{in}}}{n_0 + Y_{\mathrm{in}}} = \frac{n_0 n_H^{2N} - n_g n_L^{2N}}{n_0 n_H^{2N} + n_g n_L^{2N}}}. \tag{14}$$

設計波長で反射を消す条件は $r_1 = 0$、すなわち $Y_{\mathrm{in}} = n_0$ であり、

$$\boxed{\frac{n_L}{n_H} = \left(\frac{n_0}{n_g} \right)^{1/(2N)}}. \tag{15}$$

このとき積層の入口での場の比が空気の進行波の比に一致する。