物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] デルタ関数障壁での境界条件

波動関数が原点で跳ぶと、その一階微分には $\delta(x)$、二階微分にはその導関数 $\delta'(x)$ に比例する項が現れる。ポテンシャル項 $\alpha\delta(x)\psi(x)$ には $\delta'(x)$ の項がなく、運動エネルギー項のそれを相殺できない。従って波動関数は連続である。シュレーディンガー方程式を $[-\epsilon, \epsilon]$ で積分すると

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon)\right] + \alpha\psi(0) = E\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\psi(x)\,dx. \tag{1}$$

$\epsilon \to 0$ では右辺がゼロに近づくため、

$$\boxed{\psi(0^+) = \psi(0^-)}, \qquad \boxed{\psi'(0^+) - \psi'(0^-) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2}\psi(0)}. \tag{2}$$

第 2 式はデルタ関数ポテンシャルの強さに比例する微分の跳びである。

[1.2] 透過・反射振幅

左から入射する定常波を

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx}, & x < 0, \\ te^{ikx}, & x > 0 \end{cases} \tag{3}$$

とする。連続条件と微分の跳び条件より

$$1 + r = t, \qquad ikt - ik(1 - r) = 2kCt. \tag{4}$$

$C = m\alpha/(\hbar^2 k)$ を用いて解くと

$$\boxed{r = \frac{C}{i - C}}, \qquad \boxed{t = \frac{i}{i - C}}. \tag{5}$$

確率は $|r|^2 = C^2/(1 + C^2)$、$|t|^2 = 1/(1 + C^2)$ で、和は 1 となる。

[2.1] 反対称な二粒子波

入射状態を $\Psi_- = \psi_+(x_1)\psi_-(x_2) - \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)$ とする。各因子に一粒子の散乱則を適用すると

$$\Psi_- \longmapsto (t^2 - r^2)\left[\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) - \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)\right]. \tag{6}$$

同方向出射の $\psi_+(x_1)\psi_+(x_2)$ と $\psi_-(x_1)\psi_-(x_2)$ は、いずれも二つの積からの係数が $tr - rt = 0$ となって消える。従って反対向き出射だけが残る。これは α, E によらない。

[2.2] 対称な二粒子波と同方向散乱

対称入射 $\Psi_+ = \psi_+(x_1)\psi_-(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)$ の出射状態は

$$\Psi_+ \longmapsto (t^2 + r^2)\left[\psi_+(x_1)\psi_-(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_+(x_2)\right] \tag{7}$$

$$+ 2tr\left[\psi_+(x_1)\psi_+(x_2) + \psi_-(x_1)\psi_-(x_2)\right]. \tag{8}$$

第 1 行が反対向き、第 2 行が同方向への出射チャネルである。$C \to 0$ では $t \to 1, r \to 0$、$C \to \infty$ では $t \to 0, |r| \to 1$ なので、両極限では反対向きだけが残る。

同方向だけに散乱される条件は反対向きの係数がゼロとなること、すなわち

$$t^2 + r^2 = \frac{C^2 - 1}{(i - C)^2} = 0. \tag{9}$$

$C > 0$ より $C = 1$ であり、求める障壁の強さは

$$\boxed{\alpha_0(E) = \frac{\hbar^2 k}{m} = \hbar\sqrt{\frac{2E}{m}}}. \tag{10}$$

このとき同方向の二つの出射チャネルは係数 $2tr \neq 0$ で残る。

[3] 二重デルタ障壁の完全透過

$x < 0$、$0 < x < L$、$x > L$ における波をそれぞれ

$$e^{ikx} + r_L e^{-ikx}, \qquad Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \qquad Te^{ik(x-L)} \tag{11}$$

と置く。完全透過では $r_L = 0$ であり、$x = 0$ の連続条件と跳び条件から

$$A = 1 - iC, \qquad B = iC. \tag{12}$$

$x = L$ で $X = Ae^{ikL}/T$、$Y = Be^{-ikL}/T$ と定義する。連続条件と微分の跳び条件は

$$X + Y = 1, \qquad i(1 - X + Y) = 2C, \tag{13}$$

なので $X = 1 + iC$、$Y = -iC$ となる。これらを割り合わせると

$$e^{2ikL} = \frac{B}{A}\frac{X}{Y} = -\frac{1 + iC}{1 - iC}. \tag{14}$$

$\theta = \tan^{-1} C$ と置けば右辺は $e^{i(\pi + 2\theta)}$ である。従って正の障壁間隔は

$$\boxed{L_n = \frac{\pi/2 + \tan^{-1} C + n\pi}{k}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

この条件では反射振幅がゼロで、実ポテンシャルの確率流保存により透過確率は 1 である。