物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 誘導電場

半径 r の円筒経路を上から見て反時計回りを正に取る。Faraday の法則から

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 B(t)), \qquad 2\pi r E_\theta = -\pi r^2 \dot{B}(t). \tag{1}$$

$B(t) = \mu_0 H_0 \sin(2\pi f t)$ より

$$\boxed{E_\theta(r,t) = -\frac{r}{2}\dot{B}(t) = -\pi f \mu_0 H_0 r \cos(2\pi f t)}. \tag{2}$$

[1.2] 誘導加熱電力

電流密度は $J = E_\theta/\rho$ なので、単位体積あたりの Joule 発熱率は E_θ^2/ρ である。体積要素 $2\pi r L\,dr$ にわたって積分すると

$$P(t) = \int_0^R \frac{E_\theta(r,t)^2}{\rho} 2\pi r L\,dr \tag{3}$$

$$= \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{2\rho}\cos^2(2\pi f t). \tag{4}$$

[1.3] 一秒間の温度上昇

1 秒は $f = 10\,\mathrm{Hz}$ の整数周期なので、$\cos^2$ の時間平均は $1/2$ である。従って

$$\Delta T = \frac{\langle P\rangle (1\,\mathrm{s})}{C} = \frac{\pi^3 \mu_0^2 H_0^2 f^2 L R^4}{4\rho C}(1\,\mathrm{s}). \tag{5}$$

与えられた値を代入すると $\langle P\rangle \simeq 1.96\times 10^{-3}\,\mathrm{W}$、$\Delta T \simeq 3.92\times 10^{-3}\,\mathrm{K}$ である。一桁の有効数字では

$$\boxed{\Delta T \simeq 4\times 10^{-3}\,\mathrm{K}}. \tag{6}$$

[2.1] 一つの円環電流の軸上磁場

半径 a のループの各電流要素について Biot–Savart 則を用いると、対称性により横成分は相殺し、軸成分だけが残る。距離 $\sqrt{a^2+x^2}$、軸への射影因子 $a/\sqrt{a^2+x^2}$ を使えば

$$B_x(x) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi a^2}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \boxed{\frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}}. \tag{7}$$

ここでは電流方向を右ねじの法則で $+x$ 向きに磁場を作る向きとした。逆向き電流なら符号が反転する。

[2.2] 逆向き電流の二つのループ

左のループを $x=-b$ で $+x$ 向きの磁場を作るように取り、右のループ $x=b$ の電流は反対向きとする。軸上の符号付き成分は

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}}-\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right]. \tag{8}$$

原点で $B_x(0)=0$ であり、奇関数なので偶数次の項は消える。微分すると

$$B_x'(0)=-\frac{3\mu_0 I a^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}, \qquad \boxed{B_x(x)=-\frac{3\mu_0 I a^2 b}{(a^2+b^2)^{5/2}}x+O(x^3)}. \tag{9}$$

[2.3] 同じ向きの電流と二次項の相殺

右の電流を反転すると二つの軸成分が加わる。

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{2}\left[\frac{1}{(a^2+(b+x)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(a^2+(b-x)^2)^{3/2}}\right]. \tag{10}$$

$S=a^2+b^2$ とおいて

$$\frac{1}{[a^2+(b\pm x)^2]^{3/2}}=S^{-3/2}\left[1\mp\frac{3b}{S}x+\frac{3(4b^2-a^2)}{2S^2}x^2+O(x^3)\right] \tag{11}$$

と展開し、$+x$ と $-x$ の式を足すと

$$B_x(x)=\frac{\mu_0 I a^2}{S^{3/2}}+\frac{3\mu_0 I a^2(4b^2-a^2)}{2S^{7/2}}x^2+O(x^4). \tag{12}$$

二次項が消える条件は $4b^2-a^2=0$ である。$a,b>0$ より

$$\boxed{a=2b}. \tag{13}$$