物理工学専攻院試解答集
2019 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 円軌道速度

半径 R の円運動に必要な向心力と万有引力を等置すると

$$\frac{mv_1^2}{R} = \frac{GMm}{R^2},\ \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}}. \tag{1}$$

[1.2] 脱出速度

無限遠で速度がゼロとなる境界が脱出の最小速度である。重力位置エネルギーを無限遠でゼロとすると、この境界での全エネルギーはゼロなので

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GMm}{R} = 0,\ \boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}. \tag{2}$$

[1.3] 楕円軌道の長軸

初期の全エネルギーは $E = m(v^2/2 - GM/R) < 0$ である。設問で与えられた軌道式から、最近点と最遠点の距離はそれぞれ $l/(1+\varepsilon)$、$l/(1-\varepsilon)$ である。その和が長軸の長さなので、設問 [1] の $l = h^2/(GM)$ と $1 - \varepsilon^2 = -2h^2E/(G^2M^2m)$ を代入すると

$$L = \frac{l}{1+\varepsilon} + \frac{l}{1-\varepsilon} = \frac{2l}{1-\varepsilon^2} = -\frac{GMm}{E}. \tag{3}$$

従って

$$\boxed{L = \frac{GMm}{-E} = \frac{GM}{GM/R - v^2/2}}. \tag{4}$$

$v = v_1$ では $L = 2R$、脱出境界 $v \to v_2^-$ では $L \to \infty$ となり、円軌道・放物線軌道の極限とも整合する。

[2.1] 系の公転角速度

ロッドの全質量は $2m$ である。l/R_0 の零次では二質点への重力の合力を重心に置いた質量 $2m$ への重力で近似でき、これが円運動の向心力を与える。

$$2mR_0\omega_0^2 = \frac{GM(2m)}{R_0^2},\ \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{GM}{R_0^3}}}. \tag{5}$$

[2.2] 慣性モーメント

重心から各質点までの距離は $l/2$ であるため、z 軸まわりでは

$$\boxed{I = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{2}}. \tag{6}$$

[2.3] 重力トルク

x を半径方向、y を公転方向とし、ロッド方向を $\boldsymbol{e}_l = (\cos\phi, \sin\phi)$ とする。質点の位置は $\boldsymbol{R}_\pm = \boldsymbol{R}_0 \pm (l/2)\boldsymbol{e}_l$ で、重力は $\boldsymbol{F}_\pm = -GMm\boldsymbol{R}_\pm/|\boldsymbol{R}_\pm|^3$ である。重心まわりのトルクは

$$N_z = \left[\frac{l}{2}\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{F}_+ - \frac{l}{2}\boldsymbol{e}_l \times \boldsymbol{F}_-\right]_z \tag{7}$$

$$= \frac{GMmR_0 l}{2}\sin\phi\left[(R_0^2 + R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2} - (R_0^2 - R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2}\right]. \tag{8}$$

$(1+z)^{-3/2} = 1 - 3z/2 + O(z^2)$ を使い、各項を l/R_0 の一次まで展開すると

$$(R_0^2 \pm R_0 l\cos\phi + l^2/4)^{-3/2} = \frac{1}{R_0^3}\left[1 \mp \frac{3l\cos\phi}{2R_0} + O\left(\frac{l^2}{R_0^2}\right)\right]. \tag{9}$$

二項の差は l を $-l$ に変えると符号が反転するため、偶数次の項は相殺する。従って角括弧は $-3l\cos\phi/R_0^4 + O(l^3/R_0^6)$ となり、

$$\boxed{N_z = -\frac{3}{2}\frac{GMml^2}{R_0^3}\sin\phi\cos\phi = -\frac{3}{4}ml^2\omega_0^2\sin 2\phi + O\left(\frac{GMml^4}{R_0^5}\right)}. \tag{10}$$

正の ϕ を半径方向から公転方向へ測るため、$\phi > 0$ の小さな傾きには負の復元トルクが働く。

[2.4] 平衡角と安定性

$N_z = 0$ より

$$\boxed{\phi_0 = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}}. \tag{11}$$

慣性系でのロッドの絶対角を $\psi(t) = \omega_0 t + \phi(t)$ とすると、公転角速度 ω_0 は一定なので $\ddot{\psi} = \ddot{\phi}$ である。従って $I\ddot{\phi} = N_z$ を用い、$\phi = \phi_0 + \delta\phi$ とすると、一次の運動方程式は

$$I\,\delta\ddot{\phi} = N_z'(\phi_0)\delta\phi,\ \delta\ddot{\phi} = -3\omega_0^2\cos(2\phi_0)\delta\phi. \tag{12}$$

$\phi_0 = 0, \pi$ では復元力が働き、安定な小振動の角振動数は

$$\boxed{\Omega = \sqrt{3}\,\omega_0}. \tag{13}$$

$\phi_0 = \pi/2, 3\pi/2$ では係数が正となるため、摂動は指数的に増大し不安定である。重力勾配はロッドを半径方向へ揃える。