物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 質点の速さ

頂点を位置エネルギーの基準にする。角度 θ まで降りたときの高さの減少は $R(1-\cos\theta)$ なので、力学的エネルギー保存から

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta), \qquad \boxed{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}}. \tag{1}$$

[1.2] 質点の離脱

半径方向内向きを正に取ると、接触中は $mg\cos\theta - N = mv^2/R$ である。離脱時は $N=0$ だから、$v_c^2 = gR\cos\theta_{c1}$。これとエネルギー式を合わせると

$$2(1-\cos\theta_{c1}) = \cos\theta_{c1}, \qquad \boxed{\cos\theta_{c1} = \frac{2}{3}}, \quad \boxed{v_{c1} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}}. \tag{2}$$

[2.1] 一様球の慣性モーメント

球の密度は $\rho_m = 3m/(4\pi r^3)$ である。球座標で極角を ϑ とすると

$$I = \int (s\sin\vartheta)^2 \rho_m \, s^2 \sin\vartheta \, ds \, d\vartheta \, d\phi \tag{3}$$

$$= \rho_m \left(\int_0^r s^4 ds\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta\right)(2\pi) = \boxed{\frac{2}{5}mr^2}. \tag{4}$$

[2.2] 転がり条件

球中心の軌道半径は $R+r$ である。接触点の速度がゼロだから、$v = r\omega$（角速度の大きさ）となる。

[2.3] 転がる球の離脱

重心の位置エネルギー減少は $mg(R+r)(1-\cos\theta)$ である。$I = 2mr^2/5$ および $\omega = v/r$ を使うと

$$mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2, \quad v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta). \tag{5}$$

離脱時の半径方向の式は $mg\cos\theta_{c2} = mv_{c2}^2/(R+r)$ である。二式を連立して

$$\boxed{\cos\theta_{c2} = \frac{10}{17}}, \qquad \boxed{v_{c2} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r)}}. \tag{6}$$

[2.4] 離脱角の違い

同じ角度 θ での向心加速度を、各中心軌道の半径を使って比較すると

$$\text{質点：}\quad \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta), \qquad \text{球：}\quad \frac{v^2}{R+r} = \frac{10}{7}g(1-\cos\theta). \tag{7}$$

転がる球では位置エネルギーの一部が回転エネルギーに入るため、向心加速度の係数が小さい。接触中の法線抗力は、質点では $N = m[g\cos\theta - v^2/R]$、球では $N = m[g\cos\theta - v^2/(R+r)]$ であり、球のほうが同じ角度で大きい。そのため球はより大きな角度まで接触を保つ。実際、$10/17 < 2/3$ より $\theta_{c2} > \theta_{c1}$ である。

[3.1] 撃力の作用高さ

撃力の作用時間を十分短く取り、その間の重力と接触摩擦の力積を無視する。頂点で水平方向に打つので、支持面へ向かう法線方向の衝突も生じない。この局所的な撃力モデルでは、並進の力積収支から $mv_0 = P$、重心まわりの角力積収支から $I\omega_0 = P(h-r)$ となる。接触点の水平速度がゼロとなるためには、撃力直後の重心速度 $v_0 = P/m$ と角速度 ω_0 が $v_0 = r\omega_0$ を満たす必要がある。従って

$$\omega_0 = \frac{P(h-r)}{I} = \frac{5P(h-r)}{2mr^2}. \tag{8}$$

これを転がり条件に代入すると

$$\boxed{h = \frac{7}{5}r}, \qquad v_0 = \frac{P}{m}, \quad \omega_0 = \frac{P}{mr}. \tag{9}$$

[3.2] 撃力後の離脱

撃力後は力学的エネルギーが保存される。最初の並進・回転運動エネルギーは $(7/10)P^2/m$ なので

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta) + \frac{P^2}{m^2}. \tag{10}$$

離脱条件 $v_c^2 = g(R+r)\cos\theta_{c3}$ と連立すると

$$\boxed{\cos\theta_{c3} = \frac{10}{17} + \frac{7P^2}{17m^2g(R+r)}}, \qquad \boxed{v_{c3} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r) + \frac{7P^2}{17m^2}}}. \tag{11}$$

この離脱角が実現するには、右辺が 0 以上 1 以下でなければならない。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 電場と電位

ガウスの法則より、半径 a より内側では包む電荷がなく、球殻間だけで電場がある。外側では全電荷がゼロである。電位は無限遠をゼロとして積分する。

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a), \\ Q_0/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & (a < r < b), \\ 0 & (r > b), \end{cases} \quad \phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} 1/a - 1/b & (r < a), \\ 1/r - 1/b & (a \le r \le b), \\ 0 & (r > b). \end{cases} \tag{1}$$

[1.2] 静電容量

球殻間の電位差は $\Delta\phi = Q_0(1/a - 1/b)/(4\pi\varepsilon_0)$ であるから

$$C = \frac{Q_0}{\Delta\phi} = \boxed{\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}}. \tag{2}$$

[1.3] 誘電体で満たした場合のエネルギー

誘電率 ε の媒質で満たすと $C_\varepsilon = 4\pi\varepsilon ab/(b-a)$ である。電荷を Q_0 に保つので

$$U = \frac{Q_0^2}{2C_\varepsilon} = \boxed{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}. \tag{3}$$

[1.4] 薄い誘電層による容量変化

真空層 $a < r < b - d$ と誘電層 $b - d < r < b$ は直列である。

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-d}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b-d} - \frac{1}{b}\right) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{d}{4\pi b^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) + O(d^2). \tag{5}$$

$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 ab/(b-a)$ を使って逆数を展開すると

$$\boxed{C = C_0 + \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon}\frac{a^2}{(b-a)^2}d + O(d^2)}. \tag{6}$$

[2.1] 定常電流とジュール熱

媒質内の電場は $E_r = Q_0/(4\pi\varepsilon r^2)$ なので、半径によらず電流は

$$I = 4\pi r^2 \sigma E_r = \frac{\sigma Q_0}{\varepsilon} > 0. \tag{7}$$

電位差を電流で割れば抵抗が得られる。

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}, \qquad \boxed{\dot{Q}_{\mathrm{heat}} = I^2\mathcal{R} = \frac{\sigma Q_0^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}. \tag{8}$$

[2.2] 電源を外した後

時刻 t の内側球殻の電荷を $Q(t)$ とする。[2.1] の電流式に現在の電荷を入れると $I(t) = \sigma Q(t)/\varepsilon$ となる。外向きの電流は内側球殻の電荷を減らすので、電荷保存則から $dQ/dt = -I(t) = -\sigma Q(t)/\varepsilon$ である。初期条件 $Q(0) = Q_0$ を使うと

$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/\varepsilon}. \tag{9}$$

瞬時電力は [2.1] の Q_0 を $Q(t)$ に置き換えたものなので

$$W(t) = \int_0^t \frac{\sigma Q(t')^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) dt' = \boxed{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - e^{-2\sigma t/\varepsilon}\right)}. \tag{10}$$

[2.3] 静電エネルギーとの関係

$t \to \infty$ では残留電荷がゼロとなり、発生熱は $W(\infty) = Q_0^2(1/a - 1/b)/(8\pi\varepsilon)$ となる。これは [1.3] の初期静電エネルギーに等しい。ここでは電源が外れており、媒質の熱以外にエネルギーが移らないためである。

[3] 二媒質境界の面電荷

定常状態では各領域の電流密度が $I/(4\pi r^2)$ である。従って境界の両側の電場は $E_i = I/(4\pi\sigma_i r_0^2)$。境界面法線を外向きに取ると、自由面電荷密度は法線方向の $\boldsymbol{D}$ の跳びで

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{s}} = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{I}{4\pi r_0^2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)}. \tag{11}$$

負値の場合は、境界に負の自由電荷が蓄積している。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 引力型デルタポテンシャル

$x \neq 0$ では $-\hbar^2\phi''/(2m) = E\phi$ である。負の固有値に対する減衰解を $\phi(x) = Ne^{-\xi|x|}$、$E = -\hbar^2\xi^2/(2m)$ と置く。原点を含む微小区間でシュレーディンガー方程式を積分すると

$$\phi'(0^+) - \phi'(0^-) = -\frac{2mv}{\hbar^2}\phi(0). \tag{1}$$

左辺は $-2N\xi$ だから $\xi = mv/\hbar^2$。規格化条件より $1 = N^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\xi|x|}dx = N^2/\xi$ であり

$$\boxed{N = \sqrt{\frac{mv}{\hbar^2}}}, \qquad \boxed{\xi = \frac{mv}{\hbar^2}}, \qquad \boxed{E = -\frac{mv^2}{2\hbar^2}}. \tag{2}$$

[2.1] 試行状態のエネルギー期待値

二つの局在配置を $\Phi_1 = \phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2)$、$\Phi_2 = \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_2 + R/2)$ と置く。問題文の定義は $\langle\Phi_1|H|\Phi_1\rangle = \langle\Phi_2|H|\Phi_2\rangle = A$、$\langle\Phi_2|H|\Phi_1\rangle = B$、$\langle\Phi_2|\Phi_1\rangle = S$ である。対角規格化は 1 なので

$$\boxed{E(c_1, c_2) = \frac{A(c_1^2 + c_2^2) + 2Bc_1c_2}{c_1^2 + c_2^2 + 2Sc_1c_2}}. \tag{3}$$

[2.2] 変分方程式

エネルギーの停留条件を、分母を含めて変分する。すなわち、$E(c_1, c_2)$ の候補値 E について

$$\mathcal{L} = A(c_1^2 + c_2^2) + 2Bc_1c_2 - E(c_1^2 + c_2^2 + 2Sc_1c_2) \tag{4}$$

の偏微分をゼロと置く。両式を 2 で割ると

$$\boxed{\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} 1 & S \\ S & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}. \tag{5}$$

交差項の係数は各行列要素そのものではなく、二つの対称な交差項の和となるため、行列の非対角要素は $B - ES$ である。

[2.3] 固有値と空間波動関数

両行列は交換対称なので、固有ベクトルは $(1, 1)^T$ または $(1, -1)^T$ である。各ベクトルを同じ符号の分子・分母に代入すると

$$E_+ = \frac{A + B}{1 + S}, \quad (c_1, c_2) \propto (1, 1), \qquad E_- = \frac{A - B}{1 - S}, \quad (c_1, c_2) \propto (1, -1). \tag{6}$$

従って規格化を除く空間波動関数は

$$\boxed{\Phi_{\pm}(x_1, x_2) = \phi_s(x_1 + R/2)\phi_s(x_2 - R/2) \pm \phi_s(x_1 - R/2)\phi_s(x_2 + R/2)}. \tag{7}$$

粒子交換 $x_1 \leftrightarrow x_2$ で Φ_+ は対称、Φ_- は反対称となる。

[2.4] スピンを含むフェルミ状態

二粒子フェルミ状態はスピンと軌道の積全体が反対称でなければならない。α, β をそれぞれスピン上向き・下向きの状態、ω_i を粒子 i のスピン座標とする。スピン一重項 $\chi_{00} = (\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) - \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2))/\sqrt{2}$ は反対称なので、Φ_+ と組み合わせる。三重項は対称なので、Φ_- と組み合わせる。よって全状態と近似エネルギーは

$$\boxed{\Phi_+\chi_{00}, \quad E_+}, \tag{8}$$

$$\boxed{\Phi_-\alpha(\omega_1)\alpha(\omega_2), \quad E_-}, \tag{9}$$

$$\boxed{\Phi_- \frac{\alpha(\omega_1)\beta(\omega_2) + \beta(\omega_1)\alpha(\omega_2)}{\sqrt{2}}, \quad E_-}, \tag{10}$$

$$\boxed{\Phi_-\beta(\omega_1)\beta(\omega_2), \quad E_-}. \tag{11}$$

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 配置数とエントロピー

N 個の分子を M 個のセルのうち異なる N 個に置くので、配置数は

$$W = \binom{M}{N} = \frac{M!}{N!(M-N)!}. \tag{1}$$

Stirling 近似を使うと

$$\begin{aligned} S &= k_B \ln W && (2)\\ &= k_B\{M\ln M - N\ln N - (M-N)\ln(M-N)\} && (3)\\ &= -Mk_B\left[\phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right], \qquad \phi = \frac{N}{M}. && (4) \end{aligned}$$

[1.2] 圧力と理想気体との比較

相互作用がないため $F_0 = -TS$ である。v を一定に保って V を変えると、$M = V/v$ かつ $\phi = vN/V$ も変わる。$f(\phi) = \phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)$ と置けば

$$F_0 = \frac{k_BTV}{v}f(\phi), \qquad \left(\frac{\partial\phi}{\partial V}\right)_N = -\frac{\phi}{V}. \tag{5}$$

従って

$$\begin{aligned} p_0 &= -\left(\frac{\partial F_0}{\partial V}\right)_{T,N} = -\frac{k_BT}{v}\left[f(\phi) - \phi f'(\phi)\right] && (6)\\ &= -\frac{k_BT}{v}\ln(1-\phi) = \boxed{-\frac{k_BT}{v}\ln\left(1-\frac{vN}{V}\right)}. && (7) \end{aligned}$$

$0 < \phi < 1$ では対数の展開から

$$p_0 = \frac{k_BT}{v}\left(\phi + \frac{\phi^2}{2} + \cdots\right) = \frac{k_BNT}{V} + \frac{k_BTvN^2}{2V^2} + \cdots. \tag{8}$$

希薄極限の一次項は $p_{\mathrm{id}} = k_BNT/V$ に一致する。有限密度ではセルの二重占有が禁じられているため、自由に使える空きセルが減って圧力は理想気体より大きくなる。

[2.1] 平均場化学ポテンシャル

[1.1] のエントロピーと与えられた平均場エネルギーより

$$F(\phi) = -\frac{1}{2}Mz\alpha\phi^2 + Mk_BT\left[\phi\ln\phi + (1-\phi)\ln(1-\phi)\right]. \tag{9}$$

$N = M\phi$ なので、M を固定したまま $\mu = (\partial F/\partial N)_T = M^{-1}(\partial F/\partial\phi)_T$ を計算すると

$$\boxed{\mu(\phi) = -\alpha z\phi + k_B T\,[\ln\phi - \ln(1-\phi)]}. \tag{10}$$

第一項は近接分子間の引力による寄与、対数項は占有数の制約によるエントロピーの寄与である。

[2.2] 化学ポテンシャルが単調増加する温度

$$\mu'(\phi) = -\alpha z + \frac{k_B T}{\phi(1-\phi)}. \tag{11}$$

$0 < \phi < 1$ における $\phi(1-\phi)$ の最大値は $1/4$ である。よって $\mu'(\phi) \geq 0$ が全域で成り立つ条件は

$$\boxed{T \geq T_c \equiv \frac{\alpha z}{4k_B}}. \tag{12}$$

$T > T_c$ では導関数は常に正であり、$T = T_c$ では $\phi = 1/2$ の一点だけでゼロ、それ以外では正である。従って臨界温度でも $\mu(\phi)$ は区間全体で厳密に増加する。

[2.3] 三つの密度と相分離

$T < T_c$ では $\mu'(\phi) = 0$ となる密度が二つあり、その間で μ は減少する。この S 字形の曲線では、極小値と極大値の間のある化学ポテンシャルに対し、同じ μ を与える密度が三つ現れる。同じ大きさ M の二領域に粒子を $N + \delta N$ と $N - \delta N$ だけ分けたとき、均等な配置との差は

$$F(N+\delta N) + F(N-\delta N) - 2F(N) = F''(N)(\delta N)^2 + O((\delta N)^4) \tag{13}$$

である。各 F は同じ M, T で評価する。したがって安定な一様相では $F''(N) = \partial\mu/\partial N \geq 0$ が必要である。中央の枝では $\partial\mu/\partial N = M^{-1}\mu'(\phi) < 0$ となり、粒子を偏らせると自由エネルギーが下がるため、この安定性条件に反する。

安定な平衡では、組成に応じて低密度相と高密度相に分かれることがある。$g(\phi) = F(\phi)/M$ をセルあたりの自由エネルギーとすれば、共存密度 ϕ_g, ϕ_l は

$$g'(\phi_g) = g'(\phi_l) = \mu_{\mathrm{coex}}, \qquad g(\phi_l) - g(\phi_g) = \mu_{\mathrm{coex}}(\phi_l - \phi_g) \tag{14}$$

を満たす。第一式は両相の化学ポテンシャルの等値、第二式は二点を結ぶ直線の傾きが共通の接線勾配に等しいことを表す。固定セル体積 v では圧力は $p = (\phi\mu - g)/v$ なので、二式を合わせると圧力も等しい。第二式を積分形に直すと $\int_{\phi_g}^{\phi_l}[\mu(\phi) - \mu_{\mathrm{coex}}]\,d\phi = 0$ となり、Maxwell の等面積則を得る。これが液体と気体の相分離に対応する。三つの解は三相が同時に共存することを意味せず、両端の局所的に安定な枝と中央の不安定枝を表している。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1.1] 二準位系の速度方程式

上準位から下準位への遷移は自然放出と誘導放出、下準位から上準位への遷移は誘導吸収である。よって

$$\frac{dN_1}{dt} = (A + BW(\omega_0))N_2 - BW(\omega_0)N_1, \tag{1}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = BW(\omega_0)N_1 - (A + BW(\omega_0))N_2. \tag{2}$$

両式の和はゼロであり、全原子数密度 $N_1 + N_2$ が保存する。

[1.2] 定常状態と占有数比

定常状態では

$$BW(\omega_0)(N_1 - N_2) = AN_2. \tag{3}$$

従って

$$\boxed{W(\omega_0) = \frac{AN_2}{B(N_1 - N_2)}}, \qquad \frac{N_2}{N_1} = \frac{BW(\omega_0)}{A + BW(\omega_0)} < 1. \tag{4}$$

自然放出があるため、二準位系をこの放射場だけで駆動しても上準位の占有数は下準位を超えない。

[2.1] 空洞内の電磁波モード数

一辺 d の立方体に周期境界条件を置くと、許される波数は $\boldsymbol{k} = (2\pi/d)\boldsymbol{n}$（$\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^3$）である。$|\boldsymbol{k}| \leq \omega/c$ を満たす格子点の数を、球の体積で近似する。各モードに横偏光が二つあるので

$$N(\omega) = 2\frac{d^3}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\omega}{c}\right)^3 = \boxed{\frac{d^3\omega^3}{3\pi^2c^3}}. \tag{5}$$

[2.2] モード密度と Planck 分布

単位体積・単位角周波数あたりのモード数は

$$D(\omega) = \frac{1}{d^3}\frac{dN}{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2c^3}. \tag{6}$$

これに 1 モードあたりの平均エネルギーを掛ければ

$$W_{\mathrm{eq}}(\omega) = D(\omega)\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/(k_BT)} - 1} = \boxed{\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\frac{1}{e^{\hbar\omega/(k_BT)} - 1}}. \tag{7}$$

[2.3] Einstein 係数と共鳴周波数

熱平衡では $N_2/N_1 = e^{-\hbar\omega_0/(k_B T)}$ である。[1.2] の定常式を用いると

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{N_1}{N_2} - 1\right) W_{\mathrm{eq}}(\omega_0) = \left(e^{\hbar\omega_0/(k_B T)} - 1\right) W_{\mathrm{eq}}(\omega_0). \tag{8}$$

Planck 分布を代入して温度依存性が消え、

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{\hbar\omega_0^3}{\pi^2 c^3}}. \tag{9}$$

[3.1] 三準位系の速度方程式

図の矢印に沿って、ポンプ遷移 $1 \leftrightarrow 3$、信号遷移 $1 \leftrightarrow 2$、および $3 \to 2$ の緩和を数えると

$$\frac{dN_1}{dt} = -(P+L)N_1 + (A+L)N_2 + (A'+P)N_3, \tag{10}$$

$$\frac{dN_2}{dt} = LN_1 - (A+L)N_2 + CN_3, \tag{11}$$

$$\frac{dN_3}{dt} = PN_1 - (A'+P+C)N_3. \tag{12}$$

三式の和はゼロで、$N_1 + N_2 + N_3$ が保存する。遷移図は次の通りである。

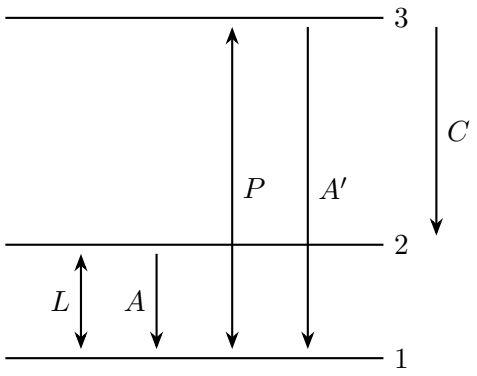


Figure 1: 三準位系で考える遷移。上下位置はエネルギーの順序を示し、準位間隔は縮尺を表さない。

[3.2] 定常占有数比と反転条件

定常状態で第 3 式から

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{P}{A'+P+C}. \tag{13}$$

これを第 2 式へ代入すると

$$\boxed{\frac{N_2}{N_1} = \frac{(A'+P+C)L + CP}{(A'+P+C)(A+L)}}. \tag{14}$$

この比が 1 を超える条件は、分子と分母の差を取って

$$P(C-A) > A(A'+C) \tag{15}$$

となる。従って反転が可能であるためには $C > A$ が必要で、そのときのポンプ率の閾値は

$$\boxed{P_c = \frac{A(A' + C)}{C - A}}, \qquad P > P_c. \tag{16}$$

$3 \to 2$ 緩和が $2 \to 1$ の自然放出より速いと、準位 2 へ原子が効率よく蓄積し、十分なポンプで準位 1 より多くなる。$P = B_{13} W_p(\omega_p)$ より反転条件は

$$W_p(\omega_p) > \frac{A(A' + C)}{B_{13}(C - A)}. \tag{17}$$

[3.3] 短波長ポンプで反転しにくい理由

短波長化に対する困難は、問で与えられた三準位系の速度方程式から説明できる。準位 $1 \leftrightarrow 2$ の角周波数を ω_l、ポンプ遷移 $1 \leftrightarrow 3$ を ω_p とする。熱平衡 Planck 分布から得た Einstein 関係をそれぞれの遷移に適用すると

$$\frac{A}{B_{12}} = \frac{\hbar \omega_l^3}{\pi^2 c^3}, \qquad \frac{A'}{B_{13}} = \frac{\hbar \omega_p^3}{\pi^2 c^3}. \tag{18}$$

Einstein の B 係数を固定すれば、自発遷移率 A, A' は対応する遷移周波数の三乗に比例して増加する。一方、反転に必要な条件は

$$C > A, \qquad P > P_c = \frac{A(C + A')}{C - A}. \tag{19}$$

実際、$C > A$ の範囲では

$$\frac{\partial P_c}{\partial A} = \frac{C(C + A')}{(C - A)^2} > 0, \qquad \frac{\partial P_c}{\partial A'} = \frac{A}{C - A} > 0. \tag{20}$$

よって信号遷移の周波数 ω_l を上げると A が増し、閾値が上がるだけでなく、固定された緩和率 C に対して最終的には $A \geq C$ となり反転自体が不可能になる。ポンプ遷移の周波数 ω_p を上げても A' が増し、必要なポンプ率が増える。この説明はポンプ場のスペクトル形状を仮定しない。

なお、ポンプ光が別途熱平衡場だと仮定した場合に限り、Wien 極限 $\hbar \omega_p \gg k_B T$ では

$$W_{p,\mathrm{eq}}(\omega_p) \simeq \frac{\hbar \omega_p^3}{\pi^2 c^3} e^{-\hbar \omega_p / (k_B T)} \tag{21}$$

となり、高周波数での指数抑制も加わる。ただしこれは原問が置いていない追加条件である。

物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の伝導率テンソル

$x = \omega_c \tau$ とする。定常状態の運動方程式は

$$\boldsymbol{v} = -\frac{e\tau}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \qquad v_x = -\frac{e\tau}{m}(E_x + Bv_y), \quad v_y = -\frac{e\tau}{m}(E_y - Bv_x). \tag{1}$$

電流密度は $\boldsymbol{J} = -ne\boldsymbol{v}$ なので

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{ne^2\tau}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

行列を反転すると、問題の形式

$$\boxed{\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}} \tag{3}$$

を得る。

[1.2] Hall 係数と縦伝導率

$\boldsymbol{j} = \widetilde{\sigma}\boldsymbol{E}$ を反転し、$j_y = 0$ とすると

$$E_x = \frac{j_x}{\sigma_0}, \qquad E_y = -\frac{xj_x}{\sigma_0}. \tag{4}$$

従って

$$\boxed{R_H = -\frac{x}{\sigma_0 B} = -\frac{1}{ne}}, \qquad \boxed{\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}. \tag{5}$$

Hall 係数が負なのは、担い手の電荷が $-e$ であることを反映している。

[2.1] 電子・正孔の伝導率テンソル

電子のテンソルは [1.1] の結果であり、正孔は反対符号の電荷を持つので Hall 成分の符号が反転する。両者の電流を加えると

$$\boxed{\widetilde{\sigma} = \frac{e^2\tau/m}{1+x^2} \begin{pmatrix} n+p & -(n-p)x \\ (n-p)x & n+p \end{pmatrix}}. \tag{6}$$

ここで $x = \omega_c \tau$ は正の量である。

[2.2] Hall 係数と縦伝導率

$u = n + p$、$d = n - p$ とおく。伝導率行列の逆は

$$\widetilde{\sigma}^{-1} = \frac{m(1+x^2)}{e^2\tau}\frac{1}{u^2+d^2x^2}\begin{pmatrix} u & dx \\ -dx & u \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$j_y = 0$ では $\boldsymbol{E} = \widetilde{\sigma}^{-1}(j_x, 0)^T$ なので

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{d}{e}\frac{1+x^2}{u^2+d^2x^2} \tag{8}$$

$$= \boxed{-\frac{n-p}{e}\frac{1+(\omega_c\tau)^2}{(n+p)^2+(n-p)^2(\omega_c\tau)^2}}, \tag{9}$$

$$\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \boxed{\frac{(n+p)e^2\tau}{m}\frac{1+[(n-p)/(n+p)]^2x^2}{1+x^2}}. \tag{10}$$

[2.3] 低磁場・高磁場 Hall 係数

式の $x \to 0$ および $x \to \infty$ の極限は

$$R_H^{(0)} = -\frac{n-p}{e(n+p)^2}, \qquad R_H^{(\infty)} = -\frac{1}{e(n-p)}. \tag{11}$$

従って

$$n - p = -\frac{1}{eR_H^{(\infty)}}, \qquad n + p = \frac{1}{e\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}}, \tag{12}$$

ここで平方根は正の枝を取った。よって

$$\boxed{n = \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}} - \frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right]}, \quad \boxed{p = \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}} + \frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right]}. \tag{13}$$

非負密度を持つこのモデルの極限値は、同符号であることに加え

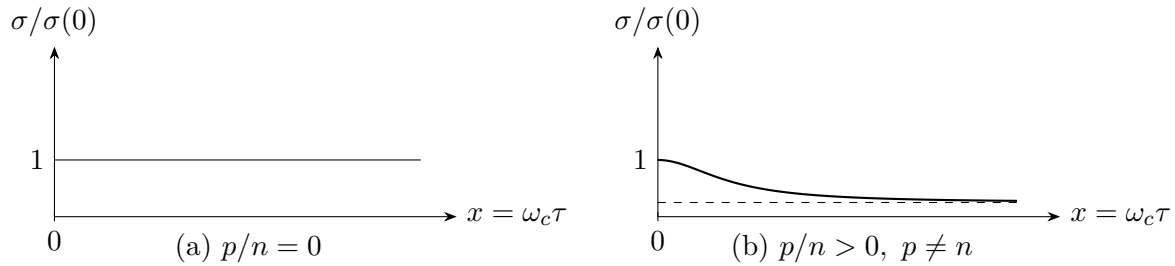
$$0 < \frac{R_H^{(0)}}{R_H^{(\infty)}} = \frac{d^2}{u^2} \le 1 \tag{14}$$

を満たす。従って復元した u と d には $u \ge |d|$ が成り立ち、$n = (u+d)/2$、$p = (u-d)/2$ はともに非負となる。二つの Hall 係数を入力として使う場合にも、同符号と $|R_H^{(0)}| \le |R_H^{(\infty)}|$ の両方が、このモデルとの適合条件である。

[2.4] 縦伝導率の磁場依存性

$$\sigma(0) = \frac{(n+p)e^2\tau}{m}, \qquad \sigma(\infty) = \frac{(n-p)^2e^2\tau}{m(n+p)}. \tag{15}$$

$n, p \ge 0$ なら $|(n-p)/(n+p)| \le 1$ なので、$p = 0$ では σ は一定、両種が存在し $n \ne p$ なら単調に減少して正の高磁場極限へ近づく。代表的な曲線を規格化して示す（混合担体の曲線は $|n-p|/(n+p) = 1/2$ の例）。



(a) $p/n = 0$　　(b) $p/n > 0,\ p \neq n$

Figure 1: 縦伝導率の代表的な磁場依存性。右図では $[(n-p)/(n+p)]^2 = 1/4$ の例を示す。

[2.5] 電子・正孔密度が等しい場合

$p = n > 0$ では伝導率テンソルの Hall 成分が相殺する。[2.1] の行列から $j_y = 2ne^2\tau E_y/[m(1+x^2)]$ なので、全電流の条件 $j_y = 0$ より Hall 電場は $E_y = 0$ となる。このとき縦伝導率は

$$\sigma = \frac{2ne^2\tau/m}{1+x^2} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty). \tag{16}$$

$E_y = 0$ で各担体の定常運動方程式を解くと、縦速度は

$$\text{電子：}\quad v_x = -\frac{e\tau E_x}{m(1+x^2)}, \qquad \text{正孔：}\quad v_x = \frac{e\tau E_x}{m(1+x^2)}, \tag{17}$$

横速度はともに $v_y = -e\tau x E_x/[m(1+x^2)]$ である。横速度は同方向だが電荷の符号が逆なので、等密度では横電流が相殺する。そのため、単一担体の場合のように横のローレンツ力を補償する Hall 電場が生じない。高磁場では縦速度が $1/(1+x^2)$ の因子で抑えられ、電場方向の電流と縦伝導率がゼロへ近づく。