物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 電子の伝導率テンソル

$x = \omega_c \tau$ とする。定常状態の運動方程式は

$$\boldsymbol{v} = -\frac{e\tau}{m}(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \qquad v_x = -\frac{e\tau}{m}(E_x + Bv_y), \quad v_y = -\frac{e\tau}{m}(E_y - Bv_x). \tag{1}$$

電流密度は $\boldsymbol{J} = -ne\boldsymbol{v}$ なので

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ -x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{ne^2\tau}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{2}$$

行列を反転すると、問題の形式

$$\boxed{\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+x^2} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & 1 \end{pmatrix}}, \qquad \boxed{\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}} \tag{3}$$

を得る。

[1.2] Hall 係数と縦伝導率

$\boldsymbol{j} = \widetilde{\sigma}\boldsymbol{E}$ を反転し、$j_y = 0$ とすると

$$E_x = \frac{j_x}{\sigma_0}, \qquad E_y = -\frac{xj_x}{\sigma_0}. \tag{4}$$

従って

$$\boxed{R_H = -\frac{x}{\sigma_0 B} = -\frac{1}{ne}}, \qquad \boxed{\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}}. \tag{5}$$

Hall 係数が負なのは、担い手の電荷が $-e$ であることを反映している。

[2.1] 電子・正孔の伝導率テンソル

電子のテンソルは [1.1] の結果であり、正孔は反対符号の電荷を持つので Hall 成分の符号が反転する。両者の電流を加えると

$$\boxed{\widetilde{\sigma} = \frac{e^2\tau/m}{1+x^2} \begin{pmatrix} n+p & -(n-p)x \\ (n-p)x & n+p \end{pmatrix}}. \tag{6}$$

ここで $x = \omega_c \tau$ は正の量である。

[2.2] Hall 係数と縦伝導率

$u = n + p$、$d = n - p$ とおく。伝導率行列の逆は

$$\widetilde{\sigma}^{-1} = \frac{m(1+x^2)}{e^2\tau}\frac{1}{u^2+d^2x^2}\begin{pmatrix} u & dx \\ -dx & u \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$j_y = 0$ では $\boldsymbol{E} = \widetilde{\sigma}^{-1}(j_x, 0)^T$ なので

$$R_H = \frac{E_y}{j_x B} = -\frac{d}{e}\frac{1+x^2}{u^2+d^2x^2} \tag{8}$$

$$= \boxed{-\frac{n-p}{e}\frac{1+(\omega_c\tau)^2}{(n+p)^2+(n-p)^2(\omega_c\tau)^2}}, \tag{9}$$

$$\sigma = \frac{j_x}{E_x} = \boxed{\frac{(n+p)e^2\tau}{m}\frac{1+[(n-p)/(n+p)]^2x^2}{1+x^2}}. \tag{10}$$

[2.3] 低磁場・高磁場 Hall 係数

式の $x \to 0$ および $x \to \infty$ の極限は

$$R_H^{(0)} = -\frac{n-p}{e(n+p)^2}, \qquad R_H^{(\infty)} = -\frac{1}{e(n-p)}. \tag{11}$$

従って

$$n - p = -\frac{1}{eR_H^{(\infty)}}, \qquad n + p = \frac{1}{e\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}}, \tag{12}$$

ここで平方根は正の枝を取った。よって

$$\boxed{n = \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}} - \frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right]}, \quad \boxed{p = \frac{1}{2e}\left[\frac{1}{\sqrt{R_H^{(0)}R_H^{(\infty)}}} + \frac{1}{R_H^{(\infty)}}\right]}. \tag{13}$$

非負密度を持つこのモデルの極限値は、同符号であることに加え

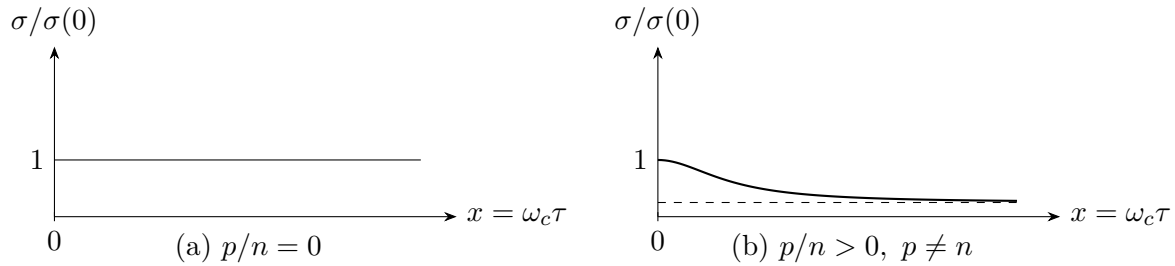
$$0 < \frac{R_H^{(0)}}{R_H^{(\infty)}} = \frac{d^2}{u^2} \le 1 \tag{14}$$

を満たす。従って復元した u と d には $u \ge |d|$ が成り立ち、$n = (u+d)/2$、$p = (u-d)/2$ はともに非負となる。二つの Hall 係数を入力として使う場合にも、同符号と $|R_H^{(0)}| \le |R_H^{(\infty)}|$ の両方が、このモデルとの適合条件である。

[2.4] 縦伝導率の磁場依存性

$$\sigma(0) = \frac{(n+p)e^2\tau}{m}, \qquad \sigma(\infty) = \frac{(n-p)^2e^2\tau}{m(n+p)}. \tag{15}$$

$n, p \ge 0$ なら $|(n-p)/(n+p)| \le 1$ なので、$p = 0$ では σ は一定、両種が存在し $n \ne p$ なら単調に減少して正の高磁場極限へ近づく。代表的な曲線を規格化して示す（混合担体の曲線は $|n-p|/(n+p) = 1/2$ の例）。



(a) $p/n = 0$　　(b) $p/n > 0,\ p \neq n$

Figure 1: 縦伝導率の代表的な磁場依存性。右図では $[(n-p)/(n+p)]^2 = 1/4$ の例を示す。

[2.5] 電子・正孔密度が等しい場合

$p = n > 0$ では伝導率テンソルの Hall 成分が相殺する。[2.1] の行列から $j_y = 2ne^2\tau E_y/[m(1+x^2)]$ なので、全電流の条件 $j_y = 0$ より Hall 電場は $E_y = 0$ となる。このとき縦伝導率は

$$\sigma = \frac{2ne^2\tau/m}{1+x^2} \longrightarrow 0 \qquad (x \to \infty). \tag{16}$$

$E_y = 0$ で各担体の定常運動方程式を解くと、縦速度は

$$\text{電子：}\quad v_x = -\frac{e\tau E_x}{m(1+x^2)}, \qquad \text{正孔：}\quad v_x = \frac{e\tau E_x}{m(1+x^2)}, \tag{17}$$

横速度はともに $v_y = -e\tau x E_x/[m(1+x^2)]$ である。横速度は同方向だが電荷の符号が逆なので、等密度では横電流が相殺する。そのため、単一担体の場合のように横のローレンツ力を補償する Hall 電場が生じない。高磁場では縦速度が $1/(1+x^2)$ の因子で抑えられ、電場方向の電流と縦伝導率がゼロへ近づく。