物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1.1] 電場と電位

ガウスの法則より、半径 a より内側では包む電荷がなく、球殻間だけで電場がある。外側では全電荷がゼロである。電位は無限遠をゼロとして積分する。

$$E(r) = \begin{cases} 0 & (r < a), \\ Q_0/(4\pi\varepsilon_0 r^2) & (a < r < b), \\ 0 & (r > b), \end{cases} \quad \phi(r) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} 1/a - 1/b & (r < a), \\ 1/r - 1/b & (a \le r \le b), \\ 0 & (r > b). \end{cases} \tag{1}$$

[1.2] 静電容量

球殻間の電位差は $\Delta\phi = Q_0(1/a - 1/b)/(4\pi\varepsilon_0)$ であるから

$$C = \frac{Q_0}{\Delta\phi} = \boxed{\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}}. \tag{2}$$

[1.3] 誘電体で満たした場合のエネルギー

誘電率 ε の媒質で満たすと $C_\varepsilon = 4\pi\varepsilon ab/(b-a)$ である。電荷を Q_0 に保つので

$$U = \frac{Q_0^2}{2C_\varepsilon} = \boxed{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}. \tag{3}$$

[1.4] 薄い誘電層による容量変化

真空層 $a < r < b - d$ と誘電層 $b - d < r < b$ は直列である。

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b-d}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{b-d} - \frac{1}{b}\right) \tag{4}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) - \frac{d}{4\pi b^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon}\right) + O(d^2). \tag{5}$$

$C_0 = 4\pi\varepsilon_0 ab/(b-a)$ を使って逆数を展開すると

$$\boxed{C = C_0 + \frac{4\pi\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\varepsilon}\frac{a^2}{(b-a)^2}d + O(d^2)}. \tag{6}$$

[2.1] 定常電流とジュール熱

媒質内の電場は $E_r = Q_0/(4\pi\varepsilon r^2)$ なので、半径によらず電流は

$$I = 4\pi r^2 \sigma E_r = \frac{\sigma Q_0}{\varepsilon} > 0. \tag{7}$$

電位差を電流で割れば抵抗が得られる。

$$\boxed{\mathcal{R} = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}, \qquad \boxed{\dot{Q}_{\mathrm{heat}} = I^2\mathcal{R} = \frac{\sigma Q_0^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}. \tag{8}$$

[2.2] 電源を外した後

時刻 t の内側球殻の電荷を $Q(t)$ とする。[2.1] の電流式に現在の電荷を入れると $I(t) = \sigma Q(t)/\varepsilon$ となる。外向きの電流は内側球殻の電荷を減らすので、電荷保存則から $dQ/dt = -I(t) = -\sigma Q(t)/\varepsilon$ である。初期条件 $Q(0) = Q_0$ を使うと

$$Q(t) = Q_0 e^{-\sigma t/\varepsilon}. \tag{9}$$

瞬時電力は [2.1] の Q_0 を $Q(t)$ に置き換えたものなので

$$W(t) = \int_0^t \frac{\sigma Q(t')^2}{4\pi\varepsilon^2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) dt' = \boxed{\frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(1 - e^{-2\sigma t/\varepsilon}\right)}. \tag{10}$$

[2.3] 静電エネルギーとの関係

$t \to \infty$ では残留電荷がゼロとなり、発生熱は $W(\infty) = Q_0^2(1/a - 1/b)/(8\pi\varepsilon)$ となる。これは [1.3] の初期静電エネルギーに等しい。ここでは電源が外れており、媒質の熱以外にエネルギーが移らないためである。

[3] 二媒質境界の面電荷

定常状態では各領域の電流密度が $I/(4\pi r^2)$ である。従って境界の両側の電場は $E_i = I/(4\pi\sigma_i r_0^2)$。境界面法線を外向きに取ると、自由面電荷密度は法線方向の $\boldsymbol{D}$ の跳びで

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{s}} = \varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 = \frac{I}{4\pi r_0^2}\left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1}\right)}. \tag{11}$$

負値の場合は、境界に負の自由電荷が蓄積している。