物理工学専攻院試解答集
2018 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] 質点の速さ

頂点を位置エネルギーの基準にする。角度 θ まで降りたときの高さの減少は $R(1-\cos\theta)$ なので、力学的エネルギー保存から

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR(1-\cos\theta), \qquad \boxed{v(\theta) = \sqrt{2gR(1-\cos\theta)}}. \tag{1}$$

[1.2] 質点の離脱

半径方向内向きを正に取ると、接触中は $mg\cos\theta - N = mv^2/R$ である。離脱時は $N=0$ だから、$v_c^2 = gR\cos\theta_{c1}$。これとエネルギー式を合わせると

$$2(1-\cos\theta_{c1}) = \cos\theta_{c1}, \qquad \boxed{\cos\theta_{c1} = \frac{2}{3}}, \quad \boxed{v_{c1} = \sqrt{\frac{2gR}{3}}}. \tag{2}$$

[2.1] 一様球の慣性モーメント

球の密度は $\rho_m = 3m/(4\pi r^3)$ である。球座標で極角を ϑ とすると

$$I = \int (s\sin\vartheta)^2 \rho_m \, s^2 \sin\vartheta \, ds \, d\vartheta \, d\phi \tag{3}$$

$$= \rho_m \left(\int_0^r s^4 ds\right)\left(\int_0^\pi \sin^3\vartheta \, d\vartheta\right)(2\pi) = \boxed{\frac{2}{5}mr^2}. \tag{4}$$

[2.2] 転がり条件

球中心の軌道半径は $R+r$ である。接触点の速度がゼロだから、$v = r\omega$（角速度の大きさ）となる。

[2.3] 転がる球の離脱

重心の位置エネルギー減少は $mg(R+r)(1-\cos\theta)$ である。$I = 2mr^2/5$ および $\omega = v/r$ を使うと

$$mg(R+r)(1-\cos\theta) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{7}{10}mv^2, \quad v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta). \tag{5}$$

離脱時の半径方向の式は $mg\cos\theta_{c2} = mv_{c2}^2/(R+r)$ である。二式を連立して

$$\boxed{\cos\theta_{c2} = \frac{10}{17}}, \qquad \boxed{v_{c2} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r)}}. \tag{6}$$

[2.4] 離脱角の違い

同じ角度 θ での向心加速度を、各中心軌道の半径を使って比較すると

$$\text{質点：}\quad \frac{v^2}{R} = 2g(1-\cos\theta), \qquad \text{球：}\quad \frac{v^2}{R+r} = \frac{10}{7}g(1-\cos\theta). \tag{7}$$

転がる球では位置エネルギーの一部が回転エネルギーに入るため、向心加速度の係数が小さい。接触中の法線抗力は、質点では $N = m[g\cos\theta - v^2/R]$、球では $N = m[g\cos\theta - v^2/(R+r)]$ であり、球のほうが同じ角度で大きい。そのため球はより大きな角度まで接触を保つ。実際、$10/17 < 2/3$ より $\theta_{c2} > \theta_{c1}$ である。

[3.1] 撃力の作用高さ

撃力の作用時間を十分短く取り、その間の重力と接触摩擦の力積を無視する。頂点で水平方向に打つので、支持面へ向かう法線方向の衝突も生じない。この局所的な撃力モデルでは、並進の力積収支から $mv_0 = P$、重心まわりの角力積収支から $I\omega_0 = P(h-r)$ となる。接触点の水平速度がゼロとなるためには、撃力直後の重心速度 $v_0 = P/m$ と角速度 ω_0 が $v_0 = r\omega_0$ を満たす必要がある。従って

$$\omega_0 = \frac{P(h-r)}{I} = \frac{5P(h-r)}{2mr^2}. \tag{8}$$

これを転がり条件に代入すると

$$\boxed{h = \frac{7}{5}r}, \qquad v_0 = \frac{P}{m}, \quad \omega_0 = \frac{P}{mr}. \tag{9}$$

[3.2] 撃力後の離脱

撃力後は力学的エネルギーが保存される。最初の並進・回転運動エネルギーは $(7/10)P^2/m$ なので

$$v^2 = \frac{10}{7}g(R+r)(1-\cos\theta) + \frac{P^2}{m^2}. \tag{10}$$

離脱条件 $v_c^2 = g(R+r)\cos\theta_{c3}$ と連立すると

$$\boxed{\cos\theta_{c3} = \frac{10}{17} + \frac{7P^2}{17m^2g(R+r)}}, \qquad \boxed{v_{c3} = \sqrt{\frac{10}{17}g(R+r) + \frac{7P^2}{17m^2}}}. \tag{11}$$

この離脱角が実現するには、右辺が 0 以上 1 以下でなければならない。