物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] B が動き出す時刻

C が動き始めてから t 秒後、B が静止している間は右側のばねの伸びが $v_0 t$ である。B を右へ引く力は $kv_0 t$。これが最大静止摩擦力 μmg に達した時に B が動き始めるので

$$kv_0 t_0 = \mu mg, \qquad \boxed{t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0}}. \tag{1}$$

[1.2] B の運動方程式

B が動き始めた時刻を $t = 0$ とする。このとき C は初期位置から $v_0 t_0$ だけ進んでおり、その後 t 秒間にさらに $v_0 t$ 進む。A は静止しているため、左のばねは x_B だけ伸び、右のばねは $v_0(t + t_0) - x_B$ だけ伸びる。B は右向きに滑るので動摩擦力は左向きである。よって

$$m\ddot{x}_B = k\{v_0(t + t_0) - x_B\} - kx_B - \frac{2}{3}\mu mg \tag{2}$$

$$= -2kx_B + kv_0 t + \frac{1}{3}\mu mg = -2kx_B + kv_0 t + \frac{1}{3}kv_0 t_0. \tag{3}$$

ここでは $x_B(0) = 0$ に加えて、滑り始める直前まで静止していたことから $\dot{x}_B(0) = 0$ である。

[1.3] B の位置

角振動数 $\omega = \sqrt{2k/m}$ を導入すると

$$\ddot{x}_B + \omega^2 x_B = \frac{kv_0}{m} t + \frac{kv_0 t_0}{3m}. \tag{4}$$

右辺に対する一次式の特解を $x_p = v_0 t/2 + v_0 t_0/6$ とおける。一般解に初期条件を適用すると

$$\boxed{x_B(t) = \frac{v_0 t}{2} + \frac{v_0 t_0}{6} - \frac{v_0 t_0}{6}\cos(\omega t) - \frac{v_0}{2\omega}\sin(\omega t)}. \tag{5}$$

この式は $t = 0$ で $x_B = \dot{x}_B = 0$ を満たす。

[1.4] A が静止を保つ条件

$\omega t_0 \ll 1$ のもとで、解の二つの差をそれぞれ展開する。

$$x_B(t_0) = \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega}\right) + \frac{v_0 t_0}{6}\left[1 - \cos(\omega t_0)\right] \tag{6}$$

$$= \frac{v_0\omega^2 t_0^3}{12} + \frac{v_0\omega^2 t_0^3}{12} + O(v_0\omega^4 t_0^5) \tag{7}$$

$$= \boxed{\frac{v_0\omega^2 t_0^3}{6} = \frac{k v_0 t_0^3}{3m}} + O(v_0\omega^4 t_0^5). \tag{8}$$

このとき A に働くばね力の大きさは

$$k x_B(t_0) \simeq \frac{\mu m g}{6}(\omega t_0)^2 \ll \mu m g, \tag{9}$$

である。従って A を動かすのに必要な力は最大静止摩擦力より小さく、A は静止を保つ。

[2.1] 微小振動の運動方程式と固有振動数

外部ポテンシャルの曲率は

$$U''(x) = k_1\left[-1 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \tag{10}$$

従って中央の B では $U''(0) = -k_1$、両端の A,C では $U''(\pm l) = 2k_1$ である。ばね力と外力を一次まで残すと

$$m\begin{pmatrix}\ddot{q}_A\\ \ddot{q}_B\\ \ddot{q}_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k_0 - 2k_1 & k_0 & 0\\ k_0 & -2k_0 + k_1 & k_0\\ 0 & k_0 & -k_0 - 2k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_A\\ q_B\\ q_C\end{pmatrix}. \tag{11}$$

式(11)の右辺の行列を K とおく。これを $(1, 0, -1)^T$ に作用させると

$$K\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -(k_0 + 2k_1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{q}} = K\boldsymbol{q}$ なので、左右反対称モードの角振動数は

$$\boxed{\omega_a^2 = \frac{k_0 + 2k_1}{m}}. \tag{13}$$

対称な変位 (a, b, a) では、力の係数行列 K は (a, b) に対して

$$K_s = \begin{pmatrix}-k_0 - 2k_1 & k_0\\ 2k_0 & -2k_0 + k_1\end{pmatrix} \tag{14}$$

と作用する。K_s の固有値を $-m\omega^2$ と書くと

$$m^2\omega^4 - m(3k_0 + k_1)\omega^2 + (3k_0 k_1 - 2k_1^2) = 0, \tag{15}$$

したがって対称モードの二つの周波数は

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{3k_0 + k_1 \pm \sqrt{9k_0^2 - 6k_0 k_1 + 9k_1^2}}{2m}}. \tag{16}$$

ω_- が小さい方の周波数である。三つのモードが正の固有角振動数を持つ安定な微小振動となるのは $0 < k_1 < 3k_0/2$ である。等号の $k_1 = 3k_0/2$ では $\omega_- = 0$ となり、線形化した零モードは $\ddot{q} = 0$ であって振動しない。これを不安定化の臨界点として区別する。

[2.2] 不安定になる基準振動

k_1 を増すと、最初にゼロになるのは対称モードの低周波数 ω_- である。二つの対称モードの積は

$$\omega_-^2\omega_+^2 = \frac{k_1(3k_0 - 2k_1)}{m^2}. \tag{17}$$

従って臨界値では $3k_0 - 2k_c = 0$ となり

$$\boxed{k_c = \frac{3}{2}k_0}. \tag{18}$$

$k_1 > k_c$ では $\omega_-^2 < 0$ となるため、この対称な低周波数モードが不安定である。

[2.3] 不安定化するモードの変位比

$k_1 = 4k_c/9 = 2k_0/3$ では

$$\omega_-^2 = \frac{k_0}{3m}. \tag{19}$$

このとき

$$K_s = k_0 \begin{pmatrix} -7/3 & 1 \\ 2 & -4/3 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

固有値 $-k_0/3 = -m\omega_-^2$ の固有ベクトルは $(a, b) = (1, 2)$ であり、全三質点では $(q_A, q_B, q_C) \propto (1, 2, 1)$ となる。よって

$$\boxed{q_A : q_B : q_C = 1 : 2 : 1}. \tag{21}$$

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 二点電荷のポテンシャル

ポテンシャルの重ね合わせから

$$\boxed{\phi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)}. \tag{1}$$

[2] 遠方での双極子ポテンシャル

$\boldsymbol{p}$ の向きを極軸に取ると、正負電荷の位置はそれぞれ $+\boldsymbol{d}/2$、$-\boldsymbol{d}/2$ であり、

$$r_\pm = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd\cos\theta}. \tag{2}$$

d/r の一次まで二項展開すると

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} + \frac{d\cos\theta}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^3}\right), \qquad \frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} - \frac{d\cos\theta}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^3}\right). \tag{3}$$

単極子項は差を取ると消える。$p = qd$ より

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (r \gg d). \tag{4}$$

[3] 双極子電場

軸対称な球座標で $\nabla\phi = \boldsymbol{e}_r\partial_r\phi + (\boldsymbol{e}_\theta/r)\partial_\theta\phi$ だから

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right). \tag{5}$$

これは問題文に示された電場の式である。

$$\boxed{\boldsymbol{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)}. \tag{6}$$

[4] 双極子 2 の回転方向

位置 1 から 2 への方向を x 軸とすると、双極子 1 が位置 2 につくる電場は

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 l^3}(2\cos\theta_1\,\boldsymbol{e}_x - \sin\theta_1\,\boldsymbol{e}_y). \tag{7}$$

(a) では $\theta_1 = \pi/2$ なので $\boldsymbol{E}_1$ は $-y$ 方向、$\boldsymbol{p}_2$ は $+x$ 方向である。トルク $\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{E}_1$ は紙面の裏向きとなるから、紙面を正面から見て時計回りに回り始める。(b) では $\boldsymbol{p}_2$ も $-y$ 方向で $\boldsymbol{E}_1$ と平行なのでトルクはゼロであり、回転しない。

[5] 二つの双極子の相互作用エネルギー

$U = -\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1$ に上の電場と $\boldsymbol{p}_2 = p_2(\cos\theta_2 \boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2 \boldsymbol{e}_y)$ を代入すると

$$U = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 l^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \tag{8}$$

$$= -\frac{p_1 p_2}{8\pi\varepsilon_0 l^3}[3\cos(\theta_1+\theta_2) + \cos(\theta_1-\theta_2)]. \tag{9}$$

[6] 安定な相対配置

$u = \theta_1 + \theta_2$、$v = \theta_1 - \theta_2$ は独立に変えられる角度である。エネルギーを最小にするには $\cos u = \cos v = 1$ が必要で、

$$\theta_1 + \theta_2 = 2m\pi, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \qquad (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{10}$$

したがって角度を 2π を法として表すと、安定配置は $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ および (π, π) であり、いずれも

$$\boxed{U_{\min} = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 l^3}}. \tag{11}$$

[7] 接地導体面と双極子のエネルギー

図 3 の実双極子の法線成分は $p\cos\alpha$、面に平行な成分は $-p\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_y$ である。双極子を $-q$ から $+q$ へ向かう微小な電荷対とみなす。接地面の鏡像では各電荷を $z \mapsto -z$ で反射し、電荷の符号も反転する。像の $-q$ から $+q$ への変位をたどると、法線成分は元の向きのまま、面に平行な成分は反転する。実双極子と像双極子の距離は $2h$ である。像双極子が実双極子の位置に

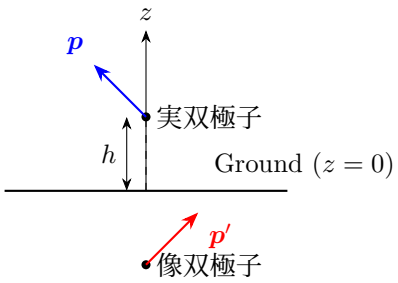


図 1: 導体面に対する実双極子と鏡像双極子。接線成分は反転し、法線成分は同じ向きである。

つくる電場は

$$\boldsymbol{E}_{\rm im} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(2h)^3}(-p\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_y + 2p\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_z). \tag{12}$$

従って両者の相互作用エネルギーは

$$U_{\rm pair} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm im} = -\frac{p^2(1+\cos^2\alpha)}{32\pi\varepsilon_0 h^3}. \tag{13}$$

像は実双極子によって誘起されるので、この相互作用エネルギー全体を系のエネルギーとはしない。h, α を固定して実双極子を $\boldsymbol{p}(s) = s\boldsymbol{p}$（$0 \le s \le 1$）と徐々に立ち上げると、導体の線形応答により像の電場は $\boldsymbol{E}_{\rm im}(s) = s\boldsymbol{E}_{\rm im}$ となる。実双極子を増やす増分仕事のうち導体に由来する分は $dU' = -\boldsymbol{E}_{\rm im}(s)\cdot d\boldsymbol{p}(s) = -s\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm im}\,ds$ である。従って $\int_0^1 s\,ds = 1/2$ から

$$\boxed{U' = \frac{1}{2}U_{\rm pair} = -\frac{p^2(1+\cos^2\alpha)}{64\pi\varepsilon_0 h^3} = -\frac{p^2(3+\cos 2\alpha)}{128\pi\varepsilon_0 h^3}}. \tag{14}$$

これは $h \to \infty$ でゼロとなる。

[8] 最も安定な双極子の向き

U' を最小にするには $\cos^2\alpha = 1$ であればよい。従って

$$\boxed{\alpha = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})} \tag{15}$$

であり、双極子モーメントが導体面の法線に平行または反平行なとき最も安定である。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 井戸型ポテンシャルの固有状態

井戸の外で波動関数はゼロであり、境界条件は $\psi(\pm a/2) = 0$ である。井戸の内部では定常シュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = E\psi \tag{1}$$

を満たす。$k = \sqrt{2mE}/\hbar$ と置くと一般解は $A\sin kx + B\cos kx$ である。井戸の中心に関する偶奇性で解を分けると、偶関数の境界条件は $\cos(ka/2) = 0$、奇関数の境界条件は $\sin(ka/2) = 0$ となる。両者を合わせて

$$k_n = \frac{n\pi}{a}, \qquad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2ma^2}, \quad n = 1, 2, \dots \tag{2}$$

を得る。区間内で規格化した固有関数は

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2/a}\cos(n\pi x/a), & n \text{ が奇数}, \\ \sqrt{2/a}\sin(n\pi x/a), & n \text{ が偶数}, \end{cases} \quad (|x| < a/2), \tag{3}$$

であり、区間外では $\psi_n(x) = 0$ である。従って後で使う基底状態と第一励起状態は

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\cos\frac{\pi x}{a}, \quad E_g = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}; \qquad e(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\frac{2\pi x}{a}, \quad E_e = \frac{4\pi^2\hbar^2}{2ma^2}. \tag{4}$$

g は偶関数、e は奇関数である。

[2] 2 粒子の軌道状態

$g_1 = g(x_1)$、$e_1 = e(x_1)$ などと略記する。粒子を交換する演算子は $x_1 \leftrightarrow x_2$ を行うので、基底状態どうしと第一励起状態どうしは対称で、混合状態には対称・反対称の二通りがある。規格化された 4 状態は

$$\Phi_{gg} = g_1 g_2, \qquad \Phi_{ee} = e_1 e_2, \tag{5}$$

$$\Phi_+ = \frac{g_1 e_2 + e_1 g_2}{\sqrt{2}}, \qquad \Phi_- = \frac{g_1 e_2 - e_1 g_2}{\sqrt{2}}. \tag{6}$$

前 3 つは粒子交換に対称、Φ_- は反対称である。直交する一粒子状態から作られているため、混合状態の係数 $1/\sqrt{2}$ が規格化を与える。

[3] 全スピンの固有状態

$S_z = s_{1z} + s_{2z}$ の固有状態を作る。三重項は

$$|1,1\rangle = |\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, \qquad |1,0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \qquad |1,-1\rangle = |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2, \tag{7}$$

で、S^2 の固有値は $S(S+1)\hbar^2 = 2\hbar^2$、S_z の固有値は $M\hbar$ である。残る状態は一重項

$$|0,0\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \tag{8}$$

であり、$S^2 = 0$、$S_z = 0$ である。交換に対して三重項は対称、一重項は反対称となる。

[4] フェルミ粒子の全波動関数とエネルギー

全波動関数は粒子交換で反対称でなければならない。従って、対称軌道には一重項スピン、反対称軌道には三重項スピンを組み合わせる。6 状態を

$$\Psi_1 = \Phi_{gg}|0,0\rangle, \qquad \Psi_2 = \Phi_{ee}|0,0\rangle, \qquad \Psi_3 = \Phi_+|0,0\rangle, \tag{9}$$

$$\Psi_4 = \Phi_-|1,1\rangle, \qquad \Psi_5 = \Phi_-|1,-1\rangle, \qquad \Psi_6 = \Phi_-|1,0\rangle \tag{10}$$

と書ける。相互作用がないとき全エネルギーは軌道エネルギーの和なので

$$E_1 = 2E_g = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^2}, \quad E_2 = 2E_e = \frac{4\pi^2\hbar^2}{ma^2}, \quad E_3 = E_4 = E_5 = E_6 = E_g + E_e = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}. \tag{11}$$

[5] 粒子間距離の二乗の期待値

井戸の外で $g = e = 0$ として積分を全実数に拡張してよい。偶奇性から

$$\int xg^2\,\mathrm{d}x = \int xe^2\,\mathrm{d}x = \int x^2ge\,\mathrm{d}x = 0, \tag{12}$$

一方、$\int xge\,\mathrm{d}x = C$ である。積状態 Φ_{gg} では x_1x_2 の期待値は $\langle x\rangle_g^2 = 0$ で、$x_1^2 + x_2^2$ の期待値は $2A$ となる。Φ_{ee} も同様に $2B$ である。

混合状態では $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$ を使う。対称状態 Φ_+ では、二つの対角項が $A+B$ を与え、交差項は

$$\langle\Phi_+|x_1x_2|\Phi_+\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle ge|x_1x_2|ge\rangle + \langle eg|x_1x_2|eg\rangle + 2\langle ge|x_1x_2|eg\rangle\right) = C^2 \tag{13}$$

となる。ここで対角項は $\langle g|x|g\rangle\langle e|x|e\rangle = 0$、交差項は $\langle g|x|e\rangle^2 = C^2$ である。Φ_- では交差項の符号が逆になる。スピン因子は座標演算子に影響しないため、

$$\langle\Psi_1|(x_1 - x_2)^2|\Psi_1\rangle = 2A, \qquad \langle\Psi_2|(x_1 - x_2)^2|\Psi_2\rangle = 2B, \tag{14}$$

$$\langle\Psi_3|(x_1 - x_2)^2|\Psi_3\rangle = A + B - 2C^2, \quad \langle\Psi_j|(x_1 - x_2)^2|\Psi_j\rangle = A + B + 2C^2 \quad (j = 4,5,6). \tag{15}$$

積分を実行すると

$$A = a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2}\right), \quad B = a^2\left(\frac{1}{12} - \frac{1}{8\pi^2}\right), \quad C = \frac{16a}{9\pi^2}. \tag{16}$$

これらはそれぞれ長さ二乗、長さ二乗、長さの次元を持つので、すべての期待値は長さ二乗となる。

[6] $V_0 x_1 x_2$ による一次補正

一次補正は縮退がある場合、その縮退部分空間で摂動行列を対角化して得る。$\Psi_3, \ldots, \Psi_6$ は同じ無摂動エネルギーを持つが、摂動はスピンに作用しない。よって一重項と三重項の間の行列要素はスピンの直交性でゼロであり、異なる三重項成分どうしもスピン状態の直交性で結ばれない。残る対角要素は

$$\langle \Psi_1 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_1 \rangle = 0, \qquad \langle \Psi_2 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_2 \rangle = 0, \tag{17}$$

$$\langle \Psi_3 | V_0 x_1 x_2 | \Psi_3 \rangle = V_0 C^2, \qquad \langle \Psi_j | V_0 x_1 x_2 | \Psi_j \rangle = -V_0 C^2 \quad (j = 4, 5, 6). \tag{18}$$

例えば Φ_+ の期待値では、対角軌道項がパリティでゼロになり、二つの交差項から C^2 が残る。反対称軌道 Φ_- では同じ交差項に負号が付く。したがって一次までのエネルギーは

$$E_1^{(1)} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m a^2}, \qquad E_2^{(1)} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{m a^2}, \tag{19}$$

$$E_3^{(1)} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} + V_0 C^2, \qquad E_j^{(1)} = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2 m a^2} - V_0 C^2 \quad (j = 4, 5, 6). \tag{20}$$

補正の次元は $[V_0] a^2$ でエネルギーとなり、$V_0 \to 0$ で [4] の結果へ戻る。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

長さ a の棒 N 本をそれぞれ右または左に向ける。右向きを正とし、右向きの本数を n^+、左向きの本数を n^- とすると

$$n^+ + n^- = N, \qquad n = n^+ - n^-, \qquad X = an. \tag{1}$$

従って n は $-N, -N+2, \ldots, N$ の値をとる。棒の向きを一本ずつ足し合わせた終点が X である。

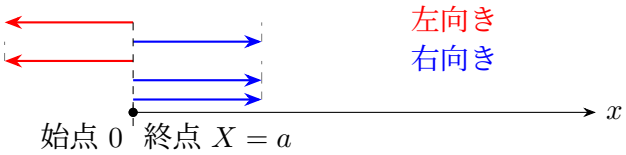


図 1: 右向き 3 本、左向き 2 本の変位を順に足した例。縦方向に並べた各矢印は、左右いずれかの変位 $\pm a$ を表す。

[1] 終点の確率とエントロピー

向きの列は各棒に二通りあるため、全微視状態数は 2^N である。終点が $X = na$ になるには

$$n^+ = \frac{N+n}{2}, \qquad n^- = \frac{N-n}{2} \tag{2}$$

でなければならず、$N-n$ が偶数である。該当する列の数は、N 個の場所から右向きの n^+ 個を選ぶ組合せ数

$$\Omega(n) = \frac{N!}{n^+!n^-!} \tag{3}$$

なので

$$P(n) = \frac{\Omega(n)}{2^N} = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{[(N+n)/2]![(N-n)/2]!}. \tag{4}$$

これは二項分布の全確率であり、許される n について $\sum_n P(n) = 1$ となる。

終点を固定した分子のエントロピーはボルツマンの式 $S = k_B \ln \Omega$ である。Stirling 近似を $n^+, n^- \gg 1$ で使うと

$$S \simeq k_B\{N\ln N - n^+\ln n^+ - n^-\ln n^-\} \tag{5}$$

$$= k_B\left\{N\ln N - \frac{N+n}{2}\ln\frac{N+n}{2} - \frac{N-n}{2}\ln\frac{N-n}{2}\right\}. \tag{6}$$

全列数 2^N は全ての終点を合わせた状態数であり、固定した終点のエントロピーにはその終点を実現する組合せ数 $\Omega(n)$ を使う。

[2] 伸長に必要な力

各微視状態のエネルギーが同じなので、固定された X でのヘルムホルツ自由エネルギーは定数から $F = -TS$ である。$n^{\pm} = (N \pm X/a)/2$ を用いてエントロピーを X で微分すると

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_T = \frac{k_B}{2a} \ln \frac{n^-}{n^+}. \tag{7}$$

従って問題の定義による張力は

$$\boxed{\tau = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_T = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{n^+}{n^-} = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{Na + X}{Na - X}}. \tag{8}$$

$0 < X < Na$ では $\tau > 0$ であり、分子を伸ばした状態を保つには右向きに引く必要がある。$X \ll Na$ では $\ln[(1+y)/(1-y)] = 2y + O(y^3)$ より

$$\boxed{\tau = \frac{k_B T}{a^2 N} X + O\left(\frac{k_B T X^3}{a^4 N^3}\right)}. \tag{9}$$

小伸長では有効ばね定数 $k_B T/(Na^2)$ に比例する復元応答となる。

[3] 外場中の分配関数と平均値

右向きと左向きの棒のエネルギーはそれぞれ $-\kappa, +\kappa$ である。一本の分配関数は $e^{\beta\kappa} + e^{-\beta\kappa} = 2\cosh(\beta\kappa)$ なので、独立な N 本について

$$Z(\beta) = (2\cosh \beta\kappa)^N, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{10}$$

平均エネルギーは $-\partial_\beta \ln Z$ から

$$\langle E \rangle = -N\kappa \tanh(\beta\kappa). \tag{11}$$

また各棒のエネルギーと変位には $E_i = -(\kappa/a)\Delta X_i$ の関係があるため、$\kappa \neq 0$ では $\langle X \rangle = -(a/\kappa)\langle E \rangle$ であり、直接数えても同じく

$$\langle X \rangle = Na \tanh(\beta\kappa) \tag{12}$$

となる。$|\kappa| \ll k_B T$ で $\tanh y = y + O(y^3)$ を使うと

$$\langle E \rangle = -\frac{N\kappa^2}{k_B T} + O\left(\frac{N\kappa^4}{(k_B T)^3}\right), \qquad \langle X \rangle = \frac{Na\kappa}{k_B T} + O\left(\frac{Na\kappa^3}{(k_B T)^3}\right). \tag{13}$$

$\kappa = 0$ でも両者の極限はゼロである。

[4] ゆらぎ

正準分布では $\partial_\beta^2 \ln Z = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ なので

$$\boxed{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = N\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa)}. \tag{14}$$

一本の棒の変位 ΔX_i は $\pm a$ を取り、平均は $a\tanh(\beta\kappa)$、二乗平均は a^2 である。従って

$$\mathrm{Var}(\Delta X_i) = a^2 - a^2 \tanh^2(\beta\kappa) = a^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa). \tag{15}$$

各棒は独立なので、終点の分散は N 本の分散を足して

$$\boxed{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = Na^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa)}. \tag{16}$$

両分散は非負で、$\kappa = 0$ ではエネルギー分散は 0、終点の分散は Na^2 である。固定した $\kappa \neq 0$ に対して $T \to 0$ とすると、両分散はゼロに近づく。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 磁場中の束縛電子

電子の電荷は $-e$ であるから、電場とローレンツ力を含む運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{u}} = -e(\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} + \dot{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}) - m\omega_0^2 \boldsymbol{u}. \tag{1}$$

時間因子 $e^{-i\omega t}$ を取り出すと $\dot{\boldsymbol{u}} = -i\omega \boldsymbol{u}$、$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\omega^2 \boldsymbol{u}$ であり、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}} = B\boldsymbol{e}_z$ より

$$m(\omega^2 - \omega_0^2)u_x + ie\omega B u_y = eE_x, \tag{2}$$

$$-ie\omega B u_x + m(\omega^2 - \omega_0^2)u_y = eE_y. \tag{3}$$

$D = m(\omega^2 - \omega_0^2)$、$\Omega = e\omega B$ とおくと

$$\begin{pmatrix} D & i\Omega \\ -i\Omega & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

行列式は $D^2 - \Omega^2$ だから、その逆行列を用いて

$$\boxed{u_x = \frac{e(DE_x - i\Omega E_y)}{D^2 - \Omega^2}, \qquad u_y = \frac{e(i\Omega E_x + DE_y)}{D^2 - \Omega^2}}. \tag{5}$$

[2] 複素比誘電率

分極は $\boldsymbol{P} = -ne\boldsymbol{u}$ である。$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}}$ と比較すると

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{ne^2 D}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)}, \qquad \gamma = \frac{ne^2\Omega}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)} = \frac{ne^3\omega B}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 D}. \tag{7}$$

最後の式は z 方向の運動方程式 $Du_z = eE_z$ から得る。条件 $\omega_0 \gg \omega > 0$、$\omega_0 \gg eB/m$ では $D < 0$ かつ $|D| > \Omega$ であり、よって

$$D^2 - \Omega^2 > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \varepsilon_{xx} > 1. \tag{8}$$

ここでは ε_{xx} と γ が実数となる近似範囲を考えている。

[3] 平面波の波動方程式

式 (3) の第 1 式を $\boldsymbol{k}$ と外積し、第 2 式で $\boldsymbol{H}_0$ を消去すると

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) = -\mu_0\varepsilon_0\omega^2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}_0. \tag{9}$$

ベクトル恒等式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ を使い、$c^{-2} = \mu_0\varepsilon_0$ とすれば

$$\boxed{(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k} - |\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}_0 = 0}. \tag{10}$$

[4] 固有モード

$\boldsymbol{k} = k_z \boldsymbol{e}_z$ とする。x, y 成分は

$$\begin{pmatrix} (\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2 & i(\omega/c)^2\gamma \\ -i(\omega/c)^2\gamma & (\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{pmatrix} = 0. \tag{11}$$

非零の解には行列式がゼロであることが必要だから

$$\left[(\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2\right]^2 - \left[(\omega/c)^2\gamma\right]^2 = 0. \tag{12}$$

$0 < \gamma < \varepsilon_{xx}$ より二つの正の波数は

$$\boxed{k_\pm = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm \gamma}}, \qquad k_+ > k_- > 0. \tag{13}$$

$k_z = k_+$ のとき x 成分の式から $E_{0,y} = -iE_{0,x}$、$k_z = k_-$ では $E_{0,y} = iE_{0,x}$ となる。$|\boldsymbol{E}_{0\pm}| = E$ で規格化すると

$$\boxed{\boldsymbol{E}_{0+} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_{0-} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}}. \tag{14}$$

z 成分の式は $(\omega/c)^2\varepsilon_{zz}E_{0,z} = 0$ を与える。この振動子モデルの条件では $\varepsilon_{zz} > 0$ なので $E_{0,z} = 0$ である。

[5] 円偏光モードの時間変化

正の波数側モードについて

$$\boldsymbol{E}_+(z,t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_+ z - i\omega t} \tag{15}$$

である。$z = 0$ で実部を取れば

$$\Re E_{+,x}(0,t) = \frac{E}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \qquad \Re E_{+,y}(0,t) = -\frac{E}{\sqrt{2}}\sin\omega t. \tag{16}$$

二成分は同じ振幅で位相が $\pi/2$ ずれているので、合成電場の先端は円を描く。

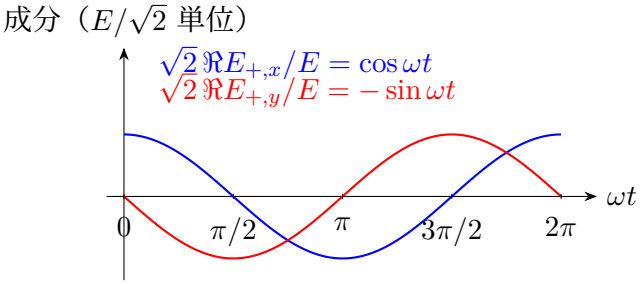


図 1: 二つの直交成分の位相差。

[6] 媒質を通過した偏光面

境界で x 偏光になるよう、二つの固有モードを等しい振幅で重ねる。

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \frac{\boldsymbol{E}_{0+}}{\sqrt{2}} e^{ik_+ z - i\omega t} + \frac{\boldsymbol{E}_{0-}}{\sqrt{2}} e^{ik_- z - i\omega t}. \tag{17}$$

$z=0$ では $\boldsymbol{E}_{0+}+\boldsymbol{E}_{0-} = \sqrt{2}(E,0,0)^{\mathsf{T}}$ なので条件 (5) を満たす。$\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$、$\delta = (k_+ - k_-)z/2$ と置くと、複素振幅は

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E \begin{pmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\bar{k}z - i\omega t}. \tag{18}$$

従って $z = l$ では

$$\boxed{\boldsymbol{F} = E \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta = \frac{(k_+ - k_-)l}{2}}. \tag{19}$$

実電場は共通の伝搬位相を持つ直線偏光で、その振動方向が x 軸から θ 回転している。

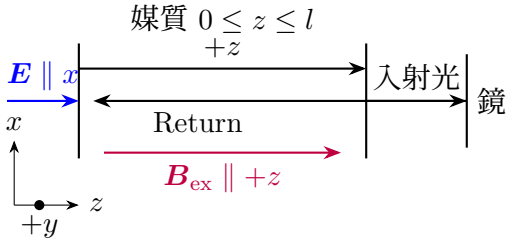


図 2: 磁場の向きを保ったまま鏡で戻す往復伝搬。媒質内の偏光面の回転角は θ である。

[7] 鏡による往復

鏡は偏光を反射するが、外部磁場 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}$ は反転しない。[4] の固有方程式は k_z^2 で決まるため、戻り光では同じ固定 x, y 座標の固有ベクトル $\boldsymbol{E}_{0\pm}$ に、それぞれ $k_z = -k_\pm$ を対応させる。鏡の反射係数を両成分に共通な r とすると、$z = l$ から $z = 0$ へ戻る各成分にも $e^{i(-k_\pm)(0-l)} = e^{ik_\pm l}$ の位相が加わる。従って戻った電場は

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ret}}(0,t) = \frac{r}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{E}_{0+} e^{2ik_+ l} + \boldsymbol{E}_{0-} e^{2ik_- l} \right) e^{-i\omega t} = rE \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{2i\bar{k}l - i\omega t}. \tag{20}$$

このように往路と復路の相対位相差が加算され、x 軸に対する最終角は

$$\boxed{\theta_{\mathrm{round}} = 2\theta = (k_+ - k_-)l}. \tag{21}$$

これは媒質表面での反射を無視し、鏡の反射自体が偏光面の向きを変えないという問題の設定による。鏡までの真空中の往復位相も両成分に共通なので、回転角には影響しない。

物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1] 電子線の加速電圧

相対論的補正を無視すると電子の運動量は $p = \sqrt{2meV}$ であり、ド・ブロイ関係 $p = h/\lambda$ より

$$V = \frac{h^2}{2me\lambda^2}. \tag{1}$$

$\lambda = 0.01\,\mathrm{nm} = 1.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}$ を代入すると

$$V = \frac{(6.6 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s})^2}{2(9.1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg})(1.6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})(1.0 \times 10^{-11}\,\mathrm{m})^2} = 1.5 \times 10^4\,\mathrm{V}. \tag{2}$$

[2] 有限正方格子の散乱振幅

左下の格子点を原点に取ると、原子位置は $\boldsymbol{r}_{n_x,n_y} = (an_x, an_y, 0)$ である。従って振幅は二つの有限和に分離する。

$$A(\boldsymbol{K}, N_x, N_y) = f \sum_{n_x=0}^{N_x-1} e^{-iaK_x n_x} \sum_{n_y=0}^{N_y-1} e^{-iaK_y n_y} \tag{3}$$

$$= fL(K_x, N_x)L(K_y, N_y), \tag{4}$$

$$L(K, N) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-iaKn} = e^{-iaK(N-1)/2} \frac{\sin(NaK/2)}{\sin(aK/2)}. \tag{5}$$

分母がゼロとなる点では極限を取る。したがって

$$|L(K, N)|^2 = \left[\frac{\sin(NaK/2)}{\sin(aK/2)}\right]^2, \tag{6}$$

また $N = 1, 2, 3$ ではそれぞれ 1、$4\cos^2(aK/2)$、$[1 + 2\cos(aK)]^2$ となる。

[3] 単原子三角格子の回折

図 3 の基本格子ベクトルは

$$\boldsymbol{a}_1 = a\begin{pmatrix}\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{a}_2 = a\begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2\\ 1/2\end{pmatrix}. \tag{7}$$

逆格子は $\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j = 2\pi\delta_{ij}$ で定めるから

$$\boxed{\boldsymbol{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\ 1\end{pmatrix}}. \tag{8}$$

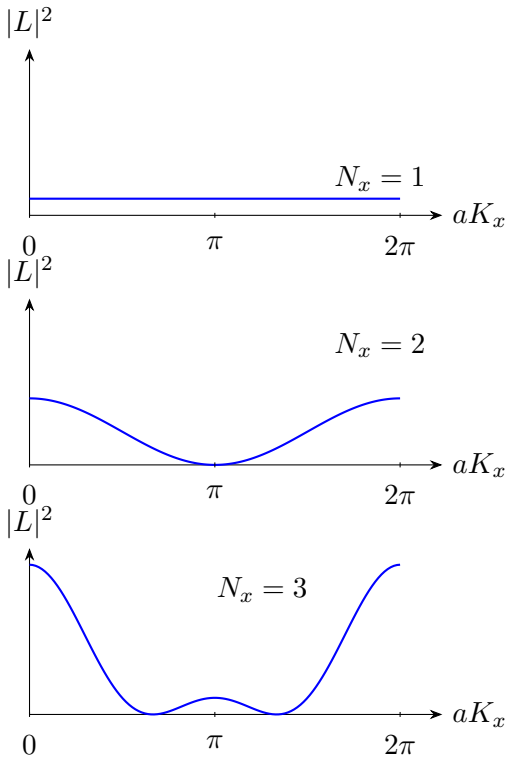


図 1: $|L(K_x, N_x)|^2$ の一周期。各パネルの縦軸は実際の強度である。

面内の原子位置 $\boldsymbol{r} = n_1\boldsymbol{a}_1 + n_2\boldsymbol{a}_2$ を散乱振幅の位相因子 $e^{-i\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{r}}$ に代入すると、二方向の有限等比和が得られる。多数の単位胞で双方の和が強め合う条件は $\boldsymbol{K}_{\parallel}\cdot\boldsymbol{a}_i = 2\pi m_i$（$m_i$ は整数）である。したがって散乱ベクトルの面内成分は逆格子ベクトル $\boldsymbol{G} = m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2$ であり、

$$|\boldsymbol{G}|^2 = \frac{16\pi^2}{3a^2}(m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2). \tag{9}$$

括弧内は $(m_1 - m_2)^2 + 3m_1m_2$ とも書けるので、3 で割った余りは 0 か 1 であり、値 2 は取らない。指数 $(1,0)$、$(1,1)$、$(2,0)$ でそれぞれ $1, 3, 4$ となるため、最小の三つの正の値は $1, 3, 4$ である。垂直入射では $\boldsymbol{k}$ は面に垂直で、$\boldsymbol{G}$ は $\boldsymbol{k}'$ の面内成分なので、回折角 θ（入射・散乱波数ベクトル間の全角）には

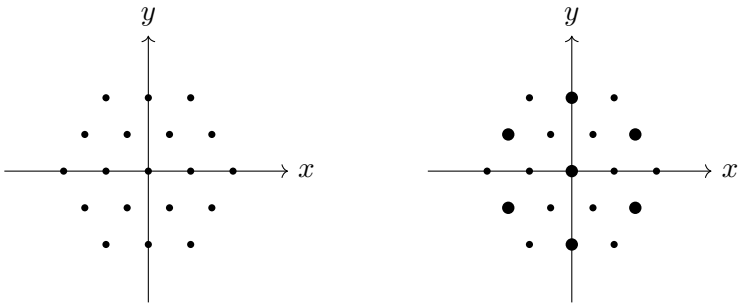
$$|\boldsymbol{G}| = |\boldsymbol{k}'|\sin\theta = k\sin\theta, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{10}$$

が成り立つ。三殻がいずれも前方の検出面に届く条件は、最大の $|\boldsymbol{G}|$ に対して $4\lambda/(\sqrt{3}a) < 1$、すなわち $0 < \lambda/a < \sqrt{3}/4$ である。この範囲で、小さい方から三つの角は

$$\boxed{\theta_1 = \sin^{-1}\!\left(\frac{2\lambda}{\sqrt{3}a}\right), \qquad \theta_2 = \sin^{-1}\!\left(\frac{2\lambda}{a}\right), \qquad \theta_3 = \sin^{-1}\!\left(\frac{4\lambda}{\sqrt{3}a}\right)}. \tag{11}$$

散乱が可能な範囲で各回折角は $0 < \theta < \pi/2$ である。小角度では $\theta_1 \simeq 2\lambda/(\sqrt{3}a)$、$\theta_2 \simeq 2\lambda/a$、$\theta_3 \simeq 4\lambda/(\sqrt{3}a)$ となる。

各逆格子殻には六つの等価なベクトルがあるため、平面ディテクタ上では入射方向を中心とする三つの六回対称なスポット列となる。小角近似では検出面上の半径が θ_j に比例し、その比は $1 : \sqrt{3} : 2$ である。第 1 殻と第 3 殻は x 軸から 60° おきに並び、第 2 殻はそれらから 30° 回転している。



(a) 位置（$\theta_1, \theta_2, \theta_3$）　(b) 基底強度（面積比 1 : 3 : 1）

図 2: 小角近似での三殻の回折位置。(b) は [4] で求めるハニカム基底の相対強度を点の面積で表す。

[4] ハニカム構造の基底干渉

図 4 の二原子基底の相対位置を $\boldsymbol{\tau} = (2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2)/3$ とする。$f_A = f$、$f_B = 2f$ と選べば、逆格子点 $\boldsymbol{G} = m_1\boldsymbol{b}_1 + m_2\boldsymbol{b}_2$ での基底振幅は

$$F_{\mathrm{basis}} = f_A + f_B e^{-i\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{\tau}} = f\left[1 + 2e^{-i(2\pi/3)(2m_1+m_2)}\right]. \tag{12}$$

従って単位胞数による共通因子を除くと

$$I_{\mathrm{basis}} = |F_{\mathrm{basis}}|^2/|f|^2 = 5 + 4\cos\!\left(\frac{2\pi}{3}(2m_1 + m_2)\right). \tag{13}$$

各殻のすべての指数について $t = 2m_1 + m_2$ と置くと、$t^2 \equiv m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2 \pmod 3$ である。したがって第一・第三殻では $t \not\equiv 0 \pmod 3$、第二殻では $t \equiv 0 \pmod 3$ となる。上の余弦は順に $-1/2, 1, -1/2$ であり、各殻のどのピークも強度 $3, 9, 3$ をもつ。その比は

$$\boxed{I_1 : I_2 : I_3 = 1 : 3 : 1}. \tag{14}$$

第二殻のピークは他の二殻より 3 倍強い。

[5] 面直積層による干渉

隣接層の間隔を d、積層数を N_z とする。全ての層で同じ面内原子配置を持ち、散乱ベクトルの垂直成分を $c = K_z$ とすれば、各層の位相差は cd である。振幅には

$$S_{N_z}(c) = \sum_{j=0}^{N_z-1} e^{-icjd} = e^{-icd(N_z-1)/2}\frac{\sin(N_z cd/2)}{\sin(cd/2)} \tag{15}$$

が掛かる。$cd = 2\pi m$（m 整数）では各層が同位相となり、$|S_{N_z}|^2 = N_z^2$ である。この条件の近くの最初の零点は $cd = 2\pi m \pm 2\pi/N_z$ なので、ピーク幅は c について $1/(N_z d)$ の程度になる。一方、層条件からの位相のずれを固定すると

$$\frac{|S_{N_z}(c)|^2}{N_z^2} \le \frac{1}{N_z^2 \sin^2(cd/2)}. \tag{16}$$

従って $N_z|\sin(cd/2)| \gg 1$ なら、強め合うピークに比べて強度が小さい。有限層では、層条件から外れた振幅が一般に厳密にゼロになるわけではない。

垂直入射では $\boldsymbol{k} = (0, 0, k)$ であり、面内回折ベクトルを $\boldsymbol{G}$ とすると、弾性散乱の前方解は

$$\boldsymbol{k}' = (\boldsymbol{G}, \sqrt{k^2 - |\boldsymbol{G}|^2}), \qquad c = k'_z - k = \sqrt{k^2 - |\boldsymbol{G}|^2} - k. \tag{17}$$

非零の $\boldsymbol{G}$ に対するこの c が層条件のピーク幅以上に外れると、層からの散乱は弱め合い、回折ピークが抑えられる。垂直入射でも層条件に近い場合には抑制されないが、問題文の消失は層条件から外れた場合に対応する。

傾斜によって層条件と弾性散乱を両立できる具体例として、$0 < |\boldsymbol{G}| < 2k$ のとき、入射の面内成分を $-\boldsymbol{G}/2$ に取ると

$$\boldsymbol{k} = \left(-\frac{\boldsymbol{G}}{2}, \sqrt{k^2 - \frac{|\boldsymbol{G}|^2}{4}} \right), \qquad \boldsymbol{k}' = \left(\frac{\boldsymbol{G}}{2}, \sqrt{k^2 - \frac{|\boldsymbol{G}|^2}{4}} \right). \tag{18}$$

両波数の大きさは k で、$\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = (\boldsymbol{G}, 0)$ となる。従って $c = 0$、すなわち $m = 0$ の層条件が満たされ、全層が強め合う。面直方向からの入射の傾斜角は

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{|\boldsymbol{G}|}{2k} \right) \simeq \frac{|\boldsymbol{G}|}{2k} \qquad (|\boldsymbol{G}|/k \ll 1) \tag{19}$$

であるため、小角回折の領域では小さな傾斜でピークが現れる。これは選んだ $\boldsymbol{G}$ に対応する方位と角度の構成である。