物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 磁場中の束縛電子

電子の電荷は $-e$ であるから、電場とローレンツ力を含む運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{u}} = -e(\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}} + \dot{\boldsymbol{u}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}) - m\omega_0^2 \boldsymbol{u}. \tag{1}$$

時間因子 $e^{-i\omega t}$ を取り出すと $\dot{\boldsymbol{u}} = -i\omega \boldsymbol{u}$、$\ddot{\boldsymbol{u}} = -\omega^2 \boldsymbol{u}$ であり、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}} = B\boldsymbol{e}_z$ より

$$m(\omega^2 - \omega_0^2)u_x + ie\omega B u_y = eE_x, \tag{2}$$

$$-ie\omega B u_x + m(\omega^2 - \omega_0^2)u_y = eE_y. \tag{3}$$

$D = m(\omega^2 - \omega_0^2)$、$\Omega = e\omega B$ とおくと

$$\begin{pmatrix} D & i\Omega \\ -i\Omega & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = e \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

行列式は $D^2 - \Omega^2$ だから、その逆行列を用いて

$$\boxed{u_x = \frac{e(DE_x - i\Omega E_y)}{D^2 - \Omega^2}, \qquad u_y = \frac{e(i\Omega E_x + DE_y)}{D^2 - \Omega^2}}. \tag{5}$$

[2] 複素比誘電率

分極は $\boldsymbol{P} = -ne\boldsymbol{u}$ である。$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{I})\boldsymbol{E}_{\mathrm{ex}}$ と比較すると

$$\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{ne^2 D}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)}, \qquad \gamma = \frac{ne^2\Omega}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)} = \frac{ne^3\omega B}{\varepsilon_0(D^2 - \Omega^2)}, \tag{6}$$

$$\varepsilon_{zz} = 1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 D}. \tag{7}$$

最後の式は z 方向の運動方程式 $Du_z = eE_z$ から得る。条件 $\omega_0 \gg \omega > 0$、$\omega_0 \gg eB/m$ では $D < 0$ かつ $|D| > \Omega$ であり、よって

$$D^2 - \Omega^2 > 0, \qquad \gamma > 0, \qquad \varepsilon_{xx} > 1. \tag{8}$$

ここでは ε_{xx} と γ が実数となる近似範囲を考えている。

[3] 平面波の波動方程式

式 (3) の第 1 式を $\boldsymbol{k}$ と外積し、第 2 式で $\boldsymbol{H}_0$ を消去すると

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0) = -\mu_0\varepsilon_0\omega^2\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}_0. \tag{9}$$

ベクトル恒等式 $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$ を使い、$c^{-2} = \mu_0\varepsilon_0$ とすれば

$$\boxed{(\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k})\boldsymbol{k} - |\boldsymbol{k}|^2\boldsymbol{E}_0 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\boldsymbol{E}_0 = 0}. \tag{10}$$

[4] 固有モード

$\boldsymbol{k} = k_z \boldsymbol{e}_z$ とする。x, y 成分は

$$\begin{pmatrix} (\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2 & i(\omega/c)^2\gamma \\ -i(\omega/c)^2\gamma & (\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{0,x} \\ E_{0,y} \end{pmatrix} = 0. \tag{11}$$

非零の解には行列式がゼロであることが必要だから

$$\left[(\omega/c)^2\varepsilon_{xx} - k_z^2\right]^2 - \left[(\omega/c)^2\gamma\right]^2 = 0. \tag{12}$$

$0 < \gamma < \varepsilon_{xx}$ より二つの正の波数は

$$\boxed{k_\pm = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_{xx} \pm \gamma}}, \qquad k_+ > k_- > 0. \tag{13}$$

$k_z = k_+$ のとき x 成分の式から $E_{0,y} = -iE_{0,x}$、$k_z = k_-$ では $E_{0,y} = iE_{0,x}$ となる。$|\boldsymbol{E}_{0\pm}| = E$ で規格化すると

$$\boxed{\boldsymbol{E}_{0+} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E}_{0-} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}}. \tag{14}$$

z 成分の式は $(\omega/c)^2\varepsilon_{zz}E_{0,z} = 0$ を与える。この振動子モデルの条件では $\varepsilon_{zz} > 0$ なので $E_{0,z} = 0$ である。

[5] 円偏光モードの時間変化

正の波数側モードについて

$$\boldsymbol{E}_+(z,t) = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_+ z - i\omega t} \tag{15}$$

である。$z = 0$ で実部を取れば

$$\Re E_{+,x}(0,t) = \frac{E}{\sqrt{2}}\cos\omega t, \qquad \Re E_{+,y}(0,t) = -\frac{E}{\sqrt{2}}\sin\omega t. \tag{16}$$

二成分は同じ振幅で位相が $\pi/2$ ずれているので、合成電場の先端は円を描く。

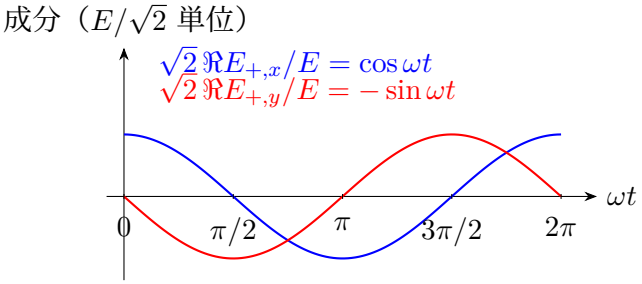


図 1: 二つの直交成分の位相差。

[6] 媒質を通過した偏光面

境界で x 偏光になるよう、二つの固有モードを等しい振幅で重ねる。

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \frac{\boldsymbol{E}_{0+}}{\sqrt{2}} e^{ik_+ z - i\omega t} + \frac{\boldsymbol{E}_{0-}}{\sqrt{2}} e^{ik_- z - i\omega t}. \tag{17}$$

$z=0$ では $\boldsymbol{E}_{0+}+\boldsymbol{E}_{0-} = \sqrt{2}(E,0,0)^{\mathsf{T}}$ なので条件 (5) を満たす。$\bar{k} = (k_+ + k_-)/2$、$\delta = (k_+ - k_-)z/2$ と置くと、複素振幅は

$$\boldsymbol{E}(z,t) = E \begin{pmatrix} \cos\delta \\ \sin\delta \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\bar{k}z - i\omega t}. \tag{18}$$

従って $z = l$ では

$$\boxed{\boldsymbol{F} = E \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta = \frac{(k_+ - k_-)l}{2}}. \tag{19}$$

実電場は共通の伝搬位相を持つ直線偏光で、その振動方向が x 軸から θ 回転している。

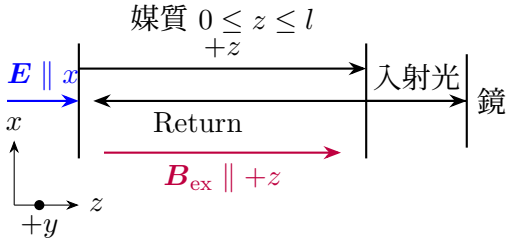


図 2: 磁場の向きを保ったまま鏡で戻す往復伝搬。媒質内の偏光面の回転角は θ である。

[7] 鏡による往復

鏡は偏光を反射するが、外部磁場 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{ex}}$ は反転しない。[4] の固有方程式は k_z^2 で決まるため、戻り光では同じ固定 x, y 座標の固有ベクトル $\boldsymbol{E}_{0\pm}$ に、それぞれ $k_z = -k_\pm$ を対応させる。鏡の反射係数を両成分に共通な r とすると、$z = l$ から $z = 0$ へ戻る各成分にも $e^{i(-k_\pm)(0-l)} = e^{ik_\pm l}$ の位相が加わる。従って戻った電場は

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ret}}(0,t) = \frac{r}{\sqrt{2}} \left(\boldsymbol{E}_{0+} e^{2ik_+ l} + \boldsymbol{E}_{0-} e^{2ik_- l} \right) e^{-i\omega t} = rE \begin{pmatrix} \cos 2\theta \\ \sin 2\theta \\ 0 \end{pmatrix} e^{2i\bar{k}l - i\omega t}. \tag{20}$$

このように往路と復路の相対位相差が加算され、x 軸に対する最終角は

$$\boxed{\theta_{\mathrm{round}} = 2\theta = (k_+ - k_-)l}. \tag{21}$$

これは媒質表面での反射を無視し、鏡の反射自体が偏光面の向きを変えないという問題の設定による。鏡までの真空中の往復位相も両成分に共通なので、回転角には影響しない。