物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

長さ a の棒 N 本をそれぞれ右または左に向ける。右向きを正とし、右向きの本数を n^+、左向きの本数を n^- とすると

$$n^+ + n^- = N, \qquad n = n^+ - n^-, \qquad X = an. \tag{1}$$

従って n は $-N, -N+2, \ldots, N$ の値をとる。棒の向きを一本ずつ足し合わせた終点が X である。

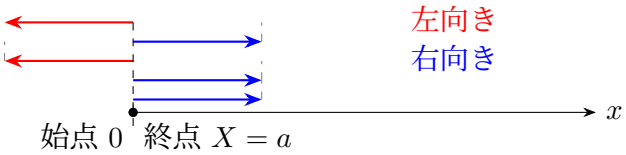


図 1: 右向き 3 本、左向き 2 本の変位を順に足した例。縦方向に並べた各矢印は、左右いずれかの変位 $\pm a$ を表す。

[1] 終点の確率とエントロピー

向きの列は各棒に二通りあるため、全微視状態数は 2^N である。終点が $X = na$ になるには

$$n^+ = \frac{N+n}{2}, \qquad n^- = \frac{N-n}{2} \tag{2}$$

でなければならず、$N-n$ が偶数である。該当する列の数は、N 個の場所から右向きの n^+ 個を選ぶ組合せ数

$$\Omega(n) = \frac{N!}{n^+!n^-!} \tag{3}$$

なので

$$P(n) = \frac{\Omega(n)}{2^N} = \frac{1}{2^N}\frac{N!}{[(N+n)/2]![(N-n)/2]!}. \tag{4}$$

これは二項分布の全確率であり、許される n について $\sum_n P(n) = 1$ となる。

終点を固定した分子のエントロピーはボルツマンの式 $S = k_B \ln \Omega$ である。Stirling 近似を $n^+, n^- \gg 1$ で使うと

$$S \simeq k_B\{N\ln N - n^+\ln n^+ - n^-\ln n^-\} \tag{5}$$

$$= k_B\left\{N\ln N - \frac{N+n}{2}\ln\frac{N+n}{2} - \frac{N-n}{2}\ln\frac{N-n}{2}\right\}. \tag{6}$$

全列数 2^N は全ての終点を合わせた状態数であり、固定した終点のエントロピーにはその終点を実現する組合せ数 $\Omega(n)$ を使う。

[2] 伸長に必要な力

各微視状態のエネルギーが同じなので、固定された X でのヘルムホルツ自由エネルギーは定数から $F = -TS$ である。$n^{\pm} = (N \pm X/a)/2$ を用いてエントロピーを X で微分すると

$$\left(\frac{\partial S}{\partial X}\right)_T = \frac{k_B}{2a} \ln \frac{n^-}{n^+}. \tag{7}$$

従って問題の定義による張力は

$$\boxed{\tau = \left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)_T = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{n^+}{n^-} = \frac{k_B T}{2a} \ln \frac{Na + X}{Na - X}}. \tag{8}$$

$0 < X < Na$ では $\tau > 0$ であり、分子を伸ばした状態を保つには右向きに引く必要がある。$X \ll Na$ では $\ln[(1+y)/(1-y)] = 2y + O(y^3)$ より

$$\boxed{\tau = \frac{k_B T}{a^2 N} X + O\left(\frac{k_B T X^3}{a^4 N^3}\right)}. \tag{9}$$

小伸長では有効ばね定数 $k_B T/(Na^2)$ に比例する復元応答となる。

[3] 外場中の分配関数と平均値

右向きと左向きの棒のエネルギーはそれぞれ $-\kappa, +\kappa$ である。一本の分配関数は $e^{\beta\kappa} + e^{-\beta\kappa} = 2\cosh(\beta\kappa)$ なので、独立な N 本について

$$Z(\beta) = (2\cosh \beta\kappa)^N, \qquad \beta = \frac{1}{k_B T}. \tag{10}$$

平均エネルギーは $-\partial_\beta \ln Z$ から

$$\langle E \rangle = -N\kappa \tanh(\beta\kappa). \tag{11}$$

また各棒のエネルギーと変位には $E_i = -(\kappa/a)\Delta X_i$ の関係があるため、$\kappa \neq 0$ では $\langle X \rangle = -(a/\kappa)\langle E \rangle$ であり、直接数えても同じく

$$\langle X \rangle = Na \tanh(\beta\kappa) \tag{12}$$

となる。$|\kappa| \ll k_B T$ で $\tanh y = y + O(y^3)$ を使うと

$$\langle E \rangle = -\frac{N\kappa^2}{k_B T} + O\left(\frac{N\kappa^4}{(k_B T)^3}\right), \qquad \langle X \rangle = \frac{Na\kappa}{k_B T} + O\left(\frac{Na\kappa^3}{(k_B T)^3}\right). \tag{13}$$

$\kappa = 0$ でも両者の極限はゼロである。

[4] ゆらぎ

正準分布では $\partial_\beta^2 \ln Z = \langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$ なので

$$\boxed{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = N\kappa^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa)}. \tag{14}$$

一本の棒の変位 ΔX_i は $\pm a$ を取り、平均は $a\tanh(\beta\kappa)$、二乗平均は a^2 である。従って

$$\mathrm{Var}(\Delta X_i) = a^2 - a^2 \tanh^2(\beta\kappa) = a^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa). \tag{15}$$

各棒は独立なので、終点の分散は N 本の分散を足して

$$\boxed{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2 = Na^2 \operatorname{sech}^2(\beta\kappa)}. \tag{16}$$

両分散は非負で、$\kappa = 0$ ではエネルギー分散は 0、終点の分散は Na^2 である。固定した $\kappa \neq 0$ に対して $T \to 0$ とすると、両分散はゼロに近づく。