物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 二点電荷のポテンシャル

ポテンシャルの重ね合わせから

$$\boxed{\phi(P) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right)}. \tag{1}$$

[2] 遠方での双極子ポテンシャル

$\boldsymbol{p}$ の向きを極軸に取ると、正負電荷の位置はそれぞれ $+\boldsymbol{d}/2$、$-\boldsymbol{d}/2$ であり、

$$r_\pm = \sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} \mp rd\cos\theta}. \tag{2}$$

d/r の一次まで二項展開すると

$$\frac{1}{r_+} = \frac{1}{r} + \frac{d\cos\theta}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^3}\right), \qquad \frac{1}{r_-} = \frac{1}{r} - \frac{d\cos\theta}{2r^2} + O\left(\frac{d^2}{r^3}\right). \tag{3}$$

単極子項は差を取ると消える。$p = qd$ より

$$\boxed{\phi(r,\theta) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \qquad (r \gg d). \tag{4}$$

[3] 双極子電場

軸対称な球座標で $\nabla\phi = \boldsymbol{e}_r\partial_r\phi + (\boldsymbol{e}_\theta/r)\partial_\theta\phi$ だから

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right). \tag{5}$$

これは問題文に示された電場の式である。

$$\boxed{\boldsymbol{E}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left(2\cos\theta\,\boldsymbol{e}_r + \sin\theta\,\boldsymbol{e}_\theta\right)}. \tag{6}$$

[4] 双極子 2 の回転方向

位置 1 から 2 への方向を x 軸とすると、双極子 1 が位置 2 につくる電場は

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{p_1}{4\pi\varepsilon_0 l^3}(2\cos\theta_1\,\boldsymbol{e}_x - \sin\theta_1\,\boldsymbol{e}_y). \tag{7}$$

(a) では $\theta_1 = \pi/2$ なので $\boldsymbol{E}_1$ は $-y$ 方向、$\boldsymbol{p}_2$ は $+x$ 方向である。トルク $\boldsymbol{\tau}_2 = \boldsymbol{p}_2 \times \boldsymbol{E}_1$ は紙面の裏向きとなるから、紙面を正面から見て時計回りに回り始める。(b) では $\boldsymbol{p}_2$ も $-y$ 方向で $\boldsymbol{E}_1$ と平行なのでトルクはゼロであり、回転しない。

[5] 二つの双極子の相互作用エネルギー

$U = -\boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1$ に上の電場と $\boldsymbol{p}_2 = p_2(\cos\theta_2 \boldsymbol{e}_x + \sin\theta_2 \boldsymbol{e}_y)$ を代入すると

$$U = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 l^3}(2\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) \tag{8}$$

$$= -\frac{p_1 p_2}{8\pi\varepsilon_0 l^3}[3\cos(\theta_1+\theta_2) + \cos(\theta_1-\theta_2)]. \tag{9}$$

[6] 安定な相対配置

$u = \theta_1 + \theta_2$、$v = \theta_1 - \theta_2$ は独立に変えられる角度である。エネルギーを最小にするには $\cos u = \cos v = 1$ が必要で、

$$\theta_1 + \theta_2 = 2m\pi, \qquad \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi \qquad (m, n \in \mathbb{Z}). \tag{10}$$

したがって角度を 2π を法として表すと、安定配置は $(\theta_1, \theta_2) = (0, 0)$ および (π, π) であり、いずれも

$$\boxed{U_{\min} = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\varepsilon_0 l^3}}. \tag{11}$$

[7] 接地導体面と双極子のエネルギー

図 3 の実双極子の法線成分は $p\cos\alpha$、面に平行な成分は $-p\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_y$ である。双極子を $-q$ から $+q$ へ向かう微小な電荷対とみなす。接地面の鏡像では各電荷を $z \mapsto -z$ で反射し、電荷の符号も反転する。像の $-q$ から $+q$ への変位をたどると、法線成分は元の向きのまま、面に平行な成分は反転する。実双極子と像双極子の距離は $2h$ である。像双極子が実双極子の位置に

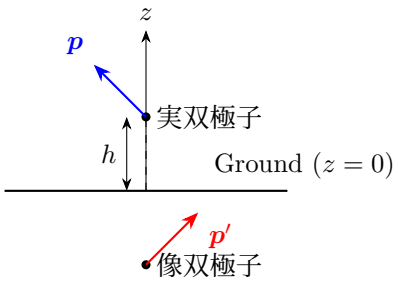


図 1: 導体面に対する実双極子と鏡像双極子。接線成分は反転し、法線成分は同じ向きである。

つくる電場は

$$\boldsymbol{E}_{\rm im} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0(2h)^3}(-p\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_y + 2p\cos\alpha\,\boldsymbol{e}_z). \tag{12}$$

従って両者の相互作用エネルギーは

$$U_{\rm pair} = -\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm im} = -\frac{p^2(1+\cos^2\alpha)}{32\pi\varepsilon_0 h^3}. \tag{13}$$

像は実双極子によって誘起されるので、この相互作用エネルギー全体を系のエネルギーとはしない。h, α を固定して実双極子を $\boldsymbol{p}(s) = s\boldsymbol{p}$（$0 \le s \le 1$）と徐々に立ち上げると、導体の線形応答により像の電場は $\boldsymbol{E}_{\rm im}(s) = s\boldsymbol{E}_{\rm im}$ となる。実双極子を増やす増分仕事のうち導体に由来する分は $dU' = -\boldsymbol{E}_{\rm im}(s)\cdot d\boldsymbol{p}(s) = -s\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm im}\,ds$ である。従って $\int_0^1 s\,ds = 1/2$ から

$$\boxed{U' = \frac{1}{2}U_{\rm pair} = -\frac{p^2(1+\cos^2\alpha)}{64\pi\varepsilon_0 h^3} = -\frac{p^2(3+\cos 2\alpha)}{128\pi\varepsilon_0 h^3}}. \tag{14}$$

これは $h \to \infty$ でゼロとなる。

[8] 最も安定な双極子の向き

U' を最小にするには $\cos^2\alpha = 1$ であればよい。従って

$$\boxed{\alpha = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})} \tag{15}$$

であり、双極子モーメントが導体面の法線に平行または反平行なとき最も安定である。