物理工学専攻院試解答集
2017 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1.1] B が動き出す時刻

C が動き始めてから t 秒後、B が静止している間は右側のばねの伸びが $v_0 t$ である。B を右へ引く力は $kv_0 t$。これが最大静止摩擦力 μmg に達した時に B が動き始めるので

$$kv_0 t_0 = \mu mg, \qquad \boxed{t_0 = \frac{\mu mg}{kv_0}}. \tag{1}$$

[1.2] B の運動方程式

B が動き始めた時刻を $t = 0$ とする。このとき C は初期位置から $v_0 t_0$ だけ進んでおり、その後 t 秒間にさらに $v_0 t$ 進む。A は静止しているため、左のばねは x_B だけ伸び、右のばねは $v_0(t + t_0) - x_B$ だけ伸びる。B は右向きに滑るので動摩擦力は左向きである。よって

$$m\ddot{x}_B = k\{v_0(t + t_0) - x_B\} - kx_B - \frac{2}{3}\mu mg \tag{2}$$

$$= -2kx_B + kv_0 t + \frac{1}{3}\mu mg = -2kx_B + kv_0 t + \frac{1}{3}kv_0 t_0. \tag{3}$$

ここでは $x_B(0) = 0$ に加えて、滑り始める直前まで静止していたことから $\dot{x}_B(0) = 0$ である。

[1.3] B の位置

角振動数 $\omega = \sqrt{2k/m}$ を導入すると

$$\ddot{x}_B + \omega^2 x_B = \frac{kv_0}{m} t + \frac{kv_0 t_0}{3m}. \tag{4}$$

右辺に対する一次式の特解を $x_p = v_0 t/2 + v_0 t_0/6$ とおける。一般解に初期条件を適用すると

$$\boxed{x_B(t) = \frac{v_0 t}{2} + \frac{v_0 t_0}{6} - \frac{v_0 t_0}{6}\cos(\omega t) - \frac{v_0}{2\omega}\sin(\omega t)}. \tag{5}$$

この式は $t = 0$ で $x_B = \dot{x}_B = 0$ を満たす。

[1.4] A が静止を保つ条件

$\omega t_0 \ll 1$ のもとで、解の二つの差をそれぞれ展開する。

$$x_B(t_0) = \frac{v_0}{2}\left(t_0 - \frac{\sin(\omega t_0)}{\omega}\right) + \frac{v_0 t_0}{6}\left[1 - \cos(\omega t_0)\right] \tag{6}$$

$$= \frac{v_0\omega^2 t_0^3}{12} + \frac{v_0\omega^2 t_0^3}{12} + O(v_0\omega^4 t_0^5) \tag{7}$$

$$= \boxed{\frac{v_0\omega^2 t_0^3}{6} = \frac{k v_0 t_0^3}{3m}} + O(v_0\omega^4 t_0^5). \tag{8}$$

このとき A に働くばね力の大きさは

$$k x_B(t_0) \simeq \frac{\mu m g}{6}(\omega t_0)^2 \ll \mu m g, \tag{9}$$

である。従って A を動かすのに必要な力は最大静止摩擦力より小さく、A は静止を保つ。

[2.1] 微小振動の運動方程式と固有振動数

外部ポテンシャルの曲率は

$$U''(x) = k_1\left[-1 + 3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \tag{10}$$

従って中央の B では $U''(0) = -k_1$、両端の A,C では $U''(\pm l) = 2k_1$ である。ばね力と外力を一次まで残すと

$$m\begin{pmatrix}\ddot{q}_A\\ \ddot{q}_B\\ \ddot{q}_C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k_0 - 2k_1 & k_0 & 0\\ k_0 & -2k_0 + k_1 & k_0\\ 0 & k_0 & -k_0 - 2k_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_A\\ q_B\\ q_C\end{pmatrix}. \tag{11}$$

式(11)の右辺の行列を K とおく。これを $(1, 0, -1)^T$ に作用させると

$$K\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -(k_0 + 2k_1)\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}. \tag{12}$$

運動方程式は $m\ddot{\boldsymbol{q}} = K\boldsymbol{q}$ なので、左右反対称モードの角振動数は

$$\boxed{\omega_a^2 = \frac{k_0 + 2k_1}{m}}. \tag{13}$$

対称な変位 (a, b, a) では、力の係数行列 K は (a, b) に対して

$$K_s = \begin{pmatrix}-k_0 - 2k_1 & k_0\\ 2k_0 & -2k_0 + k_1\end{pmatrix} \tag{14}$$

と作用する。K_s の固有値を $-m\omega^2$ と書くと

$$m^2\omega^4 - m(3k_0 + k_1)\omega^2 + (3k_0 k_1 - 2k_1^2) = 0, \tag{15}$$

したがって対称モードの二つの周波数は

$$\boxed{\omega_\pm^2 = \frac{3k_0 + k_1 \pm \sqrt{9k_0^2 - 6k_0 k_1 + 9k_1^2}}{2m}}. \tag{16}$$

ω_- が小さい方の周波数である。三つのモードが正の固有角振動数を持つ安定な微小振動となるのは $0 < k_1 < 3k_0/2$ である。等号の $k_1 = 3k_0/2$ では $\omega_- = 0$ となり、線形化した零モードは $\ddot{q} = 0$ であって振動しない。これを不安定化の臨界点として区別する。

[2.2] 不安定になる基準振動

k_1 を増すと、最初にゼロになるのは対称モードの低周波数 ω_- である。二つの対称モードの積は

$$\omega_-^2\omega_+^2 = \frac{k_1(3k_0 - 2k_1)}{m^2}. \tag{17}$$

従って臨界値では $3k_0 - 2k_c = 0$ となり

$$\boxed{k_c = \frac{3}{2}k_0}. \tag{18}$$

$k_1 > k_c$ では $\omega_-^2 < 0$ となるため、この対称な低周波数モードが不安定である。

[2.3] 不安定化するモードの変位比

$k_1 = 4k_c/9 = 2k_0/3$ では

$$\omega_-^2 = \frac{k_0}{3m}. \tag{19}$$

このとき

$$K_s = k_0 \begin{pmatrix} -7/3 & 1 \\ 2 & -4/3 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

固有値 $-k_0/3 = -m\omega_-^2$ の固有ベクトルは $(a, b) = (1, 2)$ であり、全三質点では $(q_A, q_B, q_C) \propto (1, 2, 1)$ となる。よって

$$\boxed{q_A : q_B : q_C = 1 : 2 : 1}. \tag{21}$$