物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 I 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 単振り子の運動方程式

角度 θ_1 を鉛直下向きから測る。支点まわりの重力のモーメントは $-m_1 g l_1 \sin\theta_1$、慣性モーメントは $m_1 l_1^2$ なので、

$$m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 = -m_1 g l_1 \sin\theta_1, \qquad \ddot{\theta}_1 + \frac{g}{l_1}\sin\theta_1 = 0. \tag{1}$$

小振幅では $\sin\theta_1 \simeq \theta_1$ だから、

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_0^2 \theta_1 = 0, \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l_1}}}. \tag{2}$$

[2] 質量の影響

運動方程式では慣性項と重力による復元項の両方が m_1 に比例するため、質量を約すと固有角周波数には m_1 が残らない。一方、平衡位置で同じ大きさの水平撃力 J を加えると、角運動量の変化から角速度の初期値は $\dot{\theta}_1 = J/(m_1 l_1)$ となる。小振幅での角振幅はこの初期角速度を ω_0 で割った

$$\theta_{\max} \simeq \frac{J}{m_1\sqrt{g l_1}}. \tag{3}$$

したがって同じ撃力なら、質量が大きいほど振幅は小さいが、振動の角周波数は変わらない。

[3] 水平力を受けるときの平衡

第 2 棒の鉛直下向きからの絶対角を $\phi = \theta_1 + \theta_2$ とする。質点の位置は

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} l_1\sin\theta_1 \\ -l_1\cos\theta_1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}_1 + \begin{pmatrix} l_2\sin\phi \\ -l_2\cos\phi \end{pmatrix}. \tag{4}$$

独立な一般化座標を (θ_1, ϕ) とし、θ_1 の仮想変位では ϕ を固定する。仮想変位に対する外力と重力の仕事がゼロとなる条件を用いる。θ_1 の変位は両質点の高さを変え、ϕ の変位は質点 m_2 の位置だけを変えるので、

$$F_x l_1 \cos\theta_1 - (m_1+m_2) g l_1 \sin\theta_1 = 0, \tag{5}$$

$$F_x l_2 \cos\phi - m_2 g l_2 \sin\phi = 0. \tag{6}$$

図 2 のように各棒が鉛直下向きから $-\pi/2$ と $\pi/2$ の間にある平衡枝では、

$$\boxed{\theta_1 = \arctan\frac{F_x}{(m_1+m_2)g}}, \qquad \boxed{\phi = \arctan\frac{F_x}{m_2 g}}, \qquad \boxed{\theta_2 = \phi - \theta_1}. \tag{7}$$

[4] 等質量・等長二重振り子のラグランジアン

以後 $m_1 = m_2 = m$、$l_1 = l_2 = l$、$F_x = 0$ とする。θ_1 は第 1 棒の角度、θ_2 は第 1 棒に対する第 2 棒の相対角であり、$\phi = \theta_1 + \theta_2$ は第 2 棒の絶対角である。位置は

$$\boldsymbol{r}_1 = l\begin{pmatrix}\sin\theta_1\\ -\cos\theta_1\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = l\begin{pmatrix}\sin\theta_1 + \sin\phi\\ -\cos\theta_1 - \cos\phi\end{pmatrix}. \tag{8}$$

時間微分すると、質点 2 の速さの二乗に交差項が生じる。

$$T = \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_1|^2 + \frac{m}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}_2|^2 \tag{9}$$

$$= \frac{ml^2}{2}\left[2\dot\theta_1^2 + \dot\phi^2 + 2\cos\theta_2\,\dot\theta_1\dot\phi\right], \tag{10}$$

$$U = mg(y_1 + y_2) = -mgl\,(2\cos\theta_1 + \cos\phi)\,. \tag{11}$$

よって $L = T - U$ は

$$\boxed{L = \frac{ml^2}{2}\left[2\dot\theta_1^2 + (\dot\theta_1 + \dot\theta_2)^2 + 2\cos\theta_2\,\dot\theta_1(\dot\theta_1 + \dot\theta_2)\right] + mgl\,[2\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 + \theta_2)]\,.} \tag{12}$$

第 2 質点の重力位置エネルギーにも第 1 棒による高さ $-l\cos\theta_1$ が含まれるため、$2\cos\theta_1$ の項が現れる。

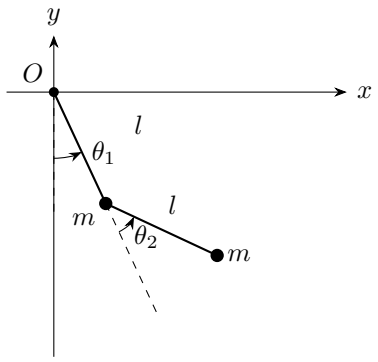


図 1: 等質量・等長二重振り子。θ_2 は第 1 棒から測る相対角である。

[5] 小振幅の運動方程式

小さい θ_1, θ_2 に対して、速度項の $\cos\theta_2$ を 1、ポテンシャルの余弦を 2 次まで展開する。ラグランジアンの定数を除けば

$$L^{(2)} = \frac{ml^2}{2}\begin{pmatrix}\dot\theta_1 & \dot\theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\end{pmatrix} - \frac{mgl}{2}\begin{pmatrix}\theta_1 & \theta_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}. \tag{13}$$

したがって、オイラー・ラグランジュ方程式は

$$\boxed{\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ddot\theta_1\\ \ddot\theta_2\end{pmatrix} + \frac{g}{l}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = \mathbf{0}.} \tag{14}$$

[6] 基準振動

$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{A}e^{i\omega t}$ とおく。$\lambda = \omega^2/(g/l)$ とすると、非自明な振幅ベクトルがある条件は

$$0 = \det\left[\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right] = (3-5\lambda)(1-\lambda) - (1-2\lambda)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 2. \tag{15}$$

よって $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$ であり、正の二つの固有角周波数は

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\sqrt{2\pm\sqrt{2}} = \omega_0\sqrt{2\pm\sqrt{2}}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.} \tag{16}$$

固有値 λ は無次元で、g/l は角周波数の二乗の次元をもつ。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 I 第 2 問

政岡凜太郎

[1] リングを貫く磁束

リングの中心を $(X,0,0)$、面内の中心からの座標を (u,v) とする。円盤上では $x=X+u$、$z=0$ であり、面積要素の法線を $+z$ 向きにとると、

$$\Phi(X) = \int_{u^2+v^2\le a^2} B_0[1+\alpha(X+u)]\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{1}$$

$$= B_0(1+\alpha X)\pi a^2 + B_0\alpha \int_{u^2+v^2\le a^2} u\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{2}$$

$$= \boxed{\pi a^2 B_0(1+\alpha X)}. \tag{3}$$

円盤は $u\mapsto -u$ で対称なので、積分中の奇関数 u の項はゼロである。

[2] 一定速度で運動するときの電流

正の面法線を $+z$ にとると、正の周回方向は反時計回りである。X が速度 $V>0$ で増えるため、$+z$ 向きの磁束が増加する。ファラデーの法則

$$IR = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

の負号は誘導電流が磁束の増加を妨げることを表す。よって符号付き電流は

$$\boxed{I = -\frac{\pi a^2 B_0 \alpha V}{R}}. \tag{5}$$

負号は、実際の電流が図の正方向と逆の時計回りであることを示す。

[3] 一定速度を保つための力

電流が流れるリングに働く磁気力は、周回方向の電流要素と磁場とのローレンツ力から求まる。円周上の角度を ϑ とすると、正の周回方向の電流要素は $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a(-\sin\vartheta,\cos\vartheta,0)\,\mathrm{d}\vartheta$ である。リング上では $z=0$、$x=X+a\cos\vartheta$ なので、$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ より

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{mag},x} = IaB_0\cos\vartheta[1+\alpha(X+a\cos\vartheta)]\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{6}$$

$$F_{\mathrm{mag},x} = IaB_0\int_0^{2\pi}[(1+\alpha X)\cos\vartheta + \alpha a\cos^2\vartheta]\,\mathrm{d}\vartheta = I\pi a^2 B_0\alpha. \tag{7}$$

ここで B_z の一様部分の寄与は一周積分で相殺し、x に比例する部分だけが残る。したがって一定速度では、加えた外力がこの磁気抵抗力とつり合う。外力の大きさは

$$\boxed{F = \frac{(\pi a^2 B_0\alpha)^2}{R}V}. \tag{8}$$

この結果は電力でも確認できる。外力の仕事率 FV は RI^2 に等しい。

[4] 時間変化する磁場と運動方程式

磁束は

$$\Phi(X,t) = \pi a^2 B_0 b(t)(1+\alpha X) \tag{9}$$

である。正の電流を反時計回りとする規約を保つと、起電力と電流は

$$IR = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\pi a^2 B_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]. \tag{10}$$

角度 ϑ の電流要素を $\mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = a(-\sin\vartheta, \cos\vartheta, 0)\,\mathrm{d}\vartheta$ とすると、$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = I\,\mathrm{d}\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{B}$ である。$x = X + a\cos\vartheta$ を代入して一周積分すると、x 成分は

$$F_{\mathrm{mag},x} = I\pi a^2 B_0 \alpha b(t), \tag{11}$$

となる。運動方程式 $m\ddot{X} = F_{\mathrm{mag},x}$ に式(10)を代入すると

$$m\ddot{X} = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2 \alpha}{R} b(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]. \tag{12}$$

したがって問題文の形では

$$\boxed{\alpha\ddot{X} = -\lambda b(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[b(t)(1+\alpha X)]}, \qquad \boxed{\lambda = \frac{(\pi a^2 B_0 \alpha)^2}{mR}}. \tag{13}$$

λ の次元は時間の逆数である。

[5] べき級数の初期係数

$0 \le t < \tau$ では $b(t) = t/\tau$ だから、運動方程式は

$$\alpha\ddot{X} = -\frac{\lambda t}{\tau^2}\left(1 + \alpha X + \alpha t\dot{X}\right). \tag{14}$$

初期条件 $X(0) = 0$、$\dot{X}(0) = 0$ を $X = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ に適用すると、$a_0 = a_1 = 0$ である。式(14)の t^0 の係数を比べると、左辺は $2\alpha a_2$、右辺はゼロなので、$a_2 = 0$ となる。

[6] 短時間近似での速度

式(14)の t^1 の係数を比べ、$a_0 = 0$ を使うと

$$6\alpha a_3 = -\frac{\lambda}{\tau^2}, \qquad \boxed{a_3 = -\frac{\lambda}{6\alpha\tau^2}}. \tag{15}$$

問題文の $\tau \ll 1/\lambda$ の近似では $X \simeq a_3 t^3$ なので、$t = \tau$ での速度は

$$\boxed{V_0 = \dot{X}(\tau) \simeq 3a_3\tau^2 = -\frac{\lambda}{2\alpha}}. \tag{16}$$

負号はリングが初期位置から $-x$ 方向へ動くことを表す。

[7] 最終位置

$t \geq \tau$ では $b(t) = 1$ であり、運動方程式は

$$\ddot{X} + \lambda \dot{X} = 0. \tag{17}$$

したがって速度は $\dot{X}(t) = V_0 e^{-\lambda(t-\tau)}$ と減衰し、無限時間後の変位は V_0/λ である。設問 [6]–[7] で指定された三次近似 $X \simeq a_3 t^3$ を用いると、

$$X(\tau) \simeq -\frac{\lambda\tau}{6\alpha}, \qquad V_0 \simeq -\frac{\lambda}{2\alpha}. \tag{18}$$

従って、この指定された近似の下での答えは

$$\boxed{X(\infty) \simeq X(\tau) + \frac{V_0}{\lambda} = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\lambda\tau}{6\alpha}}. \tag{19}$$

この三次近似の結果と、運動方程式の漸近展開の精度は区別する必要がある。$\epsilon = \lambda\tau$、$u = t/\tau$、$y = \alpha X$ と置くと、$0 \leq u \leq 1$ で式(14)は

$$y''(u) = -\epsilon u[1 + y(u) + u y'(u)], \qquad y(0) = y'(0) = 0 \tag{20}$$

となる。この有限区間の線形初期値問題を ϵ で順に展開すると

$$y(u) = -\frac{\epsilon u^3}{6} + \frac{\epsilon^2 u^6}{45} + O(\epsilon^3), \qquad y'(u) = -\frac{\epsilon u^2}{2} + \frac{2\epsilon^2 u^5}{15} + O(\epsilon^3) \tag{21}$$

を得る。従って $X(\tau) = y(1)/\alpha$、$V_0/\lambda = y'(1)/(\alpha\epsilon)$ を足した漸近展開は

$$X(\infty) = -\frac{1}{2\alpha} - \frac{\lambda\tau}{30\alpha} + O\left(\frac{(\lambda\tau)^2}{\alpha}\right). \tag{22}$$

三次近似だけで得た箱内の一次係数 $-1/6$ は、V_0 の次の補正を含めないため、この漸近展開の一次係数とは異なる。

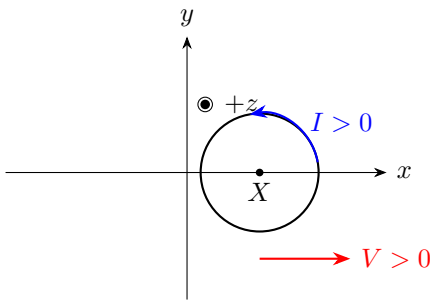


図 1: 磁束と電流の符号規約。紙面の手前が $+z$、正電流はその向きから見て反時計回り。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 1 問

政岡凜太郎

[1] 数演算子と消滅演算子

交換子の積の公式 $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ を用いると

$$[\hat{N}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = \hat{a}^\dagger [\hat{a}, \hat{a}] + [\hat{a}^\dagger, \hat{a}]\hat{a} = -\hat{a}. \tag{1}$$

このため

$$\hat{N}(\hat{a}|n+1\rangle) = \hat{a}\hat{N}|n+1\rangle - \hat{a}|n+1\rangle = n\hat{a}|n+1\rangle. \tag{2}$$

従って $\hat{a}|n+1\rangle$ は固有値 n の固有状態に比例する。規格化された固有状態の位相を適当に選び、$\hat{a}|n+1\rangle = c_n|n\rangle$（$c_n \geq 0$）と書く。係数はノルムの二乗から

$$c_n^2 = \langle n+1|\hat{a}^\dagger \hat{a}|n+1\rangle = n+1 \tag{3}$$

なので、

$$\boxed{\hat{a}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}|n\rangle.} \tag{4}$$

同様に

$$\|\hat{a}|0\rangle\|^2 = \langle 0|\hat{N}|0\rangle = 0 \tag{5}$$

だから $\boxed{\hat{a}|0\rangle = 0}$ である。

[2] コヒーレント状態の固有値

互いに直交規格化された数状態を使うと

$$\langle \Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1. \tag{6}$$

消滅演算子を級数に作用させ、[1] を使って添字をずらすと

$$\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n}\,|n-1\rangle \tag{7}$$

$$= \alpha e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^j}{\sqrt{j!}} |j\rangle = \boxed{\alpha|\Psi(\alpha)\rangle}. \tag{8}$$

[3] エネルギー期待値

[2] の固有値式と規格化を、$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ の期待値に用いると

$$\langle \hat{N} \rangle = \|\hat{a}|\Psi(\alpha)\rangle\|^2 = |\alpha|^2 \langle \Psi(\alpha)|\Psi(\alpha)\rangle = |\alpha|^2. \tag{9}$$

従って

$$\boxed{\langle \hat{H} \rangle = \hbar\omega \left(|\alpha|^2 + \frac{1}{2} \right).} \tag{10}$$

[4] 平均値と不確定性

生成・消滅演算子の定義を足し引きすると

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{p} = -i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \tag{11}$$

固有状態の性質から $\langle\hat{a}\rangle = \alpha$、$\langle\hat{a}^\dagger\rangle = \alpha^*$ なので

$$\boxed{\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\Re\alpha}, \qquad \boxed{\langle\hat{p}\rangle = \sqrt{2m\hbar\omega}\,\Im\alpha}. \tag{12}$$

また $\langle\hat{a}^2\rangle = \alpha^2$、$\langle\hat{a}^{\dagger 2}\rangle = (\alpha^*)^2$、$\langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle = |\alpha|^2$、$\langle\hat{a}\hat{a}^\dagger\rangle = |\alpha|^2 + 1$ より

$$\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left[(\alpha + \alpha^*)^2 + 1\right], \tag{13}$$

$$\langle\hat{p}^2\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left[(\alpha - \alpha^*)^2 - 1\right]. \tag{14}$$

平均値の二乗をそれぞれ引くと、

$$\boxed{\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}}, \qquad \boxed{\Delta p = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}}, \qquad \boxed{\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}}. \tag{15}$$

各標準偏差は正であり、積はハイゼンベルクの下限に等しい。

[5] 時間発展

数状態ごとの時間発展は

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|n\rangle = e^{-i\omega t(n+1/2)}|n\rangle. \tag{16}$$

これを状態の級数に適用すると

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(\alpha_0)\rangle = e^{-i\omega t/2}e^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0 e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{17}$$

$$= e^{-i\omega t/2}|\Psi(\alpha_0 e^{-i\omega t})\rangle. \tag{18}$$

従って

$$\boxed{\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} = Ae^{i(\theta - \omega t)}}. \tag{19}$$

前の因子 $e^{-i\omega t/2}$ は全ての数状態に共通する全体位相であり、期待値には影響しない。

[6] 古典的な運動と準古典状態

時刻 t で $\alpha(t) = Ae^{i(\theta-\omega t)}$ を位置・運動量の平均式に代入すると

$$\boxed{\langle\hat{x}\rangle_t = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}A\cos(\omega t - \theta)}, \tag{20}$$

$$\boxed{\langle\hat{p}\rangle_t = -\sqrt{2m\hbar\omega}A\sin(\omega t - \theta)}. \tag{21}$$

これらは古典調和振動子の位置・運動量の時間変化そのものである。振幅は A に比例する一方、Δx と Δp は A に依存しない。それぞれの振動振幅に対する標準偏差の比は $1/(2A)$ であり、$A \gg 1$ では波束の広がりが古典軌道の振幅より十分小さくなる。この意味で準古典状態と呼ばれる。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 2 問

政岡凜太郎

[1] 可逆断熱膨張

エントロピーを P,T の関数とみると、全微分は

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P + \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \mathrm{d}T. \tag{1}$$

マクスウェル関係と $C_P = T(\partial S/\partial T)_P$、熱膨張率 $\alpha = V^{-1}(\partial V/\partial T)_P$ を使うと

$$\mathrm{d}S = -\alpha V\,\mathrm{d}P + \frac{C_P}{T}\,\mathrm{d}T. \tag{2}$$

可逆断熱過程では $\mathrm{d}S = 0$ だから、

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{TV\alpha}{C_P}}. \tag{3}$$

理想気体は $V = RT/P$ なので、一定圧力で $\partial V/\partial T = R/P = V/T$ となり

$$\boxed{\alpha_{\mathrm{ideal}} = \frac{1}{T}}. \tag{4}$$

[2] ジュール・トムソン膨張のエンタルピー

多孔栓を通る定常流を、栓の両側を含む断熱制御体積として考える。外部との熱交換はなく、軸仕事もなく、流速と高さの変化による運動・位置エネルギーの差を無視する。入口側が流体を押す圧力仕事は P_1V_1、出口側で流体がする仕事は P_2V_2 なので、単位モル当たりの第一法則は $U_2 - U_1 = P_1V_1 - P_2V_2$ となる。従って $H = U + PV$ とおけば入口・出口で

$$H_1 = H_2 \tag{5}$$

となる。これは等エンタルピー条件であり、栓を通る過程を等エントロピーとする主張ではない。断熱でも、不可逆過程ではエントロピーは生成されうる。

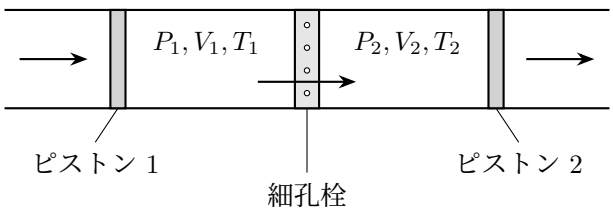


図 1: 断熱された細孔栓の入口・出口状態。

[3] ジュール・トムソン係数

エンタルピーを P,T の関数として微分する。

$$\mathrm{d}H = C_P\,\mathrm{d}T + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T \mathrm{d}P. \tag{6}$$

$\mathrm{d}H = \mathrm{d}U + P\,\mathrm{d}V + V\,\mathrm{d}P = T\,\mathrm{d}S + V\,\mathrm{d}P$ とマクスウェル関係から $(\partial H/\partial P)_T = V - T(\partial V/\partial T)_P = V(1-T\alpha)$。従って等エンタルピー条件 $\mathrm{d}H = 0$ では

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{V(T\alpha - 1)}{C_P}}. \tag{7}$$

[1] の係数との差は

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H - \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = -\frac{V}{C_P} < 0, \tag{8}$$

ここで $V > 0, C_P > 0$ を用いた。理想気体では $T\alpha = 1$ なので、

$$\boxed{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{H,\mathrm{ideal}} = 0}. \tag{9}$$

[4] 低密度での状態方程式

この小問で用いる van der Waals の状態方程式は

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \tag{10}$$

これを P について解くと

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}, \qquad PV = \frac{RT}{1 - b/V} - \frac{a}{V}. \tag{11}$$

$b/V \ll 1$ で $1/(1-b/V) \simeq 1 + b/V$ と展開する。

$$PV \simeq RT + \frac{RTb - a}{V} \tag{12}$$

$$= RT\left[1 + \left(1 - \frac{a}{bRT}\right)\frac{b}{V}\right]. \tag{13}$$

従って

$$\boxed{B(T) = 1 - \frac{a}{bRT}}. \tag{14}$$

ボイル温度 $T_B = a/(Rb)$ では $B(T_B) = 0$ となり、低密度での一次の非理想補正が消える。これは密度の一次の範囲で理想気体に近づくという意味である。

[5] 逆転温度

ここでも原問題の $V \gg b$、$T \geq T_B$ の範囲で近似を用いる。与えられた近似を T で微分すると

$$V \simeq \frac{RT}{P} + b - \frac{a}{RT}, \qquad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \simeq \frac{R}{P} + \frac{a}{RT^2}. \tag{15}$$

一般式 $\mu_{\rm JT} = [T(\partial V/\partial T)_P - V]/C_P$ に代入して

$$\boxed{\mu_{\rm JT} = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H \simeq \frac{1}{C_P}\left(\frac{2a}{RT} - b\right)}. \tag{16}$$

係数がゼロとなる逆転温度は

$$\boxed{T_{\rm inv} = \frac{2a}{Rb} = 2T_B}. \tag{17}$$

この近似の範囲で、$T_B \le T < T_{\rm inv}$ では $\mu_{\rm JT} > 0$ なので減圧時に冷え、$T > T_{\rm inv}$ では $\mu_{\rm JT} < 0$ なので減圧時に温まる。

[6] 排除体積だけがある場合

a の寄与を無視したとき、相互作用は排除体積だけであり、粒子間ポテンシャルエネルギーは温度に依存しない定数として扱える。従って内部エネルギー U は運動エネルギーで決まり、温度だけに依存する。一方、状態方程式は $P(V-b) = RT$ なので

$$H = U + PV = U + RT\frac{V}{V-b} = U + RT\left(1 + \frac{b}{V-b}\right). \tag{18}$$

温度を固定して体積を増やすと $V/(V-b) = 1 + b/(V-b)$ は減少する。$C_V = (\partial U/\partial T)_V > 0$ を用いて H の全微分を取ると

$$dH = \left(C_V + \frac{RV}{V-b}\right)dT - \frac{RTb}{(V-b)^2}dV. \tag{19}$$

したがってジュール・トムソン過程の $dH = 0$ で $dV > 0$ なら $dT > 0$ となる。これは $\mu_{\rm JT} = -b/C_P < 0$ と減圧時の $\mathrm{d}P < 0$ から $\mathrm{d}T > 0$ となることにも一致する。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 3 問

政岡凜太郎

[1] 束縛電子の運動

電子の電荷は $-e$ なので、電場による力は $-e\boldsymbol{E}$ である。共振振動数 ω_0 の調和復元力も加えると、

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{x}} = -m\omega_0^2\boldsymbol{x} - e\boldsymbol{E}.} \tag{1}$$

[2] 分極の運動方程式

数密度 N の電子による分極は $\boldsymbol{P} = -eN\boldsymbol{x}$ である。これを時間で 2 回微分し、[1] を使うと

$$\boxed{\ddot{\boldsymbol{P}} + \omega_0^2\boldsymbol{P} = \frac{Ne^2}{m}\boldsymbol{E}.} \tag{2}$$

右辺の符号が正なのは、$\boldsymbol{P}$ と電子変位 $\boldsymbol{x}$ が反対向きだからである。

[3] 誘電率

電場と分極が角周波数 ω で振動するので、$\ddot{P} = -\omega^2 P$ である。従って

$$(\omega_0^2 - \omega^2)P = \frac{Ne^2}{m}E, \qquad \boxed{P = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}E}. \tag{3}$$

マクロな関係 $D = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon(\omega)E$ より

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}. \tag{4}$$

[4] 誘電体中の分散関係

問題文の波動方程式 (3) に平面波を代入すると $-k^2E + \varepsilon(\omega)\mu_0\omega^2 E = 0$ だから

$$\boxed{k^2 = \mu_0\varepsilon(\omega)\omega^2}. \tag{5}$$

プラズマ角周波数を $\omega_p^2 = Ne^2/(\varepsilon_0 m)$、$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2}$ とおく。真空中の光速 $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ を使えば

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\omega_1^2 - \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}. \tag{6}$$

[5] 誘電体の実部・虚部

正の角周波数に対して、分子と分母の符号を比べる。$+z$ 方向へ進む波には、伝搬域で $\mathrm{Re}\,k>0$、非伝搬域で $\mathrm{Im}\,k>0$ となる枝を選ぶ。

周波数域	$\mathrm{Re}\,k$	$\mathrm{Im}\,k$
$0<\omega<\omega_0$	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}}$	0
$\omega_0<\omega<\omega_1$	0	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega_1^2-\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}}$
$\omega>\omega_1$	$\dfrac{\omega}{c}\sqrt{\dfrac{\omega^2-\omega_1^2}{\omega^2-\omega_0^2}}$	0

(7)

誘電体の非伝搬帯では $k=i\kappa$（$\kappa>0$）を選ぶ。位相因子は $e^{ikz}=e^{-\kappa z}$ となり、$+z$ 方向へ進むと振幅が減衰する。これはエバネッセント場の空間的減衰であり、この無減衰模型での吸収損失を意味しない。共振 ω_0 では理想化した無減衰模型の k が発散し、ω_1 では $k=0$ となる。

図の例では $\Omega=\omega/\omega_0$、$K=ck/\omega_0$ と規格化し、$\omega_1/\omega_0=2$ を選ぶ。従って $\omega_p/\omega_0=\sqrt{3}$ であり、実部・虚部の枝は直前の分散式から

$$\mathrm{Re}\,K=\begin{cases}\Omega\sqrt{\dfrac{4-\Omega^2}{1-\Omega^2}}, & 0<\Omega<1,\\ 0, & 1<\Omega<2,\\ \Omega\sqrt{\dfrac{\Omega^2-4}{\Omega^2-1}}, & \Omega>2,\end{cases}\qquad \mathrm{Im}\,K=\begin{cases}\Omega\sqrt{\dfrac{4-\Omega^2}{\Omega^2-1}}, & 1<\Omega<2,\\ 0, & 0<\Omega<1 \text{ または} \Omega>2.\end{cases} \tag{8}$$

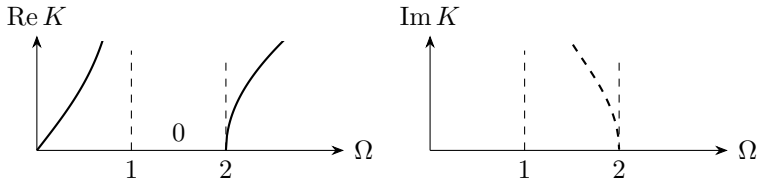


図 1: 誘電体の規格化波数 K の実部（実線）と虚部（破線）。共振近傍で発散する枝は枠外へ続く。

[6] 金属中の自由電子

金属中の電子には束縛復元力がない。磁気力を無視すると、電場による運動方程式は

$$\boxed{m\ddot{\boldsymbol{x}}=-e\boldsymbol{E}.} \tag{9}$$

分極 $\boldsymbol{P}=-en_e\boldsymbol{x}$ を導入すれば、調和応答では

$$P=-\frac{n_e e^2}{m\omega^2}E,\qquad \varepsilon_m(\omega)=\varepsilon_0\left(1-\frac{\omega_{pm}^2}{\omega^2}\right),\qquad \omega_{pm}^2=\frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m}. \tag{10}$$

[7] 金属の実部・虚部

分散関係は

$$k^2=\mu_0\varepsilon_0(\omega^2-\omega_{pm}^2)=\frac{\omega^2-\omega_{pm}^2}{c^2}. \tag{11}$$

ここでは $\Omega = \omega/\omega_{pm}$、$K = ck/\omega_{pm}$ とおくと、正周波数で

$$\operatorname{Re} K = \begin{cases} 0, & 0 < \Omega < 1, \\ \sqrt{\Omega^2 - 1}, & \Omega > 1, \end{cases} \qquad \operatorname{Im} K = \begin{cases} \sqrt{1 - \Omega^2}, & 0 < \Omega < 1, \\ 0, & \Omega > 1. \end{cases} \tag{12}$$

となる。従って正の角周波数では

$$\boxed{\begin{aligned} 0 < \omega < \omega_{pm}: \quad & \operatorname{Re} k = 0, \quad \operatorname{Im} k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega_{pm}^2 - \omega^2}, \\ \omega > \omega_{pm}: \quad & \operatorname{Re} k = \frac{1}{c}\sqrt{\omega^2 - \omega_{pm}^2}, \quad \operatorname{Im} k = 0. \end{aligned}} \tag{13}$$

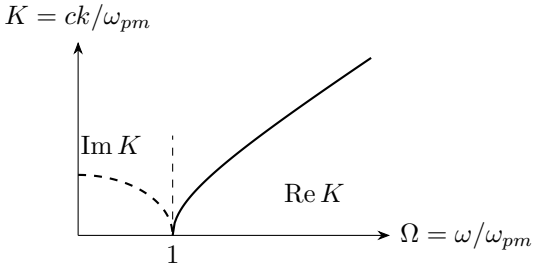


図 2: 金属の規格化波数 K の実部（実線）と虚部（破線）。

[8] 誘電体と金属の光学的性質

可視光を各模型の低周波数側とみなす。束縛電子をもつ誘電体で $\omega \ll \omega_0$ なら k は実数であり、波は媒質内を伝搬する。対して金属で $\omega < \omega_{pm}$ なら k は虚数であり、電場は表面から内部へ指数関数的に減衰する。内部にはエバネッセント場が存在する。ここで H_y は磁場の強さの y 成分である。位相因子 $e^{i(kz-\omega t)}$ に対する Faraday の法則 $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{H}$ の y 成分は $ikE_x = i\omega\mu_0 H_y$ だから、$H_y = kE_x/(\mu_0\omega)$ となる。k が純虚数なので、時間平均の法線エネルギー流は $\operatorname{Re}(E_x H_y^*)/2 = |E_x|^2 \operatorname{Re}(k)/(2\mu_0\omega) = 0$ である。散逸のない半無限金属に平均電力は伝わらず、入射電力は反射される。金属内部の空間的減衰を吸収損失とは解釈しない。

物理工学専攻院試解答集
2016 年度物理学 II 第 4 問

政岡凜太郎

[1.1] 放物線バンドの状態密度

エネルギーが $\epsilon > 0$ 以下の状態は $\boldsymbol{k}$ 空間で楕円体の内部にある。その半軸は $k_i = \sqrt{2m_i\epsilon}/\hbar$ である。スピン自由度を数えず、$\boldsymbol{k}$ 空間で 1 状態が占める体積を $(2\pi)^3$ とすると、単位実空間体積当たりの状態数は

$$n(\epsilon) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{3}\prod_{i=1}^{3}\frac{\sqrt{2m_i\epsilon}}{\hbar} = \frac{(2\epsilon)^{3/2}\sqrt{m_1m_2m_3}}{6\pi^2\hbar^3}. \tag{1}$$

これを ϵ で微分して

$$\boxed{\rho_{3\mathrm{D}}(\epsilon) = \frac{\sqrt{2m_1m_2m_3\epsilon}}{2\pi^2\hbar^3} \quad (\epsilon \geq 0),} \tag{2}$$

負のエネルギーでは $\rho_{3\mathrm{D}} = 0$ である。状態密度はバンド端から $\sqrt{\epsilon}$ に比例して増加する。

[1.2] 波数の時間発展

速度成分は $v_x = \hbar k_x/m_1$、$v_y = \hbar k_y/m_2$、$v_z = \hbar k_z/m_3$ である。電子の符号 $-e$ と $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ から

$$\dot{k}_x = -\frac{eB}{m_2}k_y, \qquad \dot{k}_y = \frac{eB}{m_1}k_x, \qquad \dot{k}_z = 0. \tag{3}$$

従って $\ddot{k}_x = -(eB)^2k_x/(m_1m_2)$ であり、正の角周波数は

$$\boxed{\omega_c = \frac{eB}{\sqrt{m_1m_2}}}. \tag{4}$$

初期条件と設問の k_x の形より

$$\boxed{k_x(t) = k_{0x}\cos(\omega_c t), \quad k_y(t) = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}k_{0x}\sin(\omega_c t), \quad k_z(t) = k_{0z}.} \tag{5}$$

[1.3] 波数軌道

消去すると

$$\frac{k_x^2}{k_{0x}^2} + \frac{k_y^2}{(\sqrt{m_2/m_1}\,k_{0x})^2} = 1. \tag{6}$$

したがって k_x–k_y 平面では楕円を描く。$t = 0$ で $(k_x, k_y) = (k_{0x}, 0)$ にあり、$\dot{k}_y(0) > 0$ なので、時間とともに上向きに進む。

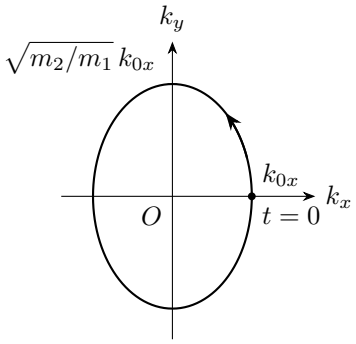


図 1: 放物線バンドの波数軌道。図では $m_2 = 2m_1$ とし、軸上のラベルには一般の半軸長を示す。矢印は時間の増加方向を示す。

[1.4] 実空間の軌道

群速度を積分し、$\boldsymbol{r}(0) = 0$ を使うと

$$x(t) = \frac{\hbar k_{0x}}{m_1 \omega_c} \sin(\omega_c t), \tag{7}$$

$$y(t) = \frac{\hbar k_{0x}}{\sqrt{m_1 m_2}\,\omega_c} [1 - \cos(\omega_c t)], \tag{8}$$

$$z(t) = \frac{\hbar k_{0z}}{m_3} t. \tag{9}$$

xy 平面への射影は中心が $y = \hbar k_{0x}/(\sqrt{m_1 m_2}\,\omega_c)$ にある楕円である。$t = 0$ では原点から x 正方向へ進む。z は一定速度で増えるので、三次元軌道はこの楕円を射影にもつらせんである。

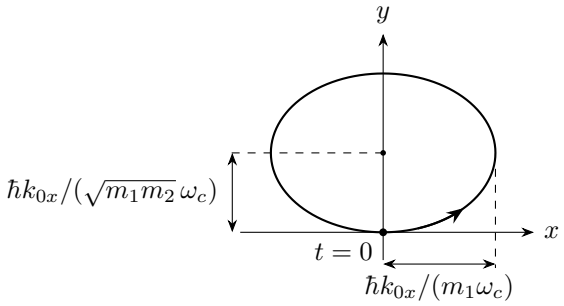


図 2: 放物線バンドの実空間軌道の xy 射影。図 1と同じ $m_2 = 2m_1$ の例。初期位置は原点で、矢印は時間の増加方向を示す。

[2.1] 線形バンドの状態密度

2 次元では状態密度は $\boldsymbol{k}$ 空間の面積で数える。エネルギーの絶対値が $|\epsilon|$ 以下の状態の波数半径は $k = |\epsilon|/\gamma$ であり、1 枝当たりの単位面積当たり状態数は

$$n(\epsilon) = \frac{\pi k^2}{(2\pi)^2} = \frac{\epsilon^2}{4\pi\gamma^2}. \tag{10}$$

正負どちらの枝についても $|\epsilon|$ で微分した状態密度は

$$\boxed{\rho_{2\mathrm{D}}(\epsilon) = \frac{|\epsilon|}{2\pi\gamma^2}.} \tag{11}$$

よって $\epsilon = 0$ でゼロとなり、正負のエネルギーに対して V 字形に増加する。

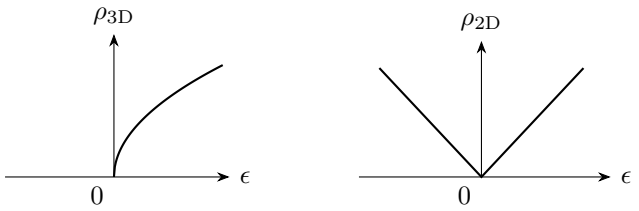


図 3: 放物線バンドと線形バンドの状態密度の概形。各図の尺度は独立で、左は $\sqrt{\epsilon}$、右は $|\epsilon|$ に比例する形を示す。

[2.2] 線形バンドの波数運動

バンドの符号を $s = +1$（$\epsilon > 0$）、$s = -1$（$\epsilon < 0$）で表すと、速度は $\boldsymbol{v} = s(\gamma/\hbar)\boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ である。この等方的な分散では $\boldsymbol{v}$ が $\boldsymbol{k}$ に平行または反平行である。運動方程式 $\hbar\dot{\boldsymbol{k}} = -e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ の両辺を $\boldsymbol{k}$ と内積すると

$$\frac{d}{dt}|\boldsymbol{k}|^2 = 2\boldsymbol{k} \cdot \dot{\boldsymbol{k}} = -\frac{2e}{\hbar}\boldsymbol{k} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0. \tag{12}$$

よって初期値から $|\boldsymbol{k}| = k_0$ となる。この一定値を用いた運動方程式の成分は

$$\dot{k}_x = -s\frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}k_y, \qquad \dot{k}_y = s\frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}k_x. \tag{13}$$

従って $\ddot{k}_x = -(\gamma eB/(\hbar^2 k_0))^2 k_x$ である。初期条件を適用すると

$$\boxed{\omega_c = \frac{\gamma eB}{\hbar^2 k_0}}, \qquad \boxed{k_x = k_0\cos(\omega_c t), \quad k_y = sk_0\sin(\omega_c t).} \tag{14}$$

ここでは ω_c を正の角周波数の大きさとして定義し、回転方向を s で表した。

[2.3] 二つの線形バンドの軌道

波数空間では、両枝とも半径 k_0 の円を描く。正の枝は反時計回り、負の枝は時計回りに回る。

位置の速度は

$$v_x = s\frac{\gamma}{\hbar}\cos(\omega_c t), \qquad v_y = \frac{\gamma}{\hbar}\sin(\omega_c t). \tag{15}$$

初期位置を原点として積分すると

$$\boxed{x(t) = s\frac{\gamma}{\hbar\omega_c}\sin(\omega_c t), \qquad y(t) = \frac{\gamma}{\hbar\omega_c}[1 - \cos(\omega_c t)].} \tag{16}$$

$R_c = \gamma/(\hbar\omega_c) = \hbar k_0/(eB)$ とおくと $x^2 + (y - R_c)^2 = R_c^2$ であり、実空間の軌道も原点を通る円である。正の枝は原点から右へ動き、反時計回りに進む。負の枝は原点から左へ動き、時計回りに進む。

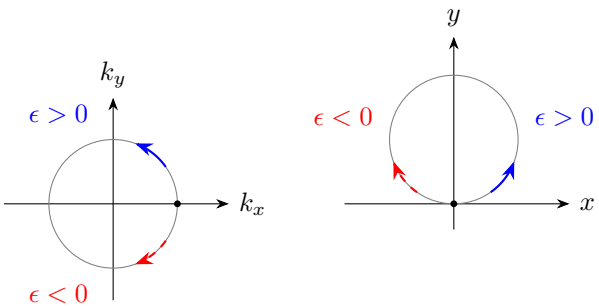


図 4: 線形バンドの波数円と実空間円。実線の矢印は正の枝、破線の矢印は負の枝の時間発展方向を示す。